УДК 517.911

М. У. Ахметов, канд. физ.-мат. наук,
Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Интегральные множества квазилинейных импульсных систем

Указаны достаточные условия существования интегральных множеств слабонелинейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях. Исследовано асимптотическое поведение решений, начинающихся на интегральных множествах и в окрестности этих множеств.

Вказані достатні умови існування інтегральних множин слабонелінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням на поверхнях. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків, які починаються на інтегральних множинах і в околі цих множин.

Для исследования импульсных систем большое значение имеет метод интегральных многообразий, существенный вклад в развитие которого внесли Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский [1]. Основные результаты, полученные в этом направлении, изложены в [2].

В настоящей работе с помощью методики, разработанной в [3], исследуются дифференциальные свойства интегральных множеств слабонелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях.

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющую вид

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \quad t \neq t_i + t_i(x), \quad \Delta x|_{t=t_i+t_i(x)} = B_i x + I_i(x), \qquad (1)$$

в которой $x \in R^n$, матрицы $A(t)$, $t \in R$, и B_i, $i \in Z$ (Z — множество целых чисел) размера $n \times n$, $A(t)$ непрерывна при всех $t \in R$, матрицы $(E + B_i)$, $i \in Z$, невырожденные,

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \|A(t)\| + \sup_{-\infty<i<+\infty} \|B_i\| = N < +\infty.$$

Предполагается, что равномерно относительно $t \in R$, $i \in Z$ для любых $x, y \in R^n$ справедливо неравенство

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| + \|I_i(x) - I_i(y)\| + |t_i(x) - t_i(y)| \leqslant l\|x - y\|,$$

а также условие $f(t, 0) = I_i(0) = 0$.

Будем считать, что поверхности разрыва такие, что для любых $x \in R^n$, $i \in Z$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} t_{i+1} > t_i, \\ t_i + t_i(x) < t_{i+1} + t_{i+1}(x), \quad |t_i(x)| < l, \\ t_i(x + B_i x + I_i(x)) \leqslant t_i(x) \end{gathered} \qquad (2)$$

и, зафиксировав действительные положительные числа h и H, связанные соотношением $H = h^{-1}(1 + l)\exp(2(N + l)l)$, предположим также, что $l^2 H < 1$. Последнее неравенство в совокупности с соотношением (2) исключает возможность «биения» решений системы (1), принимающих значения в области $\|x\| \leqslant H$, о поверхности разрыва [2]. (Подробное исследование вопроса об условиях, исключающих «биение» решений импульсных систем, имеется в [4].)

В дальнейшем будут использованы следующие определения (см. [5—9]).

Пусть $x_j(t)$, $j = 1, 2,$ — решения системы (1), t_i^j — точки разрыва этих решений. Будем говорить, что решение $x_1(t)$ находится в ε-окрестности решения $x_2(t)$, если: 1) мера симметрической разности областей существования этих решений не больше чем ε; 2) для всех i выполняется неравенство $|t_i^1 - t_i^2| < \varepsilon$; 3) для всех t, удовлетворяющих условию $|t - t_i^2| > \varepsilon$, справедливо неравенство $\|x_1(t) - x_2(t)\| < \varepsilon$.

Топологию, определенную с помощью ε-окрестностей, будем называть B-топологией. Она является хаусдорфовой и ее можно построить и в том случае, когда решения определены на полуоси или всей вещественной прямой.

Будем говорить, что кусочно-непрерывная функция $u_j(t)$ является B-производной решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) по x_0^j, $j = \overline{1, n}$, $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^j, \ldots, x_0^n)$, если функция $\xi u_j(t)$ находится в θ-окрестности разности $x_j(t) - x(t)$, где $x_j(t)$ — решение системы (1) с начальным условием $x_j(t_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^j + \xi, \ldots, x_0^n)$ и $\theta \to 0$ при $\xi \to 0$. Кроме того, для всех t, лежащих вне θ-окрестностей точек разрыва решения $x(t)$, справедливо неравенство $\|x_j(t) - x(t) - \xi u_j(t)\| < \theta_1$, где $\theta_1 = o(\xi)$.

