УДК 517.9

О. В. Борисенко, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Малые случайные возмущения в колебательных системах второго порядка

Изучено предельное поведение решения нелинейного дифференциального уравнения, описывающего колебательную систему с малыми случайными возмущениями типа многомерного «белого» и «дробового» шумов.

Вивчена гранична поведінка розв'язку нелінійного диференціального рівняння, що описує коливальну систему з малими випадковими збуреннями по типу багатовимірного «білого» і «дробового» шумів.

Изучению колебательных систем под воздействием случайных возмущений посвящен ряд работ. Обширная библиография по данной теме приведена в [1].

В данной работе изучается предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ колебательной системы, описываемой уравнением

$$x''(t) + b^2 x(t) = \varepsilon f_0(x(t), x'(t)) + \varepsilon^{1/2} f(x(t), x'(t)), \tag{1}$$
$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = y_0,$$

где $f(x(t), x'(t))$ — обобщенная случайная функция такая, что для любого $t > 0$

$$\int_0^t f(x(s), x'(s))\, ds = \sum_{i=1}^d \int_0^t f_i(x(s), x'(s))\, dw_i(s) +$$
$$+ \int_0^t \int_{R^2} f_{d+1}(x(s), x'(s), z)\, \tilde{\nu}(ds, dz),$$

$f_i(x, y)$, $i = \overline{0, d}$, $f_{d+1}(x, y, z)$ — неслучайные функции; $w_i(t)$, $i = \overline{1, d}$, — независимые одномерные винеровские процессы; $\tilde{\nu}(t, A)$ — центрированная пуассонова мера, независимая от $w_i(t)$, $i = \overline{1, d}$, $\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - t\Pi(A)$, $M\nu(t, A) = t\Pi(A)$; x_0, y_0 — неслучайные начальные данные, $\Pi(\cdot)$ — мера на борелевских множествах в R^2.

Уравнение второго порядка (1) понимается как система стохастических уравнений без последействия

$$dx(t) = y(t)\, dt,$$
$$dy(t) = [-b^2 x(t) + \varepsilon f_0(x(t), y(t))]\, dt + \varepsilon^{1/2} \sum_{i=1}^d f_i(x(t), y(t))\, dw_i(t) +$$
$$+ \varepsilon^{1/2} \int_{R^2} f_{d+1}(x(t), y(t), z)\, \tilde{\nu}(dt, dz), \quad x(0) = x_0, \; y(0) = y_0. \tag{2}$$

Положим $x_\varepsilon(t) = x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $y_\varepsilon(t) = y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $w_i^\varepsilon(t) = \varepsilon^{1/2} w_i\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $i = \overline{1, d}$, $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A) = \nu\left(\frac{t}{\varepsilon}, A\right) - \frac{1}{\varepsilon} t\Pi(A)$. Проведя замену $t \to t/\varepsilon$ в (2), получим

$$dx_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(t)\, dt,$$
$$dy_\varepsilon(t) = \left[-\frac{b^2}{\varepsilon} x_\varepsilon(t) + f_0(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\right] dt + \sum_{i=1}^d f_i(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\, dw_i^\varepsilon(t) +$$
$$+ \varepsilon^{1/2} \int_{R^2} f_{d+1}(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z)\, \tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz), \tag{3}$$
$$x_\varepsilon(0) = x_0, \quad y_\varepsilon(0) = y_0.$$

В дальнейшем постоянные, независящие от ε, будем обозначать C.

