УДК 517.9

О. Б. Лыкова, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

# Развитие метода интегральных многообразий Боголюбова — Митропольского

Приведен обзор некоторых результатов, касающихся развития метода интегральных многообразий Боголюбова—Митропольского.

Наведено огляд деяких результатів, які стосуються розвитку методу інтегральних многовидів Боголюбова—Митропольського.

1. Введение. Как показано в [1], при исследовании систем дифференциальных уравнений высокого порядка во многих случаях целесообразно из всего множества решений рассматриваемой системы выделять некоторые их совокупности (интегральные многообразия), обладающие определенными свойствами и имеющие размерность ниже порядка исходной системы. Приведем определение интегрального многообразия. Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dz/dt = F(t, z), \tag{1}$$

где $F(t, z)$ — $k$-вектор-функция, определенная и непрерывная на произведении

$$I \times W, \tag{2}$$

в котором $I$ — произвольный интервал вещественной оси $\mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$), $W$ — некоторая область $k$-мерного нормированного пространства $\mathbb{R}^k$.

Определение 1 [1]. *Некоторое многообразие $M$ в расширенном фазовом пространстве* (2) *называется интегральным многообразием уравнения* (1), *если для любого решения $z(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию $z(t_0) = z_0$, из соотношения $(t_0, z_0) \in M$, каковы бы ни были $t_0$, $z_0$, вытекает соотношение $(t, z(t)) \in M$ для всех $t \geqslant t_0$.*

При изучении интегральных многообразий часто целесообразно обозначить $z = \binom{x}{y}$, $F = \binom{X}{Y}$, $k = m + n$ и вместо уравнения (1) рассматривать систему

$$dx/dt = X(t, x, y), \quad dy/dt = Y(t, x, y), \tag{3}$$

заданную на произведении

$$I \times U \times V, \tag{4}$$

где $I \subseteq \mathbb{R}$, $U$ и $V$ — некоторые области из $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, а в качестве интегрального многообразия такой системы — многообразие, заданное непрерывной вектор-функцией $y = \varphi(t, x)$:

$$\mathcal{M}: y = \varphi(t, x), \quad t \in I, \quad x \in U. \tag{5}$$

Определение 2. *Интегральное многообразие вида* (5) *называется ограниченным, если вектор-функция* $\varphi(t, x)$ *подчинена оценке* $\|\varphi(t, x)\| \leqslant \rho$, *где* $\rho$ — *положительное число. Если* $\varphi(t, x)$, *кроме того, удовлетворяет условию Липшица по* $x$ *с константой* $\eta$, *то интегральное многообразие* $\mathcal{M}$ *называется* $(\rho, \eta)$-*многообразием.*

Первый этап развития теории интегральных многообразий связан с работами А. Пуанкаре [2] и А. М. Ляпунова [3]. Исследования А. Пуанкаре интегральных кривых на плоскости, а также траекторий на торе заложили основы качественной теории интегральных многообразий. А. М. Ляпунов при исследовании критических случаев в теории устойчивости рассматривал систему

$$dx/dt = -\lambda y + f(x, y, z), \quad dy/dt = \lambda x + g(x, y, z), \quad dz/dt = Hz + h(x, y, z),$$

где $f$ и $g$ — скалярные функции, $h$ — $n$-вектор-функция, $H$ — постоянная матрица размера $n \times n$, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части. В предположении, что $f$, $g$ и $h$ являются голоморфными функциями $x$, $y$ и $z$, Ляпунов строил такую замену $z = \varphi(x, y)$ в виде степенного разложения, чтобы задача об устойчивости нулевого решения данной системы сводилась к задаче об устойчивости нулевого решения двух уравнений

$$dx/dt = -\lambda y + f(x, y, \varphi(x, y)), \quad dy/dt = \lambda x + g(x, y, \varphi(x, y)).$$

Как оказалось, функция $\varphi(x, y)$ будет искомой, если ее графиком является некоторое интегральное многообразие исходной системы. Заметим, что эти исследования Ляпунова положили начало развитию принципа сведения в теории устойчивости [4—9].

Следующий этап в развитии теории интегральных многообразий связан с фундаментальными исследованиями Н. Н. Боголюбова [1, 10, 11]. На примере дифференциального уравнения в стандартной форме $dz/dt = \varepsilon F(t, z)$, где $z$, $F$ — $n$-векторы, $\varepsilon$ — малый параметр, к рассмотрению которого приводят многочисленные задачи нелинейной механики [10], Н. Н. Боголюбов построил строгую теорию интегральных многообразий: впервые ввел определение интегрального многообразия, доказал теоремы существования асимптотически (условно асимптотически) устойчивых интегральных многообразий, исходя из свойств соответствующего уравнения первого приближения, а также исследовал структуру этих многообразий. Он также показал, что наличие у рассматриваемой системы интегрального многообразия позволяет качественное исследование системы высокого порядка сводить на интегральном многообразии к качественному исследованию системы более низкого порядка. Эта идея сведения исследования процесса высокой размерности к исследованию процесса более низкой размерности является, как известно, важной для многих прикладных задач.

Идеи Н. Н. Боголюбова получили дальнейшее существенное развитие в трудах Ю. А. Митропольского для исследования нестационарных задач теории нелинейных колебаний [12—14], а также в работах его учеников, в которых, в частности, были исследованы локальные интегральные многообразия [15, 16] и развита схема построения интегрального многообразия системы нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами на основе метода асимптотических разложений по параметру [17]. Существенное влияние на дальнейшее развитие теории интегральных многообразий оказал проблемный доклад Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в 1961 г. [11]. По намеченным в докладе наиболее актуальным задачам появилось большое число работ, относящихся к распространению метода интегральных многообразий на различные классы систем уравнений, содержащих «малый» и «большой» параметры, на дифференциальные уравнения в функциональных пространствах, на дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом и др. Многие из этих результатов вошли в монографию [18]. В дальнейшем появилось большое число работ, в том числе монографий, в которых рассматривались вопросы существования и свойств интегральных многообразий различных классов дифференциальных уравнений [19—21], а также вопросы применения интегральных многообразий в теории устойчивости [9], при исследовании гироскопических систем и в теории оптимального управления [22], в задачах теоретической физики [23].