Напомним также, что решения импульсных систем предполагаются непрерывными слева в каждой точке из области существования [2].

1. Основная лемма. Лемма 1. *Пусть система* (1) *удовлетворяет указанным выше условиям. Тогда существуют отображения* $J_i(y) : R^n \to R^n$ *такие, что*: 1) $J_i(0) = 0$; 2) *для любого решения* $x(t)$ *системы* (1), *удовлетворяющего условию* $\|x(t)\| \leqslant h$, *уравнения*

$$dy/dt = A(t)y + f(t, y), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = B_i y + J_i(y) \tag{3}$$

допускают решение $y(t)$, $\|y(t)\| \leqslant H$, *которое удовлетворяет условию* $x(\tau_i) = x(\tau_i, t_i, y(t_i))$, *где* $x(t, t_i, y(t_i))$ — *решение системы*

$$dx/dt - A(t)x + f(t, x), \tag{4}$$

а τ_i — *точки разрыва решения* $x(t)$ *такие, что* $\tau_i = t_i + t_i(x(\tau_i))$; 3) *функции* $J_i(y)$ *равномерно относительно* $x, y \in R^n$, $\|x\| \leqslant H$, $\|y\| \leqslant H$, $i \in Z$ *удовлетворяют при выполнении условия* $l(N + l)H < 1$ *неравенству* $\|J_i(x) - J_i(y)\| \leqslant lk(l)\|x - y\|$, *где* $k(l)$ — *ограниченная функция*; 4) *если функции* $I_i(x)$, $f(t, x)$, $t_i(x)$ *непрерывно дифференцируемы по* x *и при любых* i *и* x, $\|x\| \leqslant H$, *выполняется соотношение*

$$1 - \langle \partial t_i(x)/\partial x, \ A(t)x + f(t, x)\rangle \neq 0, \tag{5}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ *означает скалярное произведение в* R^n, *то отображения* $J_i(x)$, $i \in Z$, *непрерывно дифференцируемы по* x, $\|x\| < H$.

Доказательство. Пусть $x(t, t_i, x)$, $x_1(t, x) = x(t, \tau_i, x(\tau_i +, t_i, x))$ — решения системы (4), где τ_i — моменты встречи решения $x(t, t_i, x)$ с поверхностью $t = t_i + t_i(x)$. (Для простоты, не нарушая общности, будем полагать, что при любых x и i справедливо неравенство $t_i(x) \geqslant 0$ и, следовательно, $t_i \leqslant \tau_i$.) Положим, что

$$J_i(x) = (E + B_i)\int_{t_i}^{\tau_i} (A(\tau)x(\tau, t_i, x) + f(\tau, x(\tau, t_i, x))\,d\tau +$$
$$+ I_i(x(\tau_i, t_i, x)) + \int_{\tau_i}^{t_i} (A(\tau)x_1(\tau, x) + f(\tau, x_1(\tau, x))\,d\tau. \tag{6}$$

Для определенных таким образом отображений $J_i(x)$, $i \in Z$, проверка справедливости утверждений 1—3 леммы осуществляется так же, как и доказательство леммы 1.1 из [5]. Докажем утверждение 4. Фиксируем j равным одному из значений $1, 2, \ldots n$. Обозначим $e_j = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)$, θ_i — точки разрыва решения $x(t, t_i, x + \mu e_j)$, $\mu \in R$. Не нарушая общности, будем считать, что $\theta_i \geqslant \tau_i$. Из условий леммы, согласно теореме 3 [8], вытекает, что решение системы (1) имеет B-производные по начальным данным на каждом конечном промежутке из R. Пусть $u(t)$ есть B-производная решения $x(t, t_i, x)$ по x_j, которая непрерывным в B-топологии образом зависит от x [8]. Тогда

$$x(\theta_i+, t_i, x+\mu e_j)-x(\theta_i+, t_i, x)=u(\theta_i)\mu+o_1(\mu), \tag{7}$$

где $o_1(\mu)=o(\mu)$.

