УДК 517.9

В. Г. Коломиец, А. И. Мельников, кандидаты физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Об интегральных многообразиях систем дифференциальных уравнений со случайной правой частью в банаховом пространстве

Вводится понятие интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений со случайной правой частью. Изучены вопрос существования интегрального многообразия одного класса дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и ряд его свойств.

Введено поняття інтегрального многовиду системи диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною. Вивчені питання існування інтегрального многовиду одного класу систем диференціальних рівнянь у банаховому просторі і ряд його властивостей.

В данной работе рассматриваются вопросы существования интегральных многообразий одного класса дифференциальных систем со случайной правой частью и изучены некоторые их свойства [1—4].

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$. Далее будем рассматривать только интегрируемые измеримые случайные величины и функции на этом пространстве. Символ **M** будет обозначать математическое ожидание. Рассмотрим систему

$$dz/dt = Z(t, z, \omega). \qquad (*)$$

Функция $Z(t, z, \omega)$ определена при $t \in R$, $z \in X$ — некоторое банахово пространство, $\omega \in \Omega$, непрерывна по t, z, при каждом ω и измерима по t, x, ω относительно σ-алгебры произведения σ-алгебр борелевских множеств на R, X и σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Обозначим через $z = z(t, \omega)$ решение уравнения (*). График этого решения в пространстве $R \times X \times \Omega$ назовем случайной интегральной кривой.

Определение. *Под случайным интегральным многообразием уравнения* (*) *будем понимать непустое множество в пространстве* $R \times X \times \Omega$, *составленное из случайных интегральных кривых этого уравнения.*

Рассмотрим вопрос о существовании случайного интегрального многообразия системы вида

$$dx/dt = F(t, x, y, \varepsilon, \omega), \qquad dy/dt = Ay + H(t, x, y, \varepsilon, \omega). \qquad (1)$$

Предположим, что правые части системы (1) удовлетворяют условиям:

1) $F(t, x, y, \varepsilon, \omega) : R \times X \times Y \times]0, \varepsilon^*] \times \Omega \to X$, $H(t, x, y, \varepsilon, \omega) : R \times X \times Y \times]0, \varepsilon^*] \times \Omega \to X$, — измеримые по Бохнеру, непрерывные по x, y, t при каждом ω функции, X, Y — банаховы пространства.

2) $A : X \to X$ — ограниченный оператор такой, что спектр $\sigma(A)$, распадается на два множества $\sigma_1(A)$ и $\sigma_2(A)$ таких, что $\operatorname{Re}\sigma_1(A) < 0$ $\operatorname{Re}\sigma_2(A) > 0$. Как известно, в данном случае существует функция Грина $G(t)$, задаваемая формулой

$$G(T) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_1} e^{\alpha t} R_\alpha d\alpha, & t < 0, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_2} e^{\alpha t} R_\alpha d\alpha, & t < 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где Γ_1, Γ_2 — контуры, охватывающие $\sigma_1(A)$ и $\sigma_2(A)$.

Функция $G(t)$ имеет ряд свойств:

$$dG(t)/dt = AG(t), \quad t \neq 0, \qquad (3)$$

$$G(+0) - G(-0) = P_1 + P_2 = I, \qquad (4)$$

где P_1 и P_2 — проекторы, соответствующие разложению пространства X на собственные подпространства $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ оператора A относительно спектральных множеств $\sigma_1(A)$ и $\sigma_2(A)$,

$$\| G(t) \| \leqslant N e^{-\alpha |t|}, \quad N > 0, \quad \alpha > 0. \qquad (5)$$

3) $\mathbf{M}\|F(t, x, 0, \varepsilon, \omega)\| \leqslant K(\varepsilon), \qquad \mathbf{M}\|H(t, x, 0, \varepsilon, \omega)\| \leqslant K(\varepsilon),$