2. Приближенное исследование интегральных многообразий. Находить полное семейство интегральных многообразий можно только для класса систем, допускающих существование непрерывных первых интегралов. Поэтому для большинства нелинейных систем обычно ограничиваются нахождением отдельных интегральных многообразий (экспоненциально притягивающих, асимптотически (условно асимптотически) устойчивых, ограниченных и др.), применяя для этого приближенные методы.

На примере системы $m+n$ дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(t, x, y), \quad dy/dt = A(t)\, y + Y(t, x, y), \tag{6}$$

заданной на произведении

$$\mathbb{R} \times U \times V_\rho, \tag{7}$$

где $U \equiv \mathbb{R}^m$, $V_\rho$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\rho$ с центром в нуле, проиллюстрируем схему Н. Н. Боголюбова построения $(\rho, \eta)$-многообразия, основанную на методе последовательных приближений. Согласно этой схеме задачу об интегральном многообразии системы (6) можно свести к эквивалентной задаче о неподвижной точке отображения $S$:

$$S\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, s)\, Y(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))\, ds, \tag{8}$$

заданного на множестве $C_\rho(\eta)$ вектор-функций $\varphi(t, x)$, непрерывных на $\mathbb{R} \times U$ со значениями в шаре $V_\rho$ и удовлетворяющих по $x$ условию Липшица с константой $\eta$. Если на $C_\rho(\eta)$ ввести расстояние посредством нормы $|\cdot| = \sup\limits_{t,x} \|\cdot\|$, то $C_\rho(\eta)$ — полное метрическое пространство. В (8) $G(t, s)$ — функция Грина уравнения $dx/dt = A(t)\, x$, а $\Psi$ — решение задачи Коши $dx/ds = X(s, x, \varphi(s, x))$, $\Psi|_{s=t} = x$. Неподвижную точку отображения $S$ находим методом последовательных приближений, строя итерации по схеме. если задано $\varphi_0(t, x)$, то $\varphi_1(t, x)$ определяется по формуле

$$\varphi_1(t, x) = S\varphi_0(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, s)\, Y(s, \Psi_1, \varphi_0(s, \Psi_1))\, ds,$$

где $\Psi_1$ — решение задачи Коши

$$dx/ds = X(s, x, \varphi_0(s, x)),\ \Psi|_{s=t} = x.$$

Если известно $\varphi_{k-1}(t, x)$, то

$$\varphi_k(t, x) = S\varphi_{k-1}(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, s)\, Y(s, \Psi_k, \varphi_{k-1}(s, \Psi_k))\, ds,$$

где $\Psi_k$ — решение задачи Коши

$$dx/ds = X(s, x, \varphi_{k-1}(s, x)), \quad \Psi|_{s=t} = x. \tag{9}$$

Последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ строится при следующих предположениях:

1. Правые части исходной системы непрерывны в области своего определения.

2. Для каждой вектор-функции $\varphi_k(t, x)$ задача Коши (9) имеет на $\mathbb{R}$ решение.

3. Существует функция Грина $G(t, s)$.

Равномерная сходимость построенной последовательности к вектор-функции $\varphi(t, x)$, задающей $(\rho, \eta)$-многообразие, доказывается при следующих предположениях:

4. Функция Грина $G(t, s)$ удовлетворяет оценке $\|G(t, s)\| \leqslant Ne^{-\nu|t-s|}$, $N > 0$, $\nu > 0$.

5. Вектор-функции $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$ непрерывны в (7) и удовлетворяют условию Липшица по $x$, $y$ с константами $K$ и $\mathscr{L}$ соответственно. Кроме того, $\|Y(t, x, 0)\| \leqslant M$.

6. Постоянные $K, \mathscr{L}, M, N, \nu, \rho$ связаны соотношениями

$$2N(\mathscr{L}\rho + M) \leqslant \nu\rho, \quad \nu > 2K, \quad \nu > 4N\mathscr{L}.$$

В результате можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть относительно системы* (6) *выполняются условия* 1—6. *Тогда система* (6) *имеет интегральное многообразие*

$$\mathcal{M}: y = \varphi(t, x), \quad \varphi \in C_\rho(\eta),$$

*где* $\varphi(t, x)$ — *равномерный предел последовательности* $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{k+1} = S\varphi_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Трудности, связанные с применением метода последовательных приближений в задаче об интегральном многообразии, возникают при интегрировании в (8) и при решении задачи Коши (9) на каждом шаге итераций.

Для некоторых частных случаев эти трудности можно уменьшить. Например, для полураспавшейся системы

$$dx/dt = X(t, x), \quad dy/dt = A(t)y + Y(t, x, y),$$

соответствующую задачу Коши достаточно решить лишь на первом шаге.

В связи с запросами теории и практики усилия многих специалистов были направлены на создание строго обоснованных приближенных методов исследования интегральных многообразий, обладающих в то же время простотой расчетных схем. В 1979 г. в работах [24, 25] было введено понятие приближенного с невязкой интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений. Впоследствии авторами были развиты способы его построения на основе метода асимптотических разложений по координатам и метода асимптотических разложений по параметру. Для построения приближенных интегральных многообразий в работах [26—29] был развит метод асимптотических разложений по координатам, который явился модификацией метода степенных рядов. Изложим кратко этот метод на примере рассмотренной в [28] автономной системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = Ax + f(x, y), \quad dy/dt = By + g(x, y), \tag{10}$$