Пусть $y(t, \theta_i, z)$ — решение системы (4). Легко проверить, используя определение (6), что $J_i(x)=y(t_i, \theta_i, x(\theta_i+, t_i, x))$, $J_i(x+\mu e_j)=y(t_i, \theta_i, x(\theta_i+, t_i, x+\mu e_j))$. Поэтому в силу дифференцируемости решений системы (4) по начальным данным найдем, что существует непрерывная матрица $\Phi_i(x)$ такая, что $J_i(x+\mu e_j)-J_i(x)=\Phi_i(x)[u(\theta_i)\mu+o_1(\mu)]+o_2(\mu)=\Phi_i(x)u(\theta_i)\mu+o_3(\mu)$, где $o_2(\mu)=o(\mu)$, $o_3(\mu)=o(\mu)$. Лемма доказана.

2. Приводимость к блочно-диагональному виду. Существование интегральных поверхностей. При исследовании импульсных систем важным является свойство «разреженности» множества точек разрыва $\{t_i\}$. Его можно выразить в виде двух следующих условий: A) последовательность $\{t_{i+1}-t_i\}$ отделена от нуля, т. е. $t_{i+1}-t_i \geqslant \theta > 0$, $i \in Z$; B) для любого вещественного числа $\alpha > 0$ найдется неотрицательное число ν такое, что при любом $\beta \in R$ отрезок $(\beta, \beta+\alpha)$ содержит не больше чем ν точек последовательности $\{t_i\}$.

В дальнейшем будем считать, что выполняется условие A). Но все проводимые в работе рассуждения с небольшими изменениями можно перенести и на случай B). Кроме того, из условия, что постоянная l может быть достаточно малой, следует, что при исследовании вопроса об ограниченных решениях или об устойчивости решений можно условия (2) и (5) заменить соотношениями

$$\sup_i \max_{\|x\|\leqslant H} \{t_i(x+B_ix)-t_i(x)\}<0,$$

$$\inf_t \inf_i \min_{\|x\|\leqslant H}\left|1-\langle\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}, A(t)x\rangle\right|>0.$$

Пусть линейная однородная система

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\ t\neq t_i,\ \Delta x|_{t=t_i}=B_ix, \tag{8}$$

соответствующая уравнениям (1), экспоненциально дихотомична (э. д.) [5] и размерности гиперплоскостей X_+ и X_-, используемых при определении, равны m и $n-m$ соответственно. Тогда существует кусочно-непрерывное преобразование Ляпунова [5], которое приводит систему (3) к виду

$$d\xi/dt=P_1(t)\xi(t)+f_1(t, z),\ t\neq t_i,\ \Delta\xi|_{t=t_i}=Q_i^1\xi+J_i^1(z), \tag{9}$$

$$d\eta/dt=P_2(t)\eta+f_2(t, z),\ t\neq t_i,\ \Delta\eta|_{t=t_i}=Q_i^2\eta+J_i^2(z), \tag{10}$$

где $z=(\xi, \eta)$, $\xi\in R^m$, $\eta\in R^{n-m}$, $z=L(t)y$.

Учитывая свойства матрицы $L(t)$, не нарушая общности, будем полагать, что для функций f_j, J_i^j, $j=1, 2$, так же, как и для функций f и J, справедливы указанные выше условия с теми же постоянными M и l и функцией $k(l)$. Можно проверить, что $f_j(t, 0)=J_i^j(0)=0$. Для матриц Коши $X_1(t, s)$ и $X_2(t, s)$ соответственно систем (9) и (10) существуют постоянные a и γ, для которых

$$\|X_1(t, s)\|\leqslant ae^{-\gamma(t-s)},\ t\geqslant s,\ \|X_2(t, s)\|\leqslant ae^{\gamma(t-s)},\quad t\leqslant s.$$