Лемма. *Пусть* $\Pi(R^2) < \infty$ *и выполняются условия*:

1) f_i, $i = \overline{0, d+1}$, *ограничены и удовлетворяют локальному условию Липшица по переменным* (x, y);

2) *существуют постоянные* $K > 0$ *и* $r > 0$ *такие, что для некоторого* $\gamma > 0$

$$\sum_{i=0}^d |f_i(x, y)|^2 + |f_{d+1}(x, y, z)|^2 \leqslant K(x^2 + y^2)^{1+\gamma}, \quad x^2 + y^2 \leqslant r^2, \; \forall z \in R^2.$$

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$

$$P\{x_\varepsilon^2(t) + y_\varepsilon^2(t) \leqslant \delta\} \leqslant Ct(\delta^{\gamma/2} + \delta^\gamma). \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Пусть для функций f_i, $i = \overline{0, d+1}$, выполняется условие 2 леммы при $\gamma > 1$. Тогда, используя (4), убеждаемся, что к случайным процессам

$$a_\varepsilon(t) = \sqrt{x_\varepsilon^2(t) + \frac{1}{b^2} y_\varepsilon^2(t)}, \quad \theta_\varepsilon(t) = -\frac{b}{\varepsilon} t - \operatorname{arctg} \frac{y_\varepsilon(t)}{bx_\varepsilon(t)}$$

можно применить обобщенную формулу Ито [3]. Для процесса $\xi_\varepsilon(t) = (a_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t))$ получим систему стохастических уравнений без последействия

$$d\xi_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t))\,dt + \sigma_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t))\,dw_\varepsilon(t) +$$

$$+ \int_{R^2} C_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t), z)\,\tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz), \quad \xi_\varepsilon(0) = (a_0, \theta_0), \tag{5}$$

где

$$w_\varepsilon(t) = \{w_i^\varepsilon(t),\ i = \overline{1, d}\}, \quad A_\varepsilon(t, a, \theta) = (A_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta),\ A_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta)),$$

$$\sigma_\varepsilon(t, a, \theta) = \{\sigma_{ij}^\varepsilon(t, a, \theta),\ i = 1, 2;\ j = \overline{1, d}\}, \quad C_\varepsilon(t, a, \theta, z) =$$

$$= (C_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta, z),\ C_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta, z)), \quad \psi_\varepsilon = \frac{tb}{\varepsilon} + \theta, \quad A_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta) =$$

$$= -\frac{\sin\psi_\varepsilon}{b}\tilde{f}_0(a, \psi_\varepsilon) + \frac{\cos^2\psi_\varepsilon}{2ab^2}\sum_{i=1}^{d}\tilde{f}_i^2(a, \psi_\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon b}\int_{R^2}\{[(ab\sin\psi_\varepsilon - \varepsilon^{1/2}\tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z))^2 + a^2b^2\cos^2\psi_\varepsilon]^{1/2} -$$

$$- ab + \varepsilon^{1/2}\sin\psi_\varepsilon\tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z)\}\,\Pi(dz),$$

$$A_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta) = -\frac{\cos\psi_\varepsilon}{ab}\tilde{f}_0(a, \psi_\varepsilon) - \frac{\sin 2\psi_\varepsilon}{2a^2b^2}\sum_{i=1}^{d}\tilde{f}_i^2(a, \psi_\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{R^2}\left\{\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\psi_\varepsilon - \varepsilon^{1/2}\frac{\tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z)}{ab\cos\psi_\varepsilon}\right] -\right.$$

$$\left. - \psi_\varepsilon + \varepsilon^{1/2}\frac{\cos\psi_\varepsilon}{ab}\tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z)\right\}\Pi(dz),$$

$$\sigma_{1j}^\varepsilon(t, a, \theta) = -\frac{\sin\psi_\varepsilon}{b}\tilde{f}_j(a, \psi_\varepsilon), \quad \sigma_{2j}^\varepsilon(t, a, \theta) = -\frac{\cos\psi_\varepsilon}{ab}\tilde{f}_j(a, \psi_\varepsilon),$$

$$j = \overline{1, d},$$

$$C_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta, z) = \frac{1}{b}\{[(ab\sin\psi_\varepsilon - \varepsilon^{1/2}\tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z))^2 + a^2b^2\cos^2\psi_\varepsilon]^{1/2} - ab\},$$

$$C_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta, z) = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\psi_\varepsilon - \frac{\varepsilon^{1/2}\tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z)}{ab\cos\psi_\varepsilon}\right] - \psi_\varepsilon,$$

