УДК 517.9

А. К. Лопатин, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Некоторые аспекты теоретико-группового подхода в задачах нелинейной механики

Рассматриваются два аспекта применения метода асимптотической декомпозиции к исследованию нелинейных систем. Первый — расширение класса функций, по которым проводится асимптотическое разложение за счет применения специальных функций математической физики. Второй — распространение метода асимптотической декомпозиции на новый класс дифференциальных систем — пфаффовы системы в инволюции.

Розглянуто два аспекти застосування методу асимптотичної декомпозиції до нелінійних систем. Перший — розширення класу функцій, за якими проводиться асимптотичний розклад за рахунок застосування спеціальних функцій математичної фізики. Другий — поширення методу асимптотичної декомпозиції на новий клас диференціальних систем — пфаффові системи у інволюції.

Изучение нелинейных эффектов в системах дифференциальных уравнений требует разработки адекватного математического инструмента. Среди многочисленных обобщений классического подхода, связанного с работами Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [1—3], выделим направление, использующее аппарат теории непрерывных групп преобразований [4]. В настоящей статье остановимся на двух аспектах, возникающих при использовании этого подхода.

Первый— расширение класса функций, по которым проводится асимптотическое разложение решения за счет применения специальных функций математической физики. Нелинейные эффекты, вызываемые взаимодействием различных гармонических составляющих, описываются более полно по сравнению с существующими подходами. Интересен также тот факт, что нулевое приближение может быть существенно нелинейным.

Второй — распространение метода асимптотической декомпозиции на новый класс дифференциальных систем — пфаффовы системы в инволюции. Принципиальным моментом здесь является получение техники быстрых и медленных переменных, характерных для метода усреднения.

1. Алгоритм асимптотической декомпозиции в пространстве представлений конечномерной группы Ли. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \tag{1}$$

где $\tilde{\omega}(x') = \mathrm{colon}\,\|\tilde{\omega}_1(x'), \ldots, \tilde{\omega}_n(x')\|$, $\tilde{\omega}_i(x') \in \mathfrak{D}(G)$, $i = \overline{1, n}$, ε—малый положительный параметр, нулевое приближение которой порождает конечномерную группу Ли с алгеброй $\mathfrak{B}_h$.

В работе [5] показано, что в этом случае возможно построение асимптотического решения системы (1) по специальным функциям. При этом используются обозначения, принятые в цитируемых работах.

Проиллюстрируем получение такого решения на конкретном примере.

Пример 1. Уравнения динамических маневров спутника при движении на сфере в сферической системе координат имеет вид [6, с. 616]

$$d\varphi/dv = -1 + \omega\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta - \varepsilon b r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi,$$

$$d\theta/dv = \omega\sin\varphi - \varepsilon b r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$dr/dv = 0,$$

где $\omega = \mathrm{const}$ — управляющее ускорение; составляющие при ε учитывают нецентральность поля притяжения Земли.

Дифференциальные операторы

$$U_1 = \cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\,\frac{1}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad U_3 = -\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

входящие в качестве составляющих в оператор

$$U = -\frac{\partial}{\partial\varphi} + \omega\left(\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta \ \frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

ассоциированный с системой нулевого приближения, и оператор

$$U_2 = [U_3, U_1] = \sin\varphi \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta},$$

порождают алгебру группы вращения сферы SO (3). Следовательно, в качестве пространства $\mathfrak{M}$ следует рассмотреть пространство основных сферических функций.

Базисные операторы L_1, L_2, L_3, удовлетворяющие соотношениям $L_j y_i = \delta^i_j$, $i, j = \overline{1,3}$, где $y_1 = -r\,\frac{\sqrt{6\pi}}{4\pi} e^{i\varphi}\sin\theta$, $y_2 = r\,\frac{\sqrt{3\pi}}{4\pi}\cos\theta$, $y_3 = r\,\frac{\sqrt{6\pi}}{4\pi} e^{-i\varphi}\cos\theta$, имеют вид

$$L_1 = -\frac{\sqrt{6\pi}}{3} e^{-i\varphi}\left[-\frac{i}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right],$$

$$L_3 = \frac{\sqrt{6\pi}}{3} e^{i\varphi}\left[\frac{i}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right],$$

$$L_2 = \frac{\sqrt{12\pi}}{3}\left[-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right].$$