В [5] доказано, что система (9), (10) имеет при достаточно малом f интегральную поверхность Φ_+, задаваемую уравнениями

$$\xi(t_0, t_0, c)=c,\quad \eta(t_0, t_0, c)=$$

$$=\int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0, u)f_2(u, z(u))\,du-\sum_{t_0\leqslant t_i} X_2(t_0, t_i)J_i^2(z(t_i)) \tag{11}$$

такую, что решение $z = (\xi, \eta)$ с начальными значениями t_0, ξ_0, ζ_0, удовлетворяющими уравнениям (11), для произвольных $\varepsilon > 0$ и σ, $0 < \sigma < \varepsilon$, при достаточно малом l удовлетворяет неравенству

$$\| z(t) \| \leqslant (a + \varepsilon) \| c \| e^{-\sigma(t-t_0)} \qquad (12)$$

равномерно по $t \geqslant t_0$. Выражение (11) можно записать в виде уравнения $\eta = \Re(t_0, c)$ и проверить, что функция $\Re(t_0, c)$ удовлетворяет по c условию Липшица и $\Re(t, 0) = 0$ при $t \in R$.

Распространяя полученный результат на систему (1), заменяя t на $-t$, учитывая непрерывную в B-топологии зависимость решений системы (1) от начальных данных, найдем, что система (1) имеет для любого действительного числа $h > 0$ при достаточно малом l две интегральные поверхности Ψ_+ и Ψ_-, расположенные в области $\{(x, t) \mid \|x\| \leqslant h,\ t \geqslant t_0\}$ и $\{(x, t) \mid \|x\| \leqslant h,\ t \leqslant t_0\}$ соответственно и такие, что нулевое решение этой системы B-асимптотически устойчиво относительно многообразия Ψ_+, а решение $x(t)$, начинающееся на Ψ_-, стремится к началу координат при $t \to -\infty$ и $|t_i - t_i(0) - \tau_i| \to 0$ при $i \to -\infty$. Здесь τ_i — точки разрыва решения $x(t)$.

3. Решения, начинающиеся вне поверхностей Ψ_+ и Ψ_-. Перейдем к изучению поведения решений, расположенных вне поверхностей Ψ_+ и Ψ_-.

Так же, как и аналогичная теорема из [3], с помощью методики, разработанной в [5], доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *удовлетворяет указанным условиям, соответствующая ей линейная однородная система* (8) *э. д., последовательность* $\{t_i\}$ *удовлетворяет одному из условий* А) *или* В), *и система* (1) *имеет тривиальное решение.*

Тогда для любого решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, $\|x_0\| \leqslant h$, *начинающегося вне поверхности* Ψ_+ (Ψ_-), *существует точка* ζ, $\zeta < +\infty$ $(\zeta > -\infty)$ *такая, что* $\|x(\zeta)\| > h$.

Пусть теперь постоянные a и l дополнительно к указанным выше условиям удовлетворяют неравенствам

$$a > 1, \quad (1 + 2alk(l))\, lk(l)\, a^3 < 1 \qquad (13)$$

и обозначим

$$p(l, a) = \frac{(1 + 2alk(l))(1 + lk(l)\, a)}{1 - (1 + 2alk(l))\, lk(l)\, a^3},$$

$$q(l, a, \gamma) = \gamma - a^2(1 + a^2 p(l, a))\, l - \theta^{-1} \ln(1 + k(l)\, la(a^2 p(l, a) + 1)).$$