где $x = x(\omega)$ — случайная интегрируемая величина со значениями в X, $K(\varepsilon)$ — некоторая неотрицательная функция ε, $K(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

$$4) \quad \mathbf{M}\|F(t, x_1, y_1, \varepsilon, \omega) - F(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma_0)\mathbf{M}(\|x_1 - x\| + \|y_1 - y\|), \tag{6}$$
$$\mathbf{M}\|H(t, x_1, y_1, \varepsilon, \omega) - H(t, x, y, \varepsilon, \omega)\| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda(\varepsilon, \sigma_0)\mathbf{M}(\|x_1 - x\| + \|y_1 - y\|), \tag{7}$$

где $t \in R$, $x_1 = x_1(\omega)$, $x = x(\omega)$, $y_1 = y_1(\omega)$, $y = y(\omega)$, причем $\mathbf{M}\|y_1(\omega)\| \leqslant \sigma_0$, $\mathbf{M}\|y(\omega)\| \leqslant \sigma_0 \leqslant \infty$, $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\lambda(\varepsilon, \sigma_0)$ — функция от ε и σ_0, и $\lambda(\varepsilon, \sigma_0) \to 0$ при $\varepsilon, \sigma_0 \to 0$.

Здесь и далее, где это необходимо, все условия будем считать выполняющимися почти наверное.

Покажем, что исходная система (1) обладает при некоторых условиях случайным интегральным многообразием.

Введем класс $L(D, \Delta)$ случайных функций $f(t, x, \omega): R \times X \times \Omega \to \to Y$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\mathbf{M}\|f(t, x, \omega)\| \leqslant D \leqslant \sigma_0, \tag{8}$$
$$\mathbf{M}\|f(t, x_1, \omega) - f(t, x, \omega)\| \leqslant \Delta\mathbf{M}\|x_1 - x\|, \tag{9}$$

где $x_1 = x_1(\omega)$, $x = x(\omega)$ — интегрируемые по Бохнеру случайные величины, со значениями в X, $Д > 0$, $\Delta > 0$.

Норму в $L(D, \Delta)$ определим равенством

$$\|f(t, x, \omega)\|_{L(D,\Delta)} = \sup_{t, x(\omega)} \mathbf{M}\|f(t, x, \omega)\|.$$

Случайное интегральное многообразие системы (1) будем искать в виде $y = \varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$, где $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$ — функция из класса $L(D, \Delta)$.

По аналогии с детерминированным случаем данный способ задания случайного интегрального многообразия называется явным.

Возьмем произвольную функцию $f(t, x, \omega)$ из $L(D, \Delta)$ и рассмотрим уравнение

$$dx/dt = F(t, x, f(t, x, \omega), \varepsilon, \omega). \tag{10}$$

Из (6) — (9) следует, что существует и единственное с вероятностью единица решение задачи Коши для уравнения (10) с начальными условиями $x_t = x_0(\omega)$ при $t = t_0$. Обозначим это решение $x_t = T^f_{z,t_0}(x_0, \omega)$, $z = t - t_0$.

Возьмем теперь две функции $f(t, x, \omega)$ и $f'(t, x, \omega)$ из класса $L(D, \Delta)$ и положим

$$x_t = T^f_{z,t_0}(x_0, \omega), \quad x'_t = T^{f'}_{z,t_0}(x', \omega), \quad z = t - t_0.$$

Тогда после ряда выкладок из (10), (7), (8) получим

$$\mathbf{M}\|T^f_{z,t_0}(x_0, \omega) - T^{f'}_{z,t_0}(x', \omega)\| = \mathbf{M}\|x_t - x'_t\| \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}\|x' - x_0\|\exp\{\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)|z|\} + \frac{\|f' - f\|_{L(D,\Delta)}}{1 + \Delta} \times$$
$$\times \{\exp(\lambda(\varepsilon, D)(1 + D)|z|) - 1\}, \quad z = t - t_0. \tag{11}$$