Разложения операторов U, $\tilde{U}$ по базисному записываются следующим образом:

$$U = \| y_1, y_2, y_3 \| A \| L_1, L_2, L_3 \|^T,$$

где

$$A = \left\| \begin{matrix} -i & -i\frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 \\ -i\frac{\sqrt{2}}{2}\omega & 0 & -i\frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 & -i\frac{\sqrt{2}}{2}\omega & i \end{matrix} \right\|$$

и соответственно

$$\tilde{U} = \alpha_1(L_1 + L_3) + \alpha_2 L_2,$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{\sqrt{6\pi}}{4\pi} br^3 i \sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi,$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{3\pi}}{2\pi} br^3 \sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Далее, раскладывая коэффициенты α_1, α_2, α_3 по сферическим функциям из $\mathfrak{M}$, получаем (всюду в дальнейшем для уменьшения объема записей ограничимся сферическими гармониками до $l = 3$ включительно)

$$\tilde{U} = f^{(1)} B_{11} L + f^{(2)} B_{12} L + f^{(3)} B_{13} L,$$

где

$$L = \operatorname{colon} \| L_1, L_2, L_3 \|,$$

$$B_{11} = -\frac{1}{10} br^3 i \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\|, \quad B_{12} \equiv 0,$$

$$B_{13} = \frac{\sqrt{14}}{32}\, br^3 i \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$f^{(1)} = \left\| -\frac{\sqrt{6\pi}}{4\pi} e^{i\varphi} \sin\theta,\ \frac{\sqrt{3\pi}}{2\pi}\cos\theta,\ \frac{\sqrt{6\pi}}{4\pi} e^{-i\varphi}\sin\theta \right\|,$$

$$f^{(3)} = \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{3\varphi i}\left(-\frac{\sqrt{70}}{8}\sin^3\theta\right),\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\varphi i}\left(+\frac{\sqrt{105}}{4}\cos\theta\sin^2\theta\right),\right.$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\varphi i}\left(-\frac{\sqrt{42}}{8}\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\right),\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\sin^2\theta\cos\theta \times\right.$$
$$\left.\times (5\cos^2\theta - 3)\right),\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varphi i}\left(\frac{\sqrt{42}}{8}\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\right),$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\varphi i}\left(\frac{\sqrt{105}}{4}\sin^2\theta\cos\theta\right),\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-3\varphi i}\left(\frac{\sqrt{70}}{8}\sin^3\theta\right)\right\|.$$

Найдем централизованную систему в первом приближении. Для упрощения выкладок примем $\omega \equiv 1$. Рассмотрим операторное уравнение

$$[U, S_1] = \widetilde{U}. \tag{2}$$

Оператор S_1 в соответствии со структурой правой части (2) ищем в виде

$$S_1 = f^{(1)}\Gamma_{11}L + f^{(3)}\Gamma_{13}L,$$

где Γ_{11}, Γ_{13} $(\Gamma_{13} \in R^{(3,3)}\Gamma_{13} \in R^{(7,3)})$ — неизвестные постоянные матрицы.

Матрицы представления оператора U в подпространствах $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_3$ имеют вид

$$F_1 = A,$$

$$F_3 = \begin{Vmatrix} 3i & \frac{\sqrt{6}}{2}i & & & & & \\ \frac{-\sqrt{6}}{2}i & -2i & \frac{-\sqrt{10}}{2}i & & & & \\ & \frac{-\sqrt{10}}{2}i & -i & -\sqrt{3}i & & & \\ & & -\sqrt{3}i & 0 & -\sqrt{3}i & & \\ & & & -\sqrt{3}i & i & \frac{-\sqrt{10}}{2}i & \\ & & & & \frac{-\sqrt{10}}{2}i & 2i & \frac{-\sqrt{6}}{2}i \\ & & & & & \frac{-\sqrt{6}}{2}i & 3i \end{Vmatrix}.$$

Операторное уравнение (2) сводится к решению систем алгебраических уравнений

$$F_1\Gamma_{11} - \Gamma_{11}A = B_{11},$$
$$F_3\Gamma_{13} - \Gamma_{13}A = B_{13}.$$