$$\tilde{f}_i(a, \psi) = f_i(a\cos\psi, -ab\sin\psi), \qquad i = \overline{0, d},$$

$$\tilde{f}_{d+1}(a, \psi, z) = f_{d+1}(a\cos\psi, -ab\sin\psi, z), \quad a_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{b^2}},$$

$$\theta_0 = -\operatorname{arctg}\frac{y_0}{bx_0}.$$

Теорема. *Пусть* $\Pi(R^2) < \infty$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, $t \in [0, t_0]$, *функции* f_i, $i = \overline{0, d+1}$, *ограничены*, f_0 — *один раз*, f_i, $i = \overline{1, d+1}$, — *дважды непрерывно дифференцируемы по переменным* (x, y),

$$\int_{R^2} [\|\nabla f_{d+1}\|^2 + \|\nabla^2 f_{d+1}\|^2] \Pi(dz) \leqslant C$$

и существует постоянная $r > 0$ *такая, что для некоторого* $\gamma > 1$

$$\sum_{i=0}^{d+1} |f_i|^2 \leqslant C(x^2+y^2)^{1+\gamma}, \quad \sum_{i=0}^{d+1} \|\nabla f_i\|^2 \leqslant C(x^2+y^2)^{\gamma}$$

при $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ *и любом* $z \in R^2$. *Здесь* $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\nabla^2 f$ — *матрица вторых производных по* (x, y), $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ *для* $a \in R^n$, $\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}^2$ *для матрицы* σ.

Тогда процесс $\xi_\varepsilon(t) = (a_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t))$ *слабо сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению* $\bar{\xi}(t) = (\bar{a}(t), \bar{\theta}(t))$ *стохастического дифференциального уравнения*

$$d\bar{\xi}(t) = \bar{A}(\bar{a}(t))\,dt + \bar{\sigma}(\bar{a}(t))\,d\bar{w}(t), \quad \bar{\xi}(0) = (a_0, \theta_0), \tag{6}$$

где

$$\bar{A}^{(1)}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\tilde{f}_0(a,\psi)\frac{\sin\psi}{b} + \tilde{f}(a,\psi)\frac{\cos^2\psi}{2b^2a}\right]d\psi,$$

$$\bar{A}^{(2)}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\tilde{f}_0(a,\psi)\frac{\cos\psi}{ab} - \tilde{f}(a,\psi)\frac{\sin 2\psi}{2a^2b^2}\right]d\psi,$$

$$\bar{\sigma}(a) = \left\{\frac{1}{2\pi b^2}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(a,\psi)B(a,\psi)\,d\psi\right\}^{1/2},$$

$$\tilde{f}(a,\psi) = \sum_{i=1}^{d}\tilde{f}_i^2(a,\psi) + \int_{R^2}\tilde{f}_{d+1}^2(a,\psi,z)\Pi(dz),$$

$$B(a,\psi) = \begin{pmatrix} \sin^2\psi & \frac{\sin 2\psi}{2a} \\ \frac{\sin 2\psi}{2a} & \frac{\cos^2\psi}{a^2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}(t) = (\bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t)),$$

$\bar{w}_i(t)$, $i = 1, 2$, — *независимые одномерные винеровские процессы.*

Доказательство. В условиях теоремы имеем

$$\|A_\varepsilon(t,a,\theta)\| + \|\sigma_\varepsilon(t,a,\theta)\| + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\|C_\varepsilon(t,a,0,z)\| \leqslant C \tag{7}$$

и выполняются [4] условия теоремы существования и единственности решения системы (5). Процесс $\xi_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$\xi_\varepsilon(t) = \xi_0 + \int_0^t A_\varepsilon(s, \xi_\varepsilon(s))\,ds + \zeta_\varepsilon(t), \tag{8}$$