Будем считать также, что

$$q(l, a, \gamma) > 0. \qquad (14)$$

Теорема 2. *Пусть система* (9), (10) *удовлетворяет указанным условиям и, кроме того, выполняются условия* (13), (14) *и* $z_0 \neq 0$ $\|z_0\| \leqslant H$, $\|\eta_0\| \geqslant \|\xi_0\|$. *Тогда существует точка* ζ, $\zeta < +\infty$ *такая, что*: 1) $\|z(\zeta)\| \leqslant H$; 2) *при всех* t, $t_0 \leqslant t < \zeta$, *справедливы неравенства* $\|z(t)\| \leqslant H$ *и*

$$\| \eta(t) \| \geqslant \frac{\| \eta_0 \|}{a(1 + (a^2 p(l, a) + 1)\, ak(l))} e^{q(l, a, \gamma)(t-t_0)}; \qquad (15)$$

3) *существует действительное число* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $t \in (\zeta, \zeta + \delta)$ *справедливо соотношение* $\|z(t)\| > H$.

Доказательство. Предположим, что выполняются все условия теоремы и для всех $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство $\|z(t)\| \leqslant H$. Покажем, что в этом случае для всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство (15). Для этого убедимся, прежде всего, что если $\|\xi_0\| \leqslant \|\eta_0\|$, то при всех $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство

$$\| \xi(t) \| \leqslant a^2 p(l, a) \| \eta(t) \|. \qquad (16)$$

Если предположить противное, то существуют точки t_1, t_2, $t_0 \leqslant t_1 < t_2$, такие, что в точке t_1 впервые, начиная с момента $t = t_0$, выполняется неравенство

$$\|\eta(t_1)\| \leqslant \|\xi(t_1)\| \leqslant a^2 p(l, a) \|\eta(t_1)\|, \tag{17}$$

а t_2 — точка, в которой впервые выполняется соотношение

$$\|\xi(t_2)\| \geqslant a^2 p(l, a) \|\eta(t_2)\|. \tag{18}$$

Действительно, это невозможно лишь в случае, когда существует точка разрыва t_i, для которой справедливы неравенства

$$\|\xi(t_i)\| < \|\eta(t_i)\|, \quad \|\xi(t_i+)\| \geqslant a^2 p(l, a) \|\eta(t_i+)\|. \tag{19}$$

Покажем, что это предположение не приведет к противоречию. Из равенств

$$\xi(t_i+) = \xi(t_i) + X_1(t_i+, t_i) J_i^1(z(t_i)),$$

$$\eta(t_i+) = \eta(t_i) + X_2(t_i+, t_i) J_i^2(z(t_i))$$

и (19) найдем

$$\|\xi(t_i+)\| \leqslant \|\eta(t_i)\| + 2alk(l)\|\eta(t_i)\|,$$

$$\|\eta(t_i+)\| \geqslant \|\eta(t_i)\| - 2alk(l)\|\eta(t_i)\|$$

и

$$\|\eta(t_i)\|(1 + 2alk(l)) \leqslant a^2 p(l, a)(1 - 2alk(l))\|\eta(t_i)\|.$$

Последнее неравенство приведет к соотношению $a \leqslant 1$, которое противоречит выбору $a > 1$.

Теперь, пользуясь интегральными представлениями для $\xi(t)$ и $\eta(t)$ [2], аналогом леммы Гронуолла—Беллмана и неравенствами (17), (18), получим

$$\|\xi(t_2)\| \leqslant a(1 + 2alk(l))\|\xi(t_1)\| \exp(-(\gamma - 2al -$$

$$- \theta^{-1} \ln(1 + 2k(l) la))(t_2 - t_1)),$$

$$\|\eta(t_1)\| \leqslant a(1 + a^2(1 + ak(l) l(1 + a^2 p(l, a)))\|\eta(t_2)\| \times$$

$$\times \exp(-q(l, a, \gamma)(t_2 - t_1))$$

и отсюда $\|\xi(t_2)\| < a^2 p(l, a)\|\eta(t_2)\|$, что противоречит выбору точки t_2. Следовательно, соотношение (16) справедливо.