В соответствии с описанной методикой находим

$$\mathrm{pr}(B_{11}) = -\frac{1}{10} br^3 i \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix},$$

$$\mathrm{pr}(B_{13}) = -br^3 i \begin{Vmatrix} 0,048934 & 0,034428 & -0,000189 \\ -0,060032 & -0,056187 & 0,020494 \\ -0,025064 & 0,026722 & -0,063866 \\ 0,065711 & -0,000442 & 0,065947 \\ 0,062822 & 0,027026 & 0,025612 \\ 0,019568 & 0,057126 & -0,060155 \\ 0,000189 & 0,034962 & -0,049198 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, матрицы Γ_{11}, Γ_{13} находятся из систем уравнений

$$F_1\Gamma_{11} - \Gamma_{11}A = B_{11} - \mathrm{pr}(B_{11}),$$
$$F_3\Gamma_{13} - \Gamma_{13}A = B_{13} - \mathrm{pr}(B_{13}),$$

а операторы N_{11}, N_{13} — по формулам

$$N_{11} = f^{(1)}\,\mathrm{pr}(B_{11})\,L,$$
$$N_{13} = f^{(3)}\,\mathrm{pr}(B_{13})\,L.$$

Централизованная система в первом приближении (с учетом гармоник до $l = 3$ включительно) имеет вид

$$d\varphi/dv = -1 + \cos\varphi\operatorname{ctg}\theta - \varepsilon br^2\Big\{-\frac{1}{20}(\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta - 1) +$$
$$+ (0,059253\cos\theta\sin\theta)\cos^3\varphi + [0,059253\,(5\cos^2\theta - 1) -$$
$$- 0,058525\sin^2\theta]\cos 2\varphi + [0,071097\sin\theta\cos\theta\,(5\cos^2\theta - 3) -$$
$$- 0,17758\cos\theta\sin\theta]\cos\varphi + 0,002371\,(5\cos^2\theta - 1)\Big\},$$

$$d\theta/dv = \sin\varphi - \varepsilon br^2\Big\{-\frac{1}{20}\sin\varphi + 0,059253\sin^2\theta\sin 3\varphi +$$
$$+ [0,08294\cos\theta\sin^3\theta + 0,05992\sin\theta\cos\theta\,(5\cos^2\theta - 1)]\sin 2\varphi +$$
$$+ [0,17776\cos^2\theta\sin^2\theta + 0,071104\sin^2\theta\cos^2\theta\,(5\cos^2\theta - 3) +$$
$$+ 0,03555\sin^2\theta\,(5\cos^2\theta - 1)]\sin\varphi\Big\},$$

$$dr/dv = -\varepsilon b r^3 \{[0{,}059254 \sin^4\theta + 0{,}05992 \sin^2\theta (5\cos^2\theta - 1) - 0{,}023701 \times$$
$$\times (\sin^2\theta \cos^2\theta)] \sin 2\varphi + [0{,}17776 \cos\theta \sin^3\theta + 0{,}071104 \sin^2\theta \cos\theta \times$$
$$\times (5\cos^2\theta - 3) - 0{,}03555 \sin\theta \cos\theta (5\cos^2\theta - 1)] \sin\varphi\}.$$

2. Асимптотическая декомпозиция пфаффовых систем в инволюции с малым параметром. В работе [7] проведено обоснование метода асимптотической декомпозиции для вполне интегрируемых пфаффовых систем. Распространим этот результат на пфаффовы системы в инволюции. Рассмотрим пфаффову систему

$$\begin{aligned} dx_1 &= \omega_1^{(1)}(t, x, u)\, dt_1 + \ldots + \omega_1^{(m)}(t, x, u)\, dt_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_n &= \omega_n^{(1)}(t, x, u)\, dt_1 + \ldots + \omega_n^{(m)}(t, x, u)\, dt_m, \end{aligned} \tag{3}$$

где $x = \| x_1, \ldots, x_n \|$ — вектор зависимых переменных, $t = \| t_1, \ldots, t_m \|$ — вектор независимых переменных, $u = \| u_1, \ldots, u_n \|$ — вектор параметрических переменных, коэффициенты $\omega_i^{(j)}(t, x, u)$ — вещественно-аналитические функции по всем аргументам в области $G = R^m \times R^n \times R^h$.