правые части которой определены и непрерывны на множестве $\mathbb{R}^m \times V$, где $V$ — некоторая область пространства $\mathbb{R}^n$, содержащая точку $y = 0$; $A$ и $B$ — постоянные матрицы порядков $m \times m$ и $n \times n$ соответственно. Под приближенным с невязкой $(0, b(x))$ интегральным многообразием системы (10) будем понимать интегральное многообразие системы

$$dx/dt = Ax + f(x, y), \quad dy/dt = By + g(x, y) + b(x). \tag{11}$$

Обозначим его

$$\mathcal{M}: y = \Phi(x), \quad x \in R^m. \tag{12}$$

Если вектор-функция $\Phi(x)$ непрерывно дифференцируема, то она является решением дифференциального уравнения в частных производных вида

$$\partial\Phi/\partial x\,(Ax + f(x, \Phi)) = B\Phi + g(x, \Phi) + b(x). \tag{13}$$

Решение уравнения (13) находится при следующих предположениях:

1. Вектор-функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ допускают асимптотические разложения вида

$$f(x, y) = f_2(x, y) + \ldots + f_k(x, y) + o(\|(x, y)\|^k),$$

$$g(x, y) = g_2(x, y) + \ldots + g_k(x, y) + o(\|(x, y)\|^k),$$

$\|(x, y)\| \to 0$, где $f_i$, $g_i$ — формы $i$-й степени с векторными коэффициентами.

2. Собственные значения $\lambda_i(A)$ матрицы $A$ и собственные значения $\lambda_j(B)$ матрицы $B$ подчинены условию $p_1\lambda_1(A) + \ldots + p_m\lambda_m(A) \neq \lambda_j(B)$, $j = 1, \ldots, n$, где $p_1, \ldots, p_m$ — целые неотрицательные числа, связанные соотношением $p_1 + \ldots + p_m = i$, $i = 1, \ldots, k$.

Представим решение уравнения (13) в виде

$$\Phi(x) = \sum_{i=2}^{k} \Phi_i(x), \tag{14}$$

где $\Phi_i(x) = \mathrm{colon}\,[\Phi_{i1}(x), \ldots, \Phi_{ik}(x)]$, $\Phi_{ij}(x)$ — формы $i$-й степени при каждом $j = 1, \ldots, n$. После подстановки его в уравнение (13) и приравнивания форм одинаковой степени в левой и правой части до порядка $k$, получаем для определения $\Phi_i$ уравнения

$$\partial\Phi_i/\partial x Ax = B\Phi_i + u_i(x), \quad i = 2, \ldots, k, \tag{15}$$

где форма $u_i$ не зависит от формы $\Phi_j$ при $j \geqslant i$.

Приравнивая оставшиеся члены, находим выражение для невязки

$$b(x) = R_k\,[\partial\Phi/\partial x f(x, \Phi) - g(x, \Phi)], \tag{16}$$

в котором $R_k[\cdot]$ — остаток асимптотического разложения указанной в скобках функции.

Доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть относительно системы* (10) *выполняются условия* 1, 2. *Тогда эта система имеет единственное приближенное с невязкой* (0, $b$) *интегральное многообразие вида* (12), *в котором вектор-функция* $\Phi$ *представима в виде асимптотического разложения по координатам* (14). *Функция* $b(x)$ *определяется формулой* (16), *а форму* $\Phi_i$ *в разложении* (14) *можно найти методом неопределенных коэффициентов из уравнения* (15) *при каждом* $i$.

Заметим, что условие 2 выполняется в каждом из следующих трех случаев: а) $\mathrm{Re}\,\lambda_q(A) = 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j(B) \neq 0$; б) $\mathrm{Re}\,\lambda_q(A) \leqslant 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j(B) > 0$; в) $\mathrm{Re}\,\lambda_q(A) \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j(B) < 0$. Приближенные интегральные многообразия в указанных случаях называются соответственно центральным приближенным интегральным многообразием, центр-устойчивым приближенным интегральным многообразием, центр-неустойчивым приближенным интегральным многообразием. Интегральные многообразия указанных типов в рамках теорем существования были изучены Ал. Келли [5].

Обоснование приведенного алгоритма сводится к доказательству теоремы существования интегрального многообразия исходной системы и к получению оценки погрешности построенного приближенного интегрального многообразия.

Поскольку применяемый в теории интегральных многообразий метод доказательства теорем существования основан на принципе сжимающих отображений, который требует ограниченности и липшицевости правых частей с достаточно малыми константами, то чтобы не налагать столь жесткие ограничения на исходную систему, заданную во всем пространстве, вместо глобального интегрального многообразия (как в теоремах Боголюбова—Митропольского) доказывают существование локального интегрального многообразия. Заметим, что хотя понятие локального интегрального многообразия фактически содержится в трудах А. М. Ляпунова, однако определение локального интегрального многообразия, а также теоремы существования локальных интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений, близких к интегрирующимся (как в окрестности статического решения, так и в окрестности двупараметрического семейства периодических решений соответствующего невозмущенного уравнения), впервые были приведены в работах [15, 16, 30—32].

Под локальным интегральным многообразием системы (10) будем понимать многообразие вида

$$\mathcal{M}_л : y = \varphi_л(x), \quad \|x\| < r, \quad r > 0,$$

обладающее тем свойством, что любая интегральная кривая системы (10), имеющая с $M_л$ хотя бы одну общую точку, принадлежит $\mathcal{M}_л$ до тех пор, пока $\|x(t)\| < r$.

Однако поскольку локальное интегральное многообразие рассматривается для $\|x\| < r$, а исходная система задана для $x \in \mathbb{R}^m$, то обычно используют известную процедуру продолжения функций [33].

Для системы (10) в [28] доказана теорема, формулирующая условия, при выполнении которых эта система имеет локальное интегральное многообразие, а также приближенное с невязкой $(0, b)$ локальное интегральное многообразие, задаваемое вектор-функцией $y = \Phi_л(x)$. При этом оценка погрешности построенного приближенного интегрального многообразия определяется неравенством

$$\|\varphi_л(x) - \Phi_л(x)\| \leqslant (1-q)^{-1}\gamma_0 \sup_x \|b(x)\|, \quad \gamma_0 > 0,$$

в котором $b(x)$ выражается посредством формулы (16), а постоянная $q < 1$ — посредством констант, характеризующих свойства правых частей исходной системы.