Используя интегральное представление решения $\eta(t)$ системы (9), (10) и аналог леммы Гронуолла—Беллмана, находим

$$\|\eta(t_0)\| \leqslant e^{q(l, a, \gamma)(t_0 - t)} \|\eta(t)\| a(1 + (a^2 p(l, a) + 1) ak(l)$$

и, следовательно, неравенство (15) справедливо для $t \geqslant t_0$ при $\|z(t)\| \leqslant H$. Таким образом, получено противоречие и, следовательно, множество точек t, удовлетворяющих условиям $t \geqslant t_0$ и $\|z(t)\| > H$ непусто.

Легко проверить, что нижняя точная грань этого множества является искомой точкой φ. Теорема доказана.

Утверждение, аналогичное теореме 2, можно доказать и для случая $t \leqslant t_0$, $\|\xi_0\| \geqslant \|\eta_0\|$.

Пусть теперь $z = (\xi, \eta)$, $\|z_0\| \leqslant H$,— решение, начинающееся вне поверхности Φ_+, и выполняются условия теоремы 2. Если $\|\eta_0\| \geqslant \|\xi_0\|$, то справедливо неравенство (15). Используя рассуждения из [3], можно показать, что и в противном случае $\|\xi_0\| > \|\eta_0\|$, $\|z_0\| \leqslant H$ решение $z(t)$ принимает при некоторых t, $t \geqslant t_0$, значения в области $\|z\| > H$ из-за роста по модулю значений составляющей $\eta(t)$ при увеличении t.

4. Дифференциальные свойства интегральных поверхностей. Теорема 3. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям пп.* 2, 3 *и, кроме того, функции* $l(t, x)$, $I_i(x)$, $t_i(x)$ *непрерывно дифференцируемы по* x *и справедливо соотношение* (5). *Тогда решение* $x(t, t_0, c)$, *начинающееся на поверхности* Ψ_+, *определенной уравнениями* (11), *имеет* B*-производные по* c_j, $j = \overline{1, m}$, *на промежутке* $R_+ = [t_0, +\infty)$.

Доказательство. Можно проверить, что преобразование Ляпунова с матрицей $L(t)$ сохраняет непрерывную дифференцируемость функций f_j, J_i^j, $j = 1, 2$. Кроме того, очевидно, что эти функции удовлетворяют условию Липшица. Можно считать, что

$$\left\| \frac{\partial f_j(t, z)}{\partial z} \right\| \leqslant l, \quad \left\| \frac{\partial J_i^j(z)}{\partial z} \right\| \leqslant k(l)\, l,$$

если $\|z\| \leqslant Mh$ и l достаточно мало, где $M = \sup\limits_t \|L(t)\|$. Покажем, что решение $z(t, t_0, c)$ уравнений (9), (10), где c определено из (11), имеет B-производные по c_j, $j = \overline{1, m}$. Таким образом, на основании леммы 1 будет доказана теорема.

Согласно [5], $z(t, t_0, c) = (\xi(t), \eta(t))$ является также решением системы

$$\xi(t) = X_1(t, t_0)\, c + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t, u) f_1(u, z(u))\, du + \sum_{t_0 \leqslant t_i < t} X_1(t, t_i)\, J_i^1(z(t_i)), \qquad (20)$$

$$\eta(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t, u) f_2(u, z(u))\, du - \sum_{t \leqslant t_i} X_2(t, t_i)\, J_i^2(z(t_i)).$$

Пусть $z(t, t_0\, C + \mu e_j)$ — решение уравнения (20), в котором вектор c заменен вектором $c + \mu e_j$. Обозначим через $\omega(t, t_0, c) = (u, v)$ решение системы

$$u(t) = X_1(t, t_0)\, e_j + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t, \tau) f_{1z}(\tau)\, \omega(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0 \leqslant t_i < t} X_1(t, t_i)\, J_{iz}^1 \omega(t_i),$$

$$v(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t, \tau) f_{2z}(\tau)\, \omega(\tau)\, d\tau - \sum_{t < t_i} X_2(t, t_i)\, J_{iz}^2 \omega(t_i), \qquad (21)$$

в которой

$$f_{jz}(t) = \partial f_j(t, z(t))/\partial z, \quad J_{iz}^j = \partial J_i^j(z(t_i))/\partial z, \qquad j = 1, 2.$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось для системы (13), проверим, что уравнения (21) имеют единственное ограниченное при $t \geqslant t_0$ решение $\omega_0(t)$.