Предположим, что система (3) находится в инволюции и, следовательно, имеет интегральное многообразие $\mathfrak{M}_m$, задаваемое системой аналитических функций

$$x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m), \quad u_j = \psi_j(t_1, \ldots, t_m), \quad t = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, h},$$

произвол выбора которого определяется последовательностью характеров

$$s_0, \ s_1, \ s_2, \ldots, s_m. \tag{4}$$

Предположим, что пфаффова система в инволюции (3) подвергнута малым возмущениям. Вводя новые переменные

$$x' = \mathrm{colon} \| x'_1, \ldots, x'_n \|, \quad u' = \mathrm{colon} \| u'_1, \ldots, u'_h \|,$$

запишем ее в виде автономной системы

$$\begin{aligned} dx'_1 &= (\omega_1^{(1)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_1^{(1)'})\, d\bar{t}_1 + \ldots + (\omega_1^{(m)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_1^{(m)'})\, d\bar{t}_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx'_n &= (\omega_n^{(1)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_n^{(1)'})\, d\bar{t}_1 + \ldots + (\omega_n^{(m)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_n^{(m)'})\, d\bar{t}_m, \\ dt_1 &= d\bar{t}_1, \ldots, dt_m = d\bar{t}_m. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь функции возмущения $\tilde{\omega}_i^{(j)'}(t, x', u')$ — вещественно-аналитические по всем аргументам в области $G = R^m \times R^n \times R^h$.

Нахождение интегрального многообразия системы (5) в инволюции сводится к интегрированию расширенной пфаффовой системы

$$\begin{aligned} dx'_1 &= (\omega_1^{(1)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_1^{(1)'})\, d\bar{t}_1 + \ldots + (\omega_1^{(m)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_1^{(m)'})\, d\bar{t}_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx'_n &= (\omega_n^{(1)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_n^{(1)'})\, d\bar{t}'_1 + \ldots + (\omega_n^{(m)'} + \varepsilon \tilde{\omega}_n^{(m)'})\, d\bar{t}_m, \\ du'_1 &= \frac{\partial u'_1}{\partial t_1}\, d\bar{t}_1 + \ldots + \frac{\partial u'_1}{\partial t_m}\, d\bar{t}_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du'_h &= \frac{\partial u'_h}{\partial t_1}\, d\bar{t}_1 + \ldots + \frac{\partial u'_h}{\partial t_m}\, d\bar{t}_m, \\ dt_1 &= d\bar{t}_1, \ldots, dt_m = d\bar{t}_m, \end{aligned} \tag{6}$$

где на параметрические производные налагаются дополнительные связи из условий интегрируемости системы (5)

$$\frac{\partial(\omega_\alpha^{(p)'} + \varepsilon\omega_\alpha^{(p)'})}{\partial t_i} = \frac{\partial(\omega_\alpha^{(i)'} + \varepsilon\omega_\alpha^{(i)'})}{\partial t_p}, \quad i, p = \overline{1, m}, \quad \alpha = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Запишем операторы, ассоциированные с системой (6), в виде

$$\hat{U}'_{01} = \hat{U}'_1 + \varepsilon\tilde{U}'_1, \ldots, \hat{U}'_{0m} = \hat{U}'_m + \varepsilon\tilde{U}'_m, \tag{8}$$

где

$$\hat{U}'_1 = U'_1 + U'^*_1, \ldots, \hat{U}'_m = U'_m + U'^*_m, \tag{9}$$

$$U'_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \omega_1^{(j)'}\frac{\partial}{\partial x'_1} + \ldots + \omega_n^{(j)'}\frac{\partial}{\partial x'_n},$$

$$\tilde{U}'_j = \tilde{\omega}_1^{(j)'}\frac{\partial}{\partial x'_1} + \ldots + \tilde{\omega}_n^{(j)'}\frac{\partial}{\partial x'_n},$$

$$U'^*_j = \frac{\partial u'_1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u'_1} + \ldots + \frac{\partial u'_h}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u'_h}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Очевидно, операторы (8) являются расширенными операторами возмущенной системы (5), а операторы (9) — расширенные операторы системы нулевого приближения, получаемой из возмущенной системы при $\varepsilon = 0$.

Легко видеть, что условия интегрируемости (7) эквивалентны коммутативности расширенных операторов возмущенной системы

$$[\hat{U}'_{0j}, \hat{U}'_{0i}] \equiv [\hat{U}'_j + \varepsilon\tilde{U}'_j, \hat{U}'_i + \varepsilon\tilde{U}'_i] \equiv 0, \quad i, j = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Будем предполагать, что система нулевого приближения возмущенной системы (5) находится в инволюции и структура ее интегрального многообразия определяется рядом характеров (4).