Теперь, используя функцию Грина (2), построим преобразование $S^\omega_{t,x}$, переводящее функцию $f(t, x, \omega)$ из класса $L(D, \Delta)$ в функцию

$$S^\omega_{t,x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - s) H(s, T^f_{s-t,t}(x, \omega), f(s, T^f_{s-t,t}(x, \omega), \omega), \varepsilon, \omega)\, ds. \tag{12}$$

Ранее D и Δ были произвольными, теперь выберем их зависящими от ε: $D = D(\varepsilon)$ и $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ таким образом, чтобы $D(\varepsilon) \to 0$, $\Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to \to 0$, и найдем $\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon^*$ такое, что при любом $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполняются неравенства

$$\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta) \leqslant \alpha/2, \qquad 4N\lambda(\varepsilon, D)(1 + \Delta)\alpha^{-1} \leqslant 1/2, \tag{13}$$

$$4N\lambda(\varepsilon, D)(1+\Delta)\alpha^{-1} \leqslant \Delta, \qquad 2N\{K(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon, D) D\}\alpha^{-1} \leqslant D.$$

Возможность выбора D и Δ как функций от ε обеспечивается свойствами функций $K(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon, D)$. Тогда из (5)—(9), (11)—(13) получим

$$\mathbf{M} \| S^{\omega}_{t, x_0}(f) \| \leqslant D(\varepsilon), \tag{14}$$

$$\mathbf{M} \| S^{\omega}_{t, x'}(t') - S^{\omega}_{t, x_0}(f) \| \leqslant \frac{1}{2} \| f' - f \|_{L(D, \Delta)} + \Delta(\varepsilon) \mathbf{M} \| x' - x_0 \|. \tag{15}$$

Из (15) при $x' = x_0$ будем иметь

$$\mathbf{M} \| S^{\omega}_{t, x'}(f') - S^{\omega}_{t, x_0}(f) \| \leqslant \frac{1}{2} \| f' - f \|_{L(D, \Delta)}, \tag{16}$$

а при $f' = f$

$$\mathbf{M} \| S^{\omega}_{t, x'}(f') - S^{\omega}_{t, x_0}(f) \| \leqslant \Delta(\varepsilon) \mathbf{M} \| x' - x_0 \|. \tag{17}$$

Из (14), (16) и (17) следует, что оператор $S^{\omega}_{t,x}$ переводит $L(D, \Delta)$ в $L(D, \Delta)$ и является оператором сжатия. В силу того, что $L(D, \Delta)$ — компактное множество в рассматриваемой норме, уравнение

$$f = S^{\omega}_{t, x}(f) \tag{18}$$

имеет в $L(Д, \Delta)$ единственное решение. Обозначим его

$$f = \varphi(t, x, \varepsilon, \omega). \tag{19}$$

Данная функция определяет случайное интегральное многообразие системы Действительно, по определению оператора $T^{\varphi}_{t-t_0, t_0}$ функция $x_t = T^{\varphi}_{t-t_0, t_0}(x, \omega)$ удовлетворяет первому уравнению системы (1). Переписав (18) в развернутом виде, подставив в него $T^{\varphi}_{t-t_0, t_0}(x, \omega)$ вместо x и использовав свойства функции Грина (3)—(5), после ряда выкладок несложно получить, что функция

$$y_t = \varphi(t, T^{\varphi}_{t-t_0, t_0}(x, \omega), \varepsilon, \omega)$$

удовлетворяет второму уравнению системы (1). Из этих рассуждений следует, что функция (19) действительно определяет случайное интегральное многообразие. Заметим также, что если пространство X таково, что правые части системы (1) могут быть периодичными по x, то таким же свойством будет обладать и функция $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$.

На случайном интегральном многообразии исходная система (1) сводится к уравнению $dx/dt = F_1(t, x, \varepsilon, \omega)$, где $F_1(t, x, \varepsilon, \omega) = F(t, x, \varphi(t, x, \varepsilon, \omega), \varepsilon, \omega)$.