Способы построения приближенных интегральных многообразий методом асимптотических разложений по координатам для неавтономных систем рассматривались в [26, 27]. В частности, для системы

$$dx/dt = A(t)x + B(t)y + f(t, x, y), \quad dy/dt = C(t)y + g(t, x, y), \qquad (17)$$

где $x$ — $m$-вектор, $y$ — $n$-вектор, $t \in \mathbb{R}$, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть относительно системы* (17) *выполняются условия*:

1. *Вектор-функции $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ непрерывны и допускают асимптотические разложения $k$-го порядка по координатам $x$, $y$ с непрерывными и ограниченными по $t$ коэффициентами, при этом разложения начинаются членами не ниже второго порядка.*

2. *Фундаментальная матрица $X(t, s)$ и функция Грина $G(t, s)$ соответственно уравнений*

$$dx/dt = A(t)x, \quad dy/dt = C(t)y$$

*подчинены оценкам*

$$\|X(t, s)\| \leqslant Ke^{\chi|t-s|}, \quad \|G(t, s)\| \leqslant Ne^{-\nu|t-s|}, \quad \nu > 0, \quad K\chi < \nu.$$

*Тогда система* (17) *имеет приближенное интегральное многообразие*

$$\mathcal{M}_{пр.} : y = \Phi(t, x) = \Phi_2(t, x) + \ldots + \Phi_k(t, x), \quad t \in \mathbb{R},$$

*с невязкой $(0, b(t, x))$, где формы $\Phi_i(t, x)$ с непрерывными и ограниченными по $t$ коэффициентами определяются равенствами*

$$\Phi_i(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, s)\, u_i(s, X(s, t)x)\, ds,$$

*в которых $u_i(t, x)$ — известные функции;*

$$b(t, x) = R_k[\partial\Phi/\partial x(B(t)\Phi + f(t, x, \Phi)) - g(t, x, \Phi)],$$

*где $R_k[\cdot]$ — остаток асимптотического разложения указанной в скобках функции.*

Способ построения интегральных многообразий на основе метода асимптотических разложений по координатам развит также в работе [34].

Существенное развитие конструктивной стороны метода интегральных многообразий связано с разработкой в [17, 22, 23, 26, 35—38] способов построения приближенных интегральных многообразий на основе метода асимптотических разложений по параметру. Приведем вначале некоторые сведения из теории асимптотических разложений [39].

Асимптотической последовательностью называется последовательность функций $g_0(\varepsilon), g_1(\varepsilon), \ldots, g_k(\varepsilon), \ldots$, определенных в окрестности $\varepsilon = 0$, для которой выполняется соотношение $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{g_{k+1}(\varepsilon)}{g_k(\varepsilon)} = 0$ для любого $k$. Сумма $\Phi_k(\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i g_i(\varepsilon)$, представляющая линейную комбинацию первых $k$ членов данной последовательности, называется асимптотическим разложением функции $\varphi(\varepsilon)$ с точностью $g_k(\varepsilon)$ относительно этой последовательности, если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\varepsilon) - \Phi_k(\varepsilon)}{g_k(\varepsilon)} = 0$. Каждое слагаемое данной суммы называется членом асимптотического разложения, каждая постоянная $a_i$ — коэффициентом асимптотического разложения, а разность $R_k[\varphi] = \varphi - \Phi$ — остатком этого асимптотического разложения.

Пусть сумма $\Phi_k(x, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i(x) g_i(\varepsilon)$ является асимптотическим разложением функции $\varphi(x, \varepsilon)$ при каждом $x \in D$, где $D$ — произвольное множество. Данное асимптотическое разложение равномерно, если предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(x, \varepsilon) - \Phi_k(x, \varepsilon)}{g_k(\varepsilon)} = 0$ равномерный относительно $x \in D$. В противном случае асимптотическое разложение называется неравномерным.

При построении асимптотических разложений решений дифференциальных уравнений в качестве асимптотической последовательности обычно берут степенную последовательность, т. е. полагают $g_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$.

Изложим развитую в работах [26, 35—38] схему построения приближенного интегрального многообразия методом асимптотических разложений по параметру на примере построения центрального приближенного интегрального многообразия автономной системы

$$dx/dt = Ax + X(x, y, \varepsilon), \quad dy/dt = By + Y(x, y, \varepsilon), \tag{18}$$

заданной на произведении $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, при этом $A$, $B$ — постоянные матрицы.

Строится приближенное интегральное многообразие системы (18) в виде полинома $k$-й степени относительно параметра $\varepsilon$ и доказывается, что построенное приближенное интегральное многообразие является равномерным асимптотическим разложением центрального многообразия системы (18):

$$\mathcal{M}: y = \varphi^*(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \varphi(0, \varepsilon) = 0.$$

Предполагается, что относительно системы (18) выполняются следующие условия:

1. Вектор-функции $X(x, y, \varepsilon)$, $Y(x, y, \varepsilon)$ непрерывны на множестве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

2. Соответствующая (18) порождающая система ($\varepsilon = 0$) имеет интегральное многообразие $\mathcal{M}_0$: $y = \bar{\varphi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\varphi}(0) = 0$.

3. Вектор-функции $X(x, \bar{\varphi}+\varepsilon z, \varepsilon)$, $Y(x, \bar{\varphi}+\varepsilon z, \varepsilon)$ допускают асимптотические разложения по $\varepsilon$ порядка $\varepsilon^k$, в которых коэффициенты $X_1$, $Y_1$ не зависят от $z$.

Согласно методу возмущений ищется приближение к $\bar{\varphi}(x)$. Для этого посредством замены $y = \bar{\varphi}(x) + z$ система (18) приводится к виду

$$dx/dt = Ax + f(x, \varepsilon z, \varepsilon), \quad dz/dt = Bz + g(x, \varepsilon z, \varepsilon), \tag{19}$$

при этом $\widetilde{f}(x, \varepsilon\Phi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i f_i(x) + R_k[\widetilde{f}]$, $\widetilde{g}(x, \varepsilon\Phi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i g_i(x) + R_k[\widetilde{g}]$.