где

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_0^t \sigma_\varepsilon(s,\xi_\varepsilon(s))\,dw_\varepsilon(s) + \int_0^t\int_{R^2} C_\varepsilon(s,\xi_\varepsilon(s),z)\,\tilde{\nu}_\varepsilon(ds,dz),$$

$$\xi_0 = (a_0, \theta_0).$$

Из условий на коэффициенты f_i, $i = \overline{1, d+1}$, следует, что $\zeta_\varepsilon(t)$ — векторный квадратично интегрируемый мартингал с матричной характеристикой

$$\langle \zeta_\varepsilon^{(i)}(t), \zeta_\varepsilon^{(j)}(t)\rangle = \sum_{k=1}^{d}\int_0^t \sigma_{ik}^{\varepsilon}(s, \xi_\varepsilon(s))\,\sigma_{jk}^{\varepsilon}(s, \xi_\varepsilon(s))\,ds +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_{R^2} C_\varepsilon^{(i)}(s, \xi_\varepsilon(s), z)\,C_\varepsilon^{(j)}(s, \xi_\varepsilon(s), z)\,\Pi(dz)\,ds; \qquad i, j = 1, 2.$$

Из оценки (7) и свойств стохастических интегралов следует

$$M\|\xi_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant C(\|\xi_0\|^2 + t^2 + t), \quad M\|\zeta_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant Ct,$$
$$M\|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)\| \leqslant C(|t-s| + |t-s|^{1/2}), \tag{9}$$
$$M\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\| \leqslant C|t-s|^{1/2}.$$

Используя неравенство Чебышева и оценки (9), получаем

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\sup_{t\leqslant t_0} P\{\|(\xi_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))\| > N\} = 0,$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\sup_{|t-s|\leqslant h} P\{\|(\xi_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t)) - (\xi_\varepsilon(s), \zeta_\varepsilon(s))\| > \delta\} = 0$$

для произвольного $\delta > 0$. Значит, случайный процесс $(\xi_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ удовлетворяет условию компактности А. В. Скорохода [5].

Так как нас интересует слабая сходимость процессов, то можем считать, что для любой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ существует такая подпоследовательность $\varepsilon_k = \varepsilon_{n_k} \to 0$, такие случайные процессы $\overline{\xi}(t) = (\overline{a}(t), \overline{\theta}(t))$, $\overline{\zeta}(t)$ (в общем случае зависящие от выбора последовательности ε_n), что $\xi_{\varepsilon_k}(t) \to \overline{\xi}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_k}(t) \to \overline{\zeta}(t)$ при $\varepsilon_k \to 0$ по вероятности при каждом t.

Воспользовавшись оценкой (7), получим

$$M\|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)\|^4 \leqslant C[|t-s|^4 + |t-s|^2 + \varepsilon^{1/2}|t-s|^{3/2} + \varepsilon|t-s|], \tag{10}$$
$$M\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4 \leqslant C[|t-s|^2 + \varepsilon^{1/2}|t-s|^{3/2} + \varepsilon|t-s|]$$

Из (7) и теоремы 1 [3] следует $M[\|\xi_\varepsilon(t)\|^8 + \|\zeta_\varepsilon(t)\|^8] \leqslant C < \infty$. Поэтому последовательности $\|\xi_{\varepsilon_k}(t) - \xi_{\varepsilon_k}(s)\|^4$ и $\|\zeta_{\varepsilon_k}(t) - \zeta_{\varepsilon_k}(s)\|^4$ равномерно интегрируемы, а так как $\xi_{\varepsilon_k}(t) \to \overline{\xi}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_k}(t) \to \overline{\zeta}(t)$ по вероятности при $\varepsilon_k \to 0$, то из (10) получим

$$M\|\overline{\xi}(t) - \overline{\xi}(s)\|^4 \leqslant C[|t-s|^4 + |t-s|^2],$$
$$M\|\overline{\zeta}(t) - \overline{\zeta}(s)\|^4 \leqslant C|t-s|^2.$$