Нетрудно доказать, что функция $F_1(t, x, \varepsilon, \omega)$ обладает следующими свойствами:

$$\mathbf{M} \| F_1(t, x, \varepsilon, \omega) \| \leqslant \delta^*(\varepsilon),$$

$$\mathbf{M} \| F_1(t, x', \varepsilon, \omega) - F_1(t, x, \varepsilon, \omega) \| \leqslant \eta^*(\varepsilon) \mathbf{M} \| x - x' \|,$$

где $\delta^*(\varepsilon)$ и $\eta^*(\varepsilon)$ — некоторые функции ε, стремящиеся к нулю вместе с ε, $x = x(\omega)$, $x' = x'(\omega)$.

Перейдем теперь к исследованию свойств случайного интегрального многообразия. Предположим, что функции F и H, стоящие в правой части системы (1), таковы, что из произвольной последовательности действительных чисел $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\tau_{m_k}\}_{m_k=1}^{\infty}$ такую, что для любого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$

$$\mathbf{M} \| F(t + \tau_{m_k}, x, y, \varepsilon, \omega) - F(t, x, y, \varepsilon, \omega) \| \to 0,$$

$$\mathbf{M} \| H(t + \tau_{m_k}, x, y, \varepsilon, \omega) - H(t, x, y, \varepsilon, \omega) \| \to 0, \quad k \to \infty$$

равномерно по t, $x = x(\omega)$, $y = y(\omega)$, $\mathbf{M}\|y(\omega)\| \leqslant \sigma_0$. Далее это свойство будем называть почти периодичностью по t. После ряда выкладок можно показать, что в рассматриваемом случае данным свойством будет обладать и функция $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$, определяющая случайное интегральное многообразие.

Следующим важным вопросом является вопрос о притяжении случайным интегральным многообразием траекторий, описывающих поведение решений системы (1). Для этого рассмотрим интегро-дифференциальную систему

$$dx_t/dt = F(t, x_t, y_t, \varepsilon, \omega), \quad x_t|_{t=t_0} = x,$$

$$y_t = \int_{t_0}^{\infty} G(t-\tau) H(\tau, x_\tau, y_\tau, \varepsilon, \omega)\, d\tau + G(t-t_0)\, y, \tag{20}$$

$$y = y(\omega), \quad \mathbf{M}\,|\,y\,| \leqslant \sigma, \quad t > t_0.$$

Используя свойства функции Грина $G(t)$, а также свойства функций $F(t, x, y, \varepsilon, \omega)$ и $H(t, x, y, \varepsilon, \omega)$, несложно показать, что существуют такие ε_1 и σ, причем $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon^*$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $\mathbf{M}\|y(\omega)\| \leqslant \sigma$ система (20) обладает и единственным с вероятностью единица решением (x_t, y_t), причем y_t такова, что $\mathbf{M}\,\|y_t\| \leqslant D(\varepsilon) \leqslant \sigma_0$ при $t \geqslant t_0$. Для этой функции справедливо представление

$$y_t = \psi(x_0, t, x_t, y, \varepsilon, \omega), \tag{21}$$

и выполняется неравенство

$$\mathbf{M}\,\|\,\psi(x_0, t, x', y', \varepsilon, \omega) - \psi(x_0, t, x'', y'', \varepsilon, \omega)\,\| \leqslant$$

$$\leqslant \nu'(\varepsilon, \sigma_0)\,\mathbf{M}\,\|\,x' - x''\,\| + \mu(\varepsilon, \sigma_0) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)\right)\mathbf{M}\,\|\,y' - y''\,\|, \tag{22}$$