Задача сводится к построению соответствующего асимптотического разложения, задающего приближенное центральное интегральное многообразие системы (19). Доказывается, что эта задача эквивалентна задаче об ограниченном интегральном многообразии полураспавшейся системы вида

$$dx/dt = Ax + f_0(x), \quad dz/dt = Bz + v_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, k$$
$$\left( v_i(x) = g_i(x) - \sum_{\substack{j+r=i \\ r\neq 0}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} f_r \quad (r \neq 0, \ i \neq j), \quad v_i(0) = 0 \right). \tag{20}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть относительно системы* (20) *выполняются условия*:

1. *Для любых начальных данных* $\tau$, $\xi$ *задача Коши* $dx/dt = Ax + f_0(x)$, $x|_{t=\tau} = \xi$ *имеет единственное решение на оси* $\mathbb{R} : x = \Psi(t - \tau, \xi)$.

2. *Вектор-функции* $v_i(x)$ *непрерывны и ограничены*: $\|v_i(x)\| \leqslant \text{const} < \infty$.

3. *Существует функция Грина уравнения* $dz/dt = Bz$, *подчиненная оценке* $\|G(t-s)\| \leqslant Ne^{-\nu|t-s|}$, $N \geqslant 1$, $\nu > 0$.

*Тогда система* (20) *имеет ограниченное интегральное многообразие при каждом* $i = 0, 1, \ldots, k$, *определяемое вектор-функцией*

$$\varphi_i(x) = \int_{R} G(t-s)\, v_i(\Psi(s-t, x))\, ds, \quad \varphi_i(0) = 0.$$

В результате определяется вектор-функция, задающая с точностью $\varepsilon^k$ приближенное с невязкой $(0, \varepsilon b)$ центральное интегральное многообразие системы (18)

$$\mathcal{M} : y = \overline{\varphi}(x) + \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \varphi_i(x) = \overline{\varphi}(x) + \varepsilon\Phi(x) = \Phi(x, \varepsilon),$$

при этом невязка $(0, \varepsilon b(x, \varepsilon))$ определяется формулой

$$\varepsilon b = \varepsilon(\partial\Phi/dx R_k[\widetilde{f}] - R_k[\widetilde{g}]).$$

Изложенный способ построения приближенного интегрального многообразия обосновывает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть кроме условий теорем 3 и 4 выполняются также следующие условия*:

1. *Вектор-функции* $f(x, \varepsilon z, \varepsilon)$, $g(x, \varepsilon z, \varepsilon)$ *непрерывны на* $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют условиям*

$$f(x, \varepsilon z, \varepsilon) = \text{Lip}\{x, \varepsilon z; \Lambda\}, \quad g(x, \varepsilon z, \varepsilon) = \text{Lip}\{x, \varepsilon z; L\}, \quad \|g(x, 0, \varepsilon)\| \leqslant \mu,$$
$$\mu > 0.$$

2. *Выполняются неравенства*

$$2N(\mathcal{L}\varepsilon\rho + \mu) \leqslant \nu\rho, \quad 2KN\mathcal{L}(1 + \varepsilon\eta) \leqslant \eta[\nu - (1 + \varepsilon\eta)K_1], \quad K_1 = K\Lambda.$$

*Тогда система* (18) *имеет центральное интегральное многообразие*

$$\mathcal{M} : y = \overline{\varphi}(x) + \varepsilon\varphi(x, \varepsilon) = \varphi^*(x, \varepsilon), \quad \varphi^*(0, \varepsilon) = 0,$$

*при этом справедлива оценка*

$$\|\varphi^*(x, \varepsilon) - \Phi(x, \varepsilon)\| \leqslant (1-q)^{-1} \sup_{x, \varepsilon} \|b(x, \varepsilon)\|, \quad q = \frac{2N\mathcal{L}\varepsilon}{\nu - \Lambda(1 + \varepsilon\eta)} < 1,$$

*характеризующая отклонение* $\mathcal{M}$ *от* $\mathcal{M}_{\text{пр}}$. *Если вектор-функция* $b(x, \varepsilon)$ *равномерно ограничена, то построенное* $\mathcal{M}_{\text{пр}}$ *является равномерным асимптотическим разложением интегрального многообразия* $\mathcal{M}$ *с точностью* $\varepsilon^k$.

Построению методом асимптотических разложений по параметру приближенных интегральных многообразий неавтономных систем дифференциальных уравнений посвящены работы [26, 37].

Метод интегральных многообразий явился также эффективным способом исследования сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Как известно, многие сингулярно возмущенные системы можно привести к виду

$$dx/dt = f(t, x, y), \quad \varepsilon dy/dt = g(t, x, y), \tag{21}$$

где $x$, $f$ — $m$-векторы, $y$, $g$ — $n$-векторы, $\varepsilon$ — малый положительный параметр, при этом вектор-функции $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ определены и непрерывны для $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $y$ из некоторой области $V \subset \mathbb{R}^n$.

Положив в (21) $\varepsilon = 0$, получим порождающую систему

$$dx/dt = f(t, x, y), \quad g(t, x, y) = 0. \tag{22}$$

Пусть второе уравнение системы (22) имеет изолированное решение

$$y = h_0(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{23}$$

Тогда на поверхности, определяемой равенством (23), система (22) эквивалентна системе

$$dx/dt = f(t, x, h_0(t, x)). \tag{24}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. В области

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^m,\ \| y - h_0(t, x) \| \leqslant \rho\}$$

функции $h_0$, $f$, $g$, а также их первые и вторые частные производные по $t$, $x$, $y$ равномерно непрерывны и ограничены.