Сделаем теперь необходимые предположения об ограничениях на возмущающие функции. Для этого используем условия интегрируемости (10):

$$[\hat{U}'_j, \hat{U}'_i] + \varepsilon\{[\tilde{U}'_j, \hat{U}'_i] + [\hat{U}'_j, \tilde{U}'_i]\} + \varepsilon^2[\tilde{U}'_j, \tilde{U}'_i] \equiv 0.$$

При $\varepsilon = 0$ тождество превращается в условие интегрируемости системы нулевого приближения

$$[\hat{U}'_j, \hat{U}'_i] = 0. \tag{11}$$

Эти условия приводят к ограничениям на параметрические производные.

Предположим, что возмущенная система (5) также находится в инволюции в силу условий интегрируемости (11) системы нулевого приближения. Из этого предположения следуют условия

$$[\tilde{U}'_j, \hat{U}'_i] + [\hat{U}'_j, \tilde{U}'_i] \equiv 0, \quad [\tilde{U}'_j, \tilde{U}'_i] \equiv 0.$$

Таким образом, задача исследования возмущенной пфаффовой системы в инволюции (5) сводится к исследованию вполне интегрируемой возмущенной системы уравнений

$$(\hat{U}'_1 + \varepsilon\tilde{U}'_1)f = 0, \ldots, (\hat{U}'_m + \varepsilon\tilde{U}'_m)f = 0,$$

нулевое приближение которой также вполне интегрируемо.

Данная задача подробно изучена в [7] и полученные там результаты переносятся на пфаффовы системы вида (5). Поясним это на конкретном примере.

П р и м е р 2. Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2, \tag{12}$$

подвергнутое малым возмущениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \tilde{f}\left[t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right]. \tag{13}$$

Пусть интегральное многообразие уравнения (12) задается функцией

$$u = \varphi(x, t), \tag{14}$$

полученной в результате решения некоторой начальной или краевой задачи. Исследуем поведение интегрального многообразия (14) под воздействием нелинейных возмущений в правой части (12). С этой целью по методу асимптотической декомпозиции найдем решение уравнения (13) в виде

$$u = \varphi(x, t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \varphi_{\nu}(x, t),$$

где $\varphi_\nu (x_0, t_0) \equiv 0$.

Вводя новые переменные

$$z_1 = u, \quad y_1 = x, \quad y_2 = t, \quad z_2 = \partial z_1/\partial y_1 = \partial u/\partial x,$$

$$z_3 = \partial z_1/\partial y_2 = \partial u/\partial t, \quad u_1 = \partial z_2/\partial y_1 = \partial^2 u/\partial x^2, \quad u_2 = \partial z_2/\partial y_2 = \partial^2 u/\partial x \partial t.$$

запишем уравнение (13) в виде эквивалентной системы уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} \partial z_2/\partial y_1 = u_1, \quad \partial z_2/\partial y_2 = u_2, \\ \partial z_1/\partial y_1 = z_2, \quad \partial z_1/\partial y_2 = z_3, \\ \partial z_3/\partial y_1 = u_2, \quad \partial z_3/\partial y_2 = u_1 + \varepsilon \tilde{f}(y, z, u). \end{gathered} \tag{15}$$

Уравнения (15) можно заменить пфаффовой системой

$$\begin{aligned} dz_1 &= z_2 dy_1 + z_3 dy_2, \\ dz_2 &= u_1 dy_1 + u_2 dy_2, \\ dz_3 &= u_2 dy_1 + (u_1 + \varepsilon f) dy_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Наряду с возмущенной системой (16) будем рассматривать систему нулевого приближения

$$\begin{aligned} dz_1 &= z_2 dy_1 + z_3 dy_2, \\ dz_2 &= u_1 dy_1 + u_2 dy_2, \\ dz_3 &= u_2 dy_1 + u_1 dy_2, \end{aligned} \tag{17}$$

Выясним ограничения, налагаемые на производные от параметрических переменных условиями интегрируемости системы (17). Перепишем уравнения (17) в виде системы уравнений в частных производных

$$\begin{gathered} \partial z_1/\partial y_1 = z_2, \quad \partial z_1/\partial y_2 = z_3, \\ \partial z_2/\partial y_1 = u_1, \quad \partial z_2/\partial y_2 = u_2, \\ \partial z_3/\partial y_1 = u_2, \quad \partial z_3/\partial y_2 = u_1. \end{gathered} \tag{18}$$

Приравнивая вторые производные, полученные из соотношений (18), получаем условия интегрируемости

$$\partial z_2/\partial y_2 = \partial z_3/\partial y_1, \quad \partial u_1/\partial y_2 = \partial u_2/\partial y_1, \quad \partial u_2/\partial y_2 = \partial u_1/\partial y_1.$$