где $t \geqslant t_0$, $x' = x'(\omega)$, $x'' = x''(\omega)$, $y' = y'(\omega)$, $y'' = y''(\omega)$, $\mathbf{M}\,\|\,y'(\omega)\| \leqslant \sigma_0$, $\mathbf{M}\|y''(\omega)\| \leqslant \sigma_0$, а $\nu'(\varepsilon, \sigma_0)$ и $\mu(\varepsilon, \sigma_0)$ — неотрицательные функции ε, σ_0, стремящиеся к 0 и N при ε, $\sigma_0 \to 0$. Несложно видеть, что любое решение системы (21) есть решение исходной системы (1). С другой стороны, пусть (x_t, y_t) — произвольное решение системы (1) такое, что $\mathbf{M}\,\|y_{t_0}\| \leqslant \sigma$ и $\mathbf{M}\|y_t\| \leqslant \sigma_0$ при $t \geqslant t_0$. Назовем такое решение решением типа S. Можно показать, что это решение при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет интегро-дифференциальной системе (20) и, следовательно, для него справедливо представление (21) с $y = y_{t_0}(\omega)$.

Все решения (1), лежащие на случайном интегральном многообразии $y = \varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$, в силу (8) при достаточно малых ε принадлежат классу S. Следовательно, для любого из них можно указать соответствующее значение y' в представлении (21). Тогда из (22) следует неравенство

$$\mathbf{M}\,\|\,\varphi(t, x, \varepsilon, \omega) - \psi(x_0, t, x, y, \varepsilon, \omega)\,\| \leqslant \mu(\varepsilon, \sigma_0) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)\right)\mathbf{M}\,\|\,y' - y\,\|, \quad t \geqslant t_0.$$

Заменив здесь x на x_t, будем иметь

$$\mathbf{M}\,\|\,\varphi(t, x_t, \varepsilon, \omega) - y_t\,\| \leqslant \mu(\varepsilon, \sigma_0) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)\right)\mathbf{M}\,\|\,\varphi(t, x_{t_0}, \varepsilon, \omega) - y_{t_0}\,\|. \tag{23}$$

Рассмотрим множество случайных точек $y(\omega)$ таких, что

$$y = \varphi(x_0, t_0, x_{t_0}, y', \varepsilon, \omega) \quad \mathbf{M}\,\|\,y'(\omega)\,\| \leqslant \sigma_0,$$

соответствующее фиксированным t_0, $x_{t_0} = x_{t_0}(\omega)$ и ε. Обозначим это множество $\mathfrak{M}(t_0, x_{t_0}, \varepsilon, \omega)$.

Для произвольного решения типа S справедливо (21). Положив в (21) $t = t_0$, видим, что $y(t_0, \omega)$ должно принадлежать $\mathfrak{M}(t_0, x_{t_0}, \varepsilon, \omega)$. Отсюда также следует, что если при $t = t_0$ $\mathbf{M}\,\|\,y_t\,\| \leqslant \sigma$ и $y_t \notin \mathfrak{M}(t, x_t, \varepsilon, \omega)$, то соответствующее этим начальным условиям решение не может быть решением типа S, так что y_t не может при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворять условию $\mathbf{M}\|\,y_t\,\| \leqslant \sigma_0$. В силу соответствия между решениями исходной системы и системы (20) можно заключить, что если для некоторого решения исходной системы при некотором $t = t_0$ выполняется соотношение $y_t \in \mathfrak{M}(t, x_t, \varepsilon, \omega)$, то это решение является решением типа S, и, следовательно, для него справедливо неравенство (23).

Исследуем вопрос о размерности многообразия $\mathfrak{M}(t_0, x_{t_0}, \varepsilon, \omega)$. Из (20) видно, что размерность этого многообразия совпадает с размерностью пространства $\mathfrak{B}_1$. Причем данное многообразие совпадает с множеством $\{y(\omega) : \mathbf{M}\|y(\omega)\| \leqslant \sigma\}$ в случае, когда весь спектр оператора A расположен в левой полуплоскости.

Полученные выше результаты сформулируем в виде утверждения.