2. Характеристические корни $\lambda_j(t, x)$, $j = 1, \ldots, n$, матрицы $B(t, x) = g_y(t, x, h_0(t, x))$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_j(t, x) < -2\gamma$, $\gamma > 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Для системы (21) справедлива известная теорема А. Н. Тихонова [40] о близости ее решений к решениям порождающей системы (24). Центральное предположение этой теоремы состоит в том, что изолированный корень $y = h_0(t, x)$ уравнения $g(t, x, 0) = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия присоединенной системы

$$dy/d\tau = g(t, x, y),$$

в которой $t$ и $x$ рассматриваются как параметры. Предположение 2 обеспечивает асимптотическую устойчивость по первому приближению.

В [41] показано, что такая система имеет притягивающее интегральное многообразие

$$\mathcal{M}: y = h(t, x, \varepsilon), \quad h(t, x, 0) = h_0(t, x), \tag{25}$$

поведение решений на котором описывается уравнением

$$dx/dt = f(t, x, h(t, x, \varepsilon)). \tag{26}$$

В [8] показано, что для этого многообразия справедлив принцип сведения.

В связи с возможностью замены сингулярно возмущенной системы (21) регулярной системой меньшей размерности (26) задача построения функции $h(t, x, \varepsilon)$ приобретает особое значение. В [22] изложен способ построения функции $h(t, x, \varepsilon)$ методом малого параметра. В предположении, что вектор-функции $f$, $g$ и $h_0$ достаточное число раз дифференцируемы, функция $h(t, x, \varepsilon)$ представляется в виде

$$h(t, x, \varepsilon) = h_0(t, x) + \varepsilon h_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^k h_k(t, x) + \varepsilon^{k+1} h_{k+1}(t, x, \varepsilon). \tag{27}$$

Коэффициенты этого разложения однозначно определяются из формального тождества

$$\varepsilon\left\{\sum_i \varepsilon^i \frac{\partial h_i}{\partial t} + \sum_i \varepsilon^i \frac{\partial h_i}{\partial t} f\left(t, x, \sum_i \varepsilon^i h_i\right)\right\} = g\left(t, x, \sum_i \varepsilon^i h_i\right) \qquad (28)$$

путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$.

Пусть найдены первые $k$ членов $h_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$, разложения функции $h(t, x, \varepsilon)$ и пусть $H(t, x, \varepsilon) = h_0(t, x) + \varepsilon h_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^k h_k(t, x)$. В результате замены $y = z + H(t, x, \varepsilon)$ получаем

$$dx/dt = \tilde{f}(t, x, z, \varepsilon), \quad \varepsilon dz/dt = \tilde{g}(t, x, z, \varepsilon), \qquad (29)$$

где

$$\tilde{f} = f\left(t, x, z + H(t, x, \varepsilon), \varepsilon\right), \tilde{g} = -\varepsilon\frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial H}{\partial x}\tilde{f} + g\left(t, x, z + H(t, x, \varepsilon)\right).$$

При $z = 0$ функция $\tilde{g}$ оценивается по норме величиной $C_1 \varepsilon^{k+1}$, где $C_1$ — положительная постоянная. Показано, что система (29) имеет интегральное многообразие $\mathcal{M} : z = \varepsilon^{k+1} h_{k+1}(t, x, \varepsilon)$, где $h_{k+1}(t, x, \varepsilon)$ — ограниченная по норме функция. Отсюда следует, что исходная система имеет интегральное многообразие $\mathcal{M} : y = H(t, x, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} h_{k+1}(t, x, \varepsilon)$.

3. Приложения приближенных интегральных многообразий. Для практики большой интерес представляет понижение порядка рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. В теории устойчивости эта задача в простейших критических случаях решена А. М. Ляпуновым [3]. Как отмечалось во введении, ее исследовал также Н. Н. Боголюбов для уравнения в стандартной форме, к рассмотрению которого, как показано в [10], приводят многие задачи нелинейной механики. Впоследствии этой задачей занимались многие авторы [4—9, 22, 42], используя при этом интегральные многообразия. Важный результат здесь принадлежит В. А. Плиссу, который, используя локальные интегральные многообразия, впервые сформулировал и доказал принцип сведения в общем (трансцендентном) случае. Однако указанная проблема не потеряла актуальности и до настоящего времени. В работах [42—47], а также [22] она исследуется для систем общего вида, при этом, кроме интегральных многообразий, применяются также приближенные интегральные многообразия. Покажем это на примере системы вида

$$dx/dt = X(t, x, y), \quad dy/dt = Y(t, x, y), \qquad (30)$$

где $t > 0$, $x$ — $m$-вектор, $y$ — $n$-вектор.

Предположим, что система (30) имеет нулевое решение и требуется исследовать устойчивость этого решения. Чтобы уменьшить трудности, связанные с решением этой задачи, целесообразно понизить порядок рассматриваемой системы. Для этого, как указывалось выше, можно применить интегральное многообразие $M : y = \varphi(t, x)$, $\varphi(t, 0) = 0$ и при некоторых условиях доказать, что задача об устойчивости для системы (30) эквивалентна задаче об устойчивости для уравнения.

$$dx/dt = X(t, x, \varphi(t, x)), \qquad (31)$$

получающегося из (30) сведением на интегральном многообразии.

Однако для реализации сведения требуется найти интегральное многообразие. Найти его точно удается только в редких случаях. В связи с этим важно уметь осуществлять сведение с помощью приближенных интегральных многообразий.

Предположим, что удалось построить для системы (30) некоторое приближенное с невязкой $(0, b)$ интегральное многообразие

$$\mathcal{M}_{\text{пр.}} : y = \Phi(t, x), \quad \Phi(t, 0) = 0. \qquad (32)$$

Представляет интерес выяснить, когда задача об устойчивости для системы (30) эквивалентна задаче об устойчивости для уравнения

$$dx/dt = X(t, x, \Phi(t, x)). \tag{33}$$

Для решения этой задачи запишем уравнение (33) в виде

$$dx/dt = X(t, x, \Phi(t, x)) + R(t, x),$$

где

$$R(t, x) = X(t, x, \varphi(t, x)) - X(t, x, \Phi(t, x)).$$

Во многих случаях

$$\| \mathbb{R}(t, x) \| \leqslant c \| \varphi - \Phi | \leqslant C \sup_{t, x} \| b(t, x) \|.$$

При этом, если для построения приближенных интегральных многообразий применяется метод асимптотических разложений по координатам, то для невязки выполняется асимптотическое равенство $\|b\| = o(\|x\|^p)$, $x \to 0$, а если применяется метод асимптотических разложений по параметру,— то асимптотическое равенство $\|b\| = o(\varepsilon^p)$, $\varepsilon \to 0$. Предполагается, что эти равенства равномерны по $t$.