Значит, процессы $\overline{\xi}(t)$ и $\overline{\zeta}(t)$ непрерывны. Далее

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t A_\varepsilon^{(i)}(s, a, \theta)\,ds = \overline{A}^{(i)}(a),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\Bigg[\sum_{k=1}^{d}\sigma_{ik}^{\varepsilon}(s, a, \theta)\,\sigma_{jk}^{\varepsilon}(s, a, \theta) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{R^2} C_\varepsilon^{(i)}(s, a, \theta, z)\,C_\varepsilon^{(j)}(s, a, \theta, z)\,\Pi(dz)\Bigg]ds = \tag{11}$$
$$= \frac{1}{2\pi b^2}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(a, \psi)\,B_{ij}(a, \psi)\,d\psi = \overline{B}_{ij}(a), \qquad i, j = 1, 2,$$

где $B_{ij}(a, \psi)$ — элементы матрицы $B(a, \psi)$.

Из непрерывности процессов $\bar{\xi}(t)$ и $\bar{\zeta}(t)$, леммы 2 [2] и соотношений (7), (8), (11) следует

$$\bar{\xi}(t) = \xi_0 + \int_0^t \bar{A}(\bar{a}(s))\,ds + \bar{\zeta}(t),$$

где $\bar{\zeta}(t)$ — непрерывный квадратично интегрируемый векторный мартингал с матричной характеристикой

$$\langle\bar{\zeta}, \bar{\zeta}\rangle(t) = \int_0^t \bar{B}(\bar{a}(s))\,ds.$$

Здесь $\bar{B}(a) = \{\bar{B}_{ij}(a),\ i, j = 1, 2\}$.

Из [6] следует, что существует винеровский процесс $\bar{w}(t) = (\bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t))$ такой, что

$$\bar{\zeta}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{a}(s))\,d\bar{w}(s),$$

где $\bar{\sigma}(a) = \bar{B}^{1/2}(a)$.

Значит, процесс $\bar{\xi}(t)$ удовлетворяет уравнению (6). Но уравнение (6) имеет единственное решение в условиях теоремы. Следовательно, процесс $\bar{\xi}(t)$ не зависит от выбора последовательности $\varepsilon_n \to 0$. Поэтому конечномерные распределения процесса $\xi_\varepsilon(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\bar{\xi}(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Процессы $\xi_\varepsilon(t)$ и $\bar{\xi}(t)$ — марковские процессы. Для слабой сходимости $\xi_\varepsilon(t) \to \bar{\xi}(t)$ при $\varepsilon \to 0$ достаточно [7] выполнения условия

$$\lim_{h\downarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{\substack{x\in R^2 \\ 0\le s-t\le h}} P\{\|\xi_\varepsilon(t, x, s) - x\| > \delta\} = 0 \tag{12}$$

для каждого $\delta > 0$, где $\xi_\varepsilon(t, x, s)$ — решение стохастического уравнения

$$\xi_\varepsilon(t, x, s) = x + \int_t^s A_\varepsilon(\tau, \xi_\varepsilon(t, x, \tau))\,d\tau + \int_t^s \sigma_\varepsilon(\tau, \xi_\varepsilon(t, x, \tau))\,dw_\varepsilon(\tau) +$$
$$+ \int_t^s \int_{R^2} C_\varepsilon(\tau, \xi_\varepsilon(t, x, \tau), z)\,\tilde{\nu}_\varepsilon(d\tau, dz).$$

Аналогично оценкам (9) получим

$$M\|\xi_\varepsilon(t, x, s) - x\| \le C(|s-t| + |s-t|^{1/2}), \tag{13}$$

где C — постоянная, независимая от t, s, x и ε. Из неравенства Чебышева и (13) следует (12). Теорема доказана.

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* О воздействии случайных сил на нелинейные колебательные системы // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1986.— Вып. 5.— С. 23—34.
2. *Борисенко О. В.* Нелинейные колебания с малыми случайными возмущениями // Асимптотические методы в задачах мат. физики: Сб. научн. тр.—Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 19—27.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наук. думка, 1968.— 354 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 252 с.
5. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов.— Киев : Киев. ун-т, 1961.— 216 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М.: Наука, 1975.— Т. 3.— 496 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1971.— Т. 1.— 664 с.

Получено 02.11.90