Первое из этих соотношений в силу (18) приводит к тождеству $u_2 \equiv u_2$. Следовательно, система (18) находится в инволюции и произвол в построении ее интегрального многообразия определяется двумя функциями от одной независимой переменной, так как $\rho_1 \equiv 0$, $\rho_2 = 2$ в силу соотношений

$$\partial u_1/\partial y_2 = \partial u_2/\partial y_1, \quad \partial u_2/\partial y_2 = \partial u_1/\partial y_1. \tag{19}$$

Перейдем от системы (16) к расширенной автономной системе

$$\begin{aligned} dz_1 &= z_2 dy_1 + z_3 dy_2, \\ dz_2 &= u_1 dy_1 + u_2 dy_2, \\ dz_3 &= u_2 dy_1 + (u_1 + \varepsilon f)\, dy_2, \\ du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial t_1} dy_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t_2} dy_2, \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial t_1} dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t_2} dy_2, \\ dt_1 &= dy_1, \quad dt_2 = dy_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Соответственно для системы (17) получим

$$\begin{aligned} dz_1 &= z_2 dy_1 + z_3 dy_2, \\ dz_2 &= u_1 dy_1 + u_2 dy_2, \\ dz_3 &= u_2 dy_1 + u_1 dy_2, \\ du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial t_1} dy_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t_2} dy_2, \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial t_1} dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t_2} dy_2, \\ dt_1 &= dy_1, \quad dt_2 = dy_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Операторы, ассоциированные с системой (21), записываются в виде

$$\hat{U}_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{\partial u_1}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial u_2},$$

$$\hat{U}_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + u_1 \frac{\partial}{\partial z_3} + \frac{\partial u_1}{\partial t_2} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial t_2} \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Соответственно расширенные операторы, ассоциированные с системой (20), запишутся так:

$$\hat{U}_{01} = \hat{U}_1, \quad \hat{U}_{02} = \hat{U}_2 + \varepsilon \tilde{U}_2, \tag{22}$$

где $\tilde{U}_2 = \tilde{f} \dfrac{\partial}{\partial z_3}$.

Операторы $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ коммутативны в силу условий (19) инволютивности системы (21)

$$\partial u_1/\partial t_2 = \partial u_2/\partial t_1, \quad \partial u_2/\partial t_2 = \partial u_1/\partial t_1. \tag{23}$$

По сделанному выше предположению возмущенная система (20) должна находиться в инволюции в силу тех же условий, т. е. операторы $\hat{U}_{01}$, $\hat{U}_{02}$ должны быть коммутативны при любом значении параметра ε в силу (23), т. е. $[\hat{U}_{01}, \hat{U}_{02}] \equiv 0$, откуда следует вид функции возмущения

$$\hat{U}_{01}\tilde{f} \equiv \tilde{U}_1 \tilde{f} \equiv 0. \tag{24}$$

Таким образом, при выполнении равенств (23), (24) приходим к задаче об асимптотической декомпозиции вполне интегрируемой пфаффовой системы (20), нулевое приближение которой также вполне интегрируемо.

Задаемся конкретным видом решения уравнения (12) в виде плоской волны $u = \cos(y_1 - y_2)$. Тем самым определено интегральное многообразие пфаффовой системы нулевого приближения

$$z_1 = \cos(t_1 - t_2), \quad z_2 = -\sin(t_1 - t_2), \quad z_3 = \sin(t_1 - t_2), \tag{25}$$
$$u_1 = -\cos(t_1 - t_2), \quad u_2 = \cos(t_1 - t_2).$$

Соотношения (25) полностью определяют начальную точку $M(t_{01}, t_{02}, z_{01}, z_{02}, z_{03}, u_{01}, u_{02})$. Положим $t_{01} = t_{02} = 0$. Тогда $z_{01} = 1$, $z_{02} = 0$, $z_{03} = 0$, $u_{01} = 0$, $u_{02} = 1$ и определены также значения свободных параметрических переменных

$$\partial u_2/\partial t_1 = -\sin(t_1 - t_2), \quad \partial u_1/\partial t_1 = \sin(t_1 - t_2). \tag{26}$$