Покажем, что функция $\omega_0(t)$ есть B-производная решения $z(t, t_0, c)$ по c_j. Для этого достаточно убедиться, что при всех $t \in R_+$ справедливо соотношение $\nu(t) = o(\mu)$, где

$$\nu(t) = z(t, t_0, c + \mu e_j) - z(t, t_0, c) - \mu\omega_0(t).$$

Используя условия теоремы, находим, что функция $\nu(t) = (\varphi, \psi)$ есть ограниченное решение системы

$$\varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t, u)\, [f_{1z}(u)\, \nu(u) + o_1(\nu(u) + \mu\omega_0(u))]\, du +$$

$$+ \sum_{t_0 \leqslant t_i < t} X_1(t, t_i)\, [J_{iz}^1 \nu(t_i) + o_2(\nu(t_i) + \mu\omega_0(t_i))],$$

$$\psi(t) = -\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t, u)\, [f_{2z}(u)\, \nu(u) + o_3(\nu(u) + \mu\omega_0(u))]\, du -$$

$$- \sum_{t < t_i} X_2(t, t_i)\, [J_{iz}^2 \nu(t_i) + o_4(\nu(t_i) + \mu\omega_0(t_i))].$$

В этих уравнениях выражения $o_k(\ldots)$, $k = \overline{1, 4}$, удовлетворяют оценкам

$$\|o_k(\ldots)\| \leqslant \theta(\mu) |\mu|\, e^{-\sigma(t - t_0)}, \quad \theta(\mu) = O(\mu).$$

Поэтому

$$\|v(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} ae^{-\gamma(t-u)}[l\|v(u)\| + \theta(\mu)|\mu|e^{-\sigma(u-t_0)}]du +$$
$$+ \int_{t}^{\infty} ae^{\gamma(t-u)}[l\|v(u)\| + \theta(\mu)|\mu|e^{-\sigma(u-t_0)}]du +$$
$$+ \sum_{t_0 \leqslant t_i < t} ae^{-\gamma(t-t_i)}[k(l)\,l\|v(t_i)\| + \theta(\mu)|\mu|e^{-\sigma(t_i-t_0)}] +$$
$$+ \sum_{t < t_i} ae^{\gamma(t-t_i)}[k(l)\,l\|v(t_i)\| + \theta(\mu)|\mu|e^{-\sigma(t_i-t_0)}].$$

Отсюда, обозначив $\beta = \sup_t \|v(t)\|$, получим

$$\beta \leqslant \frac{2a\left(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right)}{1 - 2al\left(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{k(l)}{1-e^{-\gamma\theta}}\right)}\theta(\mu)|\mu|.$$

Теорема доказана.

Заменив в проведенных выше рассуждениях t на $-t$, убедимся, что поверхность Ψ_- обладает дифференциальными свойствами, аналогичными для поверхности ψ_+.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974. — 502 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987. —288 с.
3. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1977.— 304 с.
4. *Трофимчук С. И.* Достаточные условия отсутствия «биений» в импульсных системах // Дифференциальные уравнения с параметром.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 133—139.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Метод сравнения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Киев, 1989.— 41 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.3).
6. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* Периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях // Применение асимптотических методов в теории нелинейных дифференциальных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 11—14.
7. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О движении с импульсным воздействием на поверхностях // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1988.— С. 11—14.
8. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О дифференцируемой зависимости решений импульсных систем от начальных данных // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 8.— С. 1028—1033.
9. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* Устойчивость периодических решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях // Там же.— № 12.— С. 1596—1601.

Получено 09.11.89