Доказана теорема (теорема 6), утверждающая, что задача об устойчивости для системы (30) эквивалентна задаче об устойчивости для уравнения (33), если

1. Для системы (30) выполняются условия принципа сведения.
2. Известно приближенное интегральное многообразие системы (30).
3. Задача об устойчивости для уравнения (33) решается независимо от членов порядка выше $p$ (относительно $x$ — в случае асимптотического разложения по координатам и относительно $\varepsilon$ — в случае асимптотического разложения по параметру).

Чтобы проиллюстрировать изложенное выше, выделим в системе (30) линейную часть. В результате получим систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= A(t)x + B(t)y + F(t, x, y), \\ dy/dt &= C(t)y + D(t)x + H(t, x, y). \end{aligned} \tag{34}$$

Пусть известно аффинное интегральное многообразие соответствующей линейной системы: $\mathcal{M}_0 : y = Q(t)x$. Введя замену

$$y = Q(t)x + z,$$

получим систему специального вида

$$\begin{aligned} dx/dt &= A_0(t)x + B(t)z + f(t, x, z) = A_0(t)x + f^*(t, x, z), \\ dz/dt &= C_0(t)z + h(t, x, z). \end{aligned} \tag{35}$$

Определение 3. *Будем говорить, что для системы* (35) *имеет место критический случай, если фундаментальные матрицы* $X(t, s)$, $Z(t, s)$ *уравнений*

$$dx/dt = A_0(t)x, \quad dz/dt = C_0(t)z$$

*подчинены оценкам*

$$\| X(t, s) \| \leqslant K e^{\chi |t-s|}, \quad \| Z(t, s) \| \leqslant N e^{-\nu(t-s)}, \quad t > s,$$

*где постоянные* $\chi < \nu$, $\nu > 0$.

Теорема 7. *Пусть относительно системы* (35) *выполняются следующие условия*:

1. *Имеет место критический случай в смысле определения* 3.
2. *Вектор-функции* $f^*(t, x, z)$, $h(t, x, z)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$\| f^*(t, x, z) - f^*(t, \bar{x}, \bar{z}) \| \leqslant \lambda \| x - \bar{x} \| + \Lambda \| z - \bar{z} \|,$$

$$\| h(t, x, z) - h(t, \bar{x}, \bar{z}) \| \leqslant l \| x - \bar{x} \| + \mathcal{L} \| z - \bar{z} \|$$

*и, кроме того,* $\| h(t, x, 0) \| \leqslant \mu < \infty$.

3. *Постоянные* $\lambda, \mathcal{L}, \Lambda, l$ *удовлетворяют условию* $(\lambda, \mathcal{L}, \Lambda, l) \to 0$ *при* $\| x \| \to 0$, $\| y \| \to 0$ *равномерно по* $t$.

*Тогда система* (35) *имеет* $(\rho, \eta)$-*многообразие* $\mathcal{M} : z = \varphi(t, x)$, *а задачи об устойчивости для системы* (35) *и уравнения*

$$dx/dt = A_0(t)x + f^*(t, x, \varphi(t, x)) \tag{36}$$

*эквивалентны.*

Как следствие теорем 6 и 7 справедлива следующая теорема [47].

Теорема 8. *Пусть относительно системы* (35) *выполнены условия теоремы 7, невязка приближенного интегрального многообразия имеет порядок выше* $p$, *а задача об устойчивости для уравнения*

$$dx/dt = A_0(t)x + f^*(t, x, \Phi(t, x)) \tag{37}$$

*решается независимо от членов порядка выше* $p$.

*Тогда задачи об устойчивости для системы* (35) *и уравнения* (37) *эквивалентны.*

Метод интегральных многообразий в сочетании с идеей сведения получил широкое применение и при исследовании сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений.

Как известно, такие классы систем дифференциальных уравнений возникают при моделировании объектов различной природы, совершающих одновременно быстрые и медленные движения. Такие модели естественны для задач управления системами, динамика которых объективно складывается из разнотемповых движений: гироскопические, электромеханические и другие системы. Появление сингулярных возмущений может быть также связано со спецификой применяемых методов управления и для однотемповых систем, например для задач управления с большим коэффициентом усиления, с использованием метода штрафа, или для задач стохастической фильтрации при вырождении шума в канале наблюдения и др.

Применению метода интегральных многообразий для исследования сингулярно возмущенных систем в задачах указанного типа посвящена, в частности, монография [22]. Широкое применение метода интегральных многообразий для исследования этих задач объясняется тем, что его применение приводит к понижению размерности модели, при этом упрощенные модели отражают поведение исходных систем с достаточной степенью точности по отношению к какому-либо разумному критерию и допускают обоснование с позиций теории возмущений.

Метод интегральных многообразий получил существенное развитие и применение также в задачах теоретической физики. В частности, для исследования медленно эволюционирующих гамильтоновых систем этот метод был впервые применен А. С. Бакаем в [48], а затем развит в [23] в связи с исследованиями по теории адиабатических инвариантов. По существу отыскание адиабатического инварианта сводится к построению приближенного интегрального многообразия рассматриваемой системы. После этого вычисление интегрального инварианта Пуанкаре—Картана, связанного с интегральным многообразием, дает искомый адиабатический инвариант. Построение приближенных интегральных многообразий медленно эволюционирующих систем основано на использовании метода асимптотических разложений по малому параметру, которым является отношение характерных времен изменения параметра и динамических переменных. В указанных работах на основе некоторой модификации метода асимптотических разложений по параметру проведено также исследование систем, испытывающих в процессе эволюции структурные переходы, а также систем с перемешиванием.