Интегралы пфаффовой системы нулевого приближения

$$\varphi_1 = u_2 - \cos(t_1 - t_2),$$
$$\varphi_2 = u_1 + \cos(t_1 - t_2),$$
$$\varphi_3 = z_3 - \sin(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2)\cos(t_1 - t_2) - t_1 u_2 - t_2 u_1,$$
$$\varphi_4 = z_2 + \sin(t_1 - t_2) - (t_1 - t_2)\cos(t_1 - t_2) - t_1 u_1 - t_2 u_2,$$
$$\varphi_5 = z_1 - \cos(t_1 - t_2) + \frac{1}{2} t_1^2 u_1 + \frac{1}{2} t_1^2 \cos(t_1 - t_2) - t_1 z_2 - t_2 z_3 - (t_1 -$$
$$- t_2)\sin(t_1 - t_2) - t_1 t_2 \cos(t_1 - t_2) + t_1 t_2 u_2 + \frac{1}{2} t_2^2 u_1 + \frac{1}{2} t_2^2 \cos(t_1 - t_2)$$

определяем из вполне интегрируемой системы

$$\hat{U}_1 f = 0, \quad \hat{U}_2 f = 0,$$

где в коэффициентах операторов $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ свободные параметрические производные $\partial u_1/\partial t_1$, $\partial u_2/\partial t_1$ заменены правыми частями равенств (26).

Для функции $\tilde{f}$ возмущения примем выражение

$$\tilde{f} = (1 + \varphi_5)^2.$$

Произведем в операторах (22) замену переменных $t_1 = t_1'$, $t_2 = t_2'$, $x_1' = \varphi_1$, $x_2' = \varphi_2$, $x_3' = \varphi_3$, $x_4' = \varphi_4$, $x_5' = \varphi_5$. В новых переменных операторы (22) примут вид

$$\hat{U}_{01}' = \frac{\partial}{\partial t_1'}, \quad \hat{U}_{02}' = \frac{\partial}{\partial t_2'} + \varepsilon\left[(1 + x_5')^2 \frac{\partial}{\partial x_3'} - t_2'(1 + x_5')^2 \frac{\partial}{\partial x_5'}\right].$$

Следовательно, в новых переменных возмущенная система (20) принимает вид

$$\begin{gathered} dx_1' = 0, \\ dx_2' = 0, \\ dx_3' = \varepsilon(1 + x_5')^2 dy_2, \\ dx_4' = 0, \\ dx_5' = -\varepsilon t_2'(1 + x_5')^2 dy_2, \\ dt_1' = dy_1, \quad dt_2' = dy_2. \end{gathered} \tag{27}$$

Применим к системе (27) алгоритм асимптотической декомпозиции, совершив замену переменных

$$\begin{gathered} x_j' = \exp(\varepsilon S)\, x_j, \quad j = \overline{1,5}, \\ t_i' = \exp(\varepsilon S)\, t_i, \quad i = \overline{1,2}, \end{gathered} \tag{28}$$

где

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \dots, \quad S_\nu = \sum_{i=1}^{2} \gamma_{\nu i} \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^{5} \gamma_{\nu i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Выпишем в новых переменных операторы $\widehat{U}_{01}$, $\widehat{U}_{02}$, ассоциированные с системой (27) с точностью до величин второго порядка малости:

$$\widehat{U}_{01} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon(-[U_1, S_1] + F_{11}] + \varepsilon^2(-[U_1, S_2] + F_{12}),$$

$$\widehat{U}_{02} = \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon(-[U_2, S_1] + F_{21}) + \varepsilon^2(-[U_2, S_2] + F_{22}), \tag{29}$$

где

$$F_{11} = \widetilde{U}_1 = 0,$$

$$F_{21} = \widetilde{U}_2 = (1 + x_5)^2 \frac{\partial}{\partial x_3} - t^2(1 + x_5)^2 \frac{\partial}{\partial x_5},$$

$$F_{12} = -[\widetilde{U}_1, S_1] + \frac{1}{2}[[U_1, S_1], S_1],$$

$$F_{22} = -[\widetilde{U}_2, S_1] + \frac{1}{2}[[U_1, S_1], S_1].$$

Оператор S_1 находим из системы уравнений

$$[U_1, S_1] = 0, \quad [U_2, S_1] = F_{21} - \operatorname{pr} F_{21},$$

где $\operatorname{pr} F_{21} \equiv N_{21} \equiv (1 + x_5)^2 \partial/\partial x_3$.