Теорема. *Пусть правые части системы* (1) *удовлетворяют условиям* 1, 2. *Тогда можно указать такие положительные постоянные* $\varepsilon_1, \sigma, \sigma_0, \alpha, C$, *причем* $\sigma \leqslant \sigma_0$, *что система* (1) *имеет и единственное с вероятностью единица случайное интегральное многообразие* $S_t(\omega)$.

Данное случайное интегральное многообразие при любом ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, обладает следующими свойствами:

1) $S_t(\omega)$ допускает параметрическое представление вида

$$y = \varphi(t, x, \varepsilon, \omega),$$

где $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$ — случайная функция, определенная при всех t, x, измеримая по совокупности аргументов. В случае, когда пространство X таково, что функции, стоящие в правой части системы (1), могут быть периодичны по x, то таким же свойством будет обладать и функция $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$. При этом можно найти такие положительные функции $D(\varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$, стремящиеся к нулю вместе с ε, что

$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)\| \leqslant D(\varepsilon),$$

$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x_1, \varepsilon, \omega) - \varphi(t, x, \varepsilon, \omega)\| \leqslant \Delta(\varepsilon)\,\mathbf{M}\|x_1 - x\|$$

при любых $t \in R$ и интегрируемых случайных величинах $x = x(\omega)$ и $x_1 = x_1(\omega)$ со значениями в X.

2) На случайном интегральном многообразии исходная система (1) сводится к уравнению

$$dx/dt = F_1(t, x, \varepsilon, \omega),$$

где $F_1(t, x, \varepsilon, \omega) = F(t, x, \varphi(t, x, \varepsilon, \omega), \varepsilon, \omega)$.

3) Если функции $F(t, x, y, \varepsilon, \omega)$ и $H(t, x, y, \varepsilon, \omega)$, стоящие в правых частях системы (1), являются почти периодическими по t в среднем, то этим же свойством будет обладать и функция $\varphi(t, x, \varepsilon, \omega)$.

4) Для любых t_0, $x_0 = x_0(\omega)$ существует многообразие случайных точек $y_0(\omega) - \mathfrak{M}(t_0, x_0, \varepsilon, \omega)$, $\mathbf{M}\|y_0(\omega)\| \leqslant \sigma$, такое, что если $x_t = x(t, \omega)$, $y_t = y(\omega)$ представляет произвольное решение системы (1) такое, что при некотором $t = t_0$ выполняется неравенство $\mathbf{M}\|y_t\| \leqslant \sigma$, то из условия

$$y_{t_0} \in \mathfrak{M}(t_0, x_{t_0}, \varepsilon, \omega)$$

следует, что для любого $t > t_0$

$$\mathbf{M}\|\varphi(t, x_t, \varepsilon, \omega) - y_t\| \leqslant \mu(\varepsilon, \sigma_0)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)\right)\mathbf{M}\|\varphi(t, x_{t_0}, \varepsilon, \omega) - y_{t_0}\|.$$

Если же $y_{t_0} \notin \mathfrak{M}(t_0, x_{t_0}, \varepsilon, \omega)$, то для некоторого $t^* > t_0$ $\mathbf{M}\|y_{t^*}\| > \sigma_0$.

Размерность многообразия $\mathfrak{M}(t_0, x_0, \varepsilon, \omega)$ совпадает с размерностью подпространства $\mathfrak{B}_1$, причем в случае, когда весь спектр оператора A расположен в левой полуплоскости, многообразие $\mathfrak{M}(t_0, x_0, \varepsilon, \omega)$ совпадает с множеством $\{y(\omega) : \mathbf{M}\|y(\omega)\| \leqslant \sigma\}$.

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Львов: Изд-во АН УССР, 1945.— 140 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 501 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. Т. 1. Аналит. методы.— Киев : Изд-во АН УССР, 1970.— С. 375—379.
5. *Мельников А. И.* О случайных интегральных многообразиях систем дифференциальных уравнений со случайными параметрами // К исследованию некоторых нелинейных дифференциальных систем со случайными параметрами.— Киев, 1988.— С. 18—34.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 88.19).

Получено 27.05.91