После несложных выкладок получаем

$$S_1 = -\frac{t_2^2}{2} - (1 + x_5)^2 \frac{\partial}{\partial x_5}.$$

Оператор S_2 находим из системы уравнений

$$[U_1, S_2] = 0, \quad [U_2, S_2] = F_{22} - \operatorname{pr} F_{22},$$

где

$$F_{22} = -t_2^2(1 + x_5)^3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \operatorname{pr} F_{22} \equiv 0.$$

После несложных вычислений определяем

$$S_2 = -\frac{t_2^3}{3}(1 + x_5)^3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Таким образом, операторы (29) после преобразований (28) примут вид

$$\widehat{U}_{01} = \frac{\partial}{\partial t_1},$$

$$\widehat{U}_{02} = \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon(1 + x_5)^2 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

а централизованная система, соответствующая возмущенной системе (27), — вид

$$dx_1 = 0,$$

$$dx_2 = 0,$$

$$dx_3 = \varepsilon(1 + x_5)^2 dy_2, \tag{30}$$

$$dx_4 = 0,$$
$$dx_5 = 0,$$
$$dt_1 = dy_1, \quad dt_2 = dy_2.$$

Проинтегрируем эту систему при начальных условиях $x_1 = \ldots = x_5 = 0$ при $t_1 = t_2 = 0$. В результате получим $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$, $x_3 = \varepsilon t_2$. Переменные x', t' выражаются через переменные x, t по формулам (28), где следует положить $S = S_1 + \varepsilon S_2$.

Выпишем значения x' с точностью до величин второго порядка малости

$$x_1' = 0,$$
$$x_2' = 0,$$
$$x_3' = \varepsilon t_2 - \varepsilon^2 \frac{t_2^3}{3},$$
$$x_4' = 0,$$
$$x_5' = -\varepsilon \frac{t_2^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} t_2^4.$$

Окончательно для функций u, z получим выражения

$$u_2 = \cos(t_1 - t_2),$$
$$u_1 = -\cos(t_1 - t_2),$$
$$z_1 = \cos(t_1 - t_2) + t_2 x_3' + x_5' = \cos(t_1 - t_2) + \varepsilon \frac{t_2^2}{2} - \varepsilon^2 \frac{t_2^4}{12}, \tag{31}$$
$$z_2 = -\sin(t_1 - t_2),$$
$$z_3 = \sin(t_1 - t_3) + x_3' = \sin(t_1 - t_2) + \varepsilon t_2 - \varepsilon^2 \frac{t_2^3}{3},$$

Убедимся, что найденные функции с точностью до ε^2 удовлетворяют системе уравнений (15), а следовательно, и исходному возмущенному уравнению (13). Подставляя (31) в уравнения (15), получаем

$$\partial z_2/\partial t_1 = -\cos(t_1 - t_2) \equiv u_1,$$
$$\partial z_1/\partial t_1 = -\sin(t_1 - t_2) \equiv z_2,$$
$$\partial z_3/\partial t_1 = \cos(t_1 - t_2) \equiv u_2,$$
$$\partial z_2/\partial t_2 = \cos(t_1 - t_2) \equiv u_2,$$
$$\partial z_1/\partial t_2 = \sin(t_1 - t_2) + \left(\varepsilon t_2 - \varepsilon^2 \frac{t_2^3}{3}\right) \equiv z_3.$$

Чтобы проверить последнее уравнение, следует оценить величину $(1 + \varphi_5)^2$. Подставляя функции (31) в интеграл φ_5, находим

$$\varphi_5 \approx -\varepsilon \frac{t_2^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} t_2^4,$$

следовательно,

$$(1 + \varphi_5)^2 \approx (1 - \varepsilon t_2^2),$$
$$\partial z_3/\partial t_2 = -\cos(t_1 - t_2) + (\varepsilon - \varepsilon^2 t_2^2) \equiv u_1 + \varepsilon(1 + \varphi_5)^2 \equiv -\cos(t_1 - t_2) + \\ + \varepsilon(1 - \varepsilon t_2^2).$$

Переход к централизованной системе (30) от возмущенной (27) облегчает интегрирование, так как централизованная система автономна и переменные в ней разделены на быстрые и медленные.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
4. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 431 с.
4. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики.— Киев : Наук. думка, 1988.— 272 с.
5. *Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция дифференциальных систем с малым параметром в пространстве представлений конечномерной группы Ли // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 1.— С. 56—64.
6. *Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. Б.* Механика космического полета с малой тягой.— М.: Наука, 1966.— 679 с.
7. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция вполне интегрируемых пфаффовых систем // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 3.— С. 349—361.

Получено 22.10.91