В заключение заметим, что в данный обзор не вошли некоторые вопросы, касающиеся развития и применения метода интегральных многообразий Боголюбова — Митропольского. В частности, не вошли работы, относящиеся к исследованию интегральных многообразий в счетно нормированных и функциональных пространствах [49, 50], а также работы, касающиеся исследования систем, находящихся под импульсным воздействием [51]. Кроме того, в обзор не вошли работы по исследованию интегральных множеств [52].

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Львов: Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
2. *Пуанкаре А.* Избранные труды.— М. : Наука, 1971, 1972.— Т. 1, 2.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М. : Гостехиздат, 1950.— 471 с.
4. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— **28**, № 6.— С. 1297—1324.
5. *Келли Ал.* (*Kelly Al.*) The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifold // J. Different. Equat.— 1967.— **4**.— P. 546—570.
6. *Лыкова О. Б.* Принцип сведения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн.— 1971.— 23, № 4.— С. 464—471.
7. *Лыкова О. Б.* О принципе сведения для дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Там же.— 1975.— **27**, № 2.— С. 240—246.
8. *Барис Я. С.* Принцип сведения в задаче об условной устойчивости // Мат. физика. 1979.— Вып. 26.— С. 3—6.
9. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений.— Алма-Ата : Наука, 1974.— 415 с.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 407 с.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Междунар. симп. по нелинейн. колебаниям (12—18 сент. 1961 г.).— Киев: Наук. думка, 1963.— Т. 1.— С. 93—154.
12. *Митропольский Ю. А.* Об исследовании интегрального многообразия для систем нелинейных уравнений, близких к уравнениям с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1958.— **10**, № 3.— С. 270—279.
13. *Митропольский Ю. А.* Об исследовании интегрального многообразия для систем нелинейных уравнений, близких к уравнениям с переменными коэффициентами в гильбертовом пространстве // Там же.— 1964.— **16**, № 3.— С. 334—338.
14. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М. : Наука, 1964.— 360 с.
15. *Лыкова О. Б.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статического решения // Докл. АН СССР.— 1957.— **115**, № 3.— С. 447—449.
16. *Лыкова О. Б.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит // Укр. мат. журн.— 1957.— **9**, № 4.— С. 419—431.
17. *Лыкова О. Б.* О некоторых свойствах решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами // Там же.— 1960.— **12**, № 3.— С. 267—278.
18. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
19. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах.— М. : Мир, 1966.— 229 с.
20. *Кноблох Г., Каппель Ф.* (*Knobloch H., Kappel T.*) Gewöhnliche Differentia lgleichungen.— Stutgart : Teubner, 1974.— 332 S.
21. *Aulbach B.* Continuous and Discrete Dynamics near Manifold of Equilibria.— Berlin etc.: Springer, 1980.— 140 p.
22. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий.— М. : Наука, 1988.— 256 с.
23. *Бакай А. С., Степановский Ю. П.* Адиабатические инварианты.— Киев : Наук. думка, 1981.— 283 с.
24. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия систем дифференциальных уравнений.— Киев, 1979.— 19 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 79.8).
25. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* О приближенных интегральных многообразиях систем нелинейных дифференциальных уравнений.— Киев, 1980.— 31 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.5).
26. *Барис Я. С.* Тексты лекций по части курса «Теория интегральных многообразий»: Уч. пособие.— Гомель: Гомел. ун-т, 1981.— 58 с.
27. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия в теории устойчивости.— Киев, 1988.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.48).
28. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. III // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 8.— С. 1033—1040.
29. *Лыкова О. Б.* Исследование локальных интегральных многообразий систем нелинейных дифференциальных уравнений // Всесоюзн. конф. «Нелинейн. проблемы дифференц. уравнений и мат. физики».— Тернополь, 1989.— 3 с.
30. *Лыкова О. Б.* Об исследовании решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном интегральном многообразии в случае резонанса // Укр. мат. журн.— 1958.— **10**, № 4.— С. 365—374.
31. *Лыкова О. Б.* Исследование решений нелинейных систем, близких к интегрирующимся, с помощью метода интегральных многообразий // Тр. Междунар. сим. по нелинейн. колебаниям.— Киев : Изд-во АН УССР, 1961.— Т. 1.— С. 315—327.
32. *Лыкова О. Б.* К теории локальных интегральных многообразий // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 3.— С. 19—28.
33. *Теория* показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
34. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова.— Киев : Наук. думка. 1981.— 412 с.

35. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. I // Укр. мат журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 411—418.
36. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. II // Там же.— 1988.— **40**, № 4.— С. 412—420.
37. *Барис Я. С.* Об одном методе построения приближенных интегральных многообразий // Докл. АН СССР.— 1988.— **301**, № 2.— С. 265—267.
38. *Лыкова О. Б.* О некоторых приближенных методах исследования интегральных многообразий.— Киев, 1987.— 24 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.61).
39. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного.— М. : Наука, 1965.— 424 с.
40. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб.— 1952.— **31**.— С. 575—586.
41. *Задирака К. В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Укр. мат. журн.— 1965.— **17**, № 1.— С. 47—63.
42. *Барис Я. С.* Об устойчивости решения нерегулярно возмущенной системы // Там же.— 1975.— **27**, № 6.— С. 723—728.
43. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Применение приближенных интегральных многообразий в теории устойчивости.— Киев, 1989.— 46 с.— (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 89.1).
44. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. I // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 12.— С. 107—113.
45. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. II // Там же.— 1990.— **42**, № 11.— С. 1315—1321.
46. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости // Докл. АН СССР.— 1990.— **311**, № 2.— С. 270—273.
47. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. III // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 10.— С. 1324—1329.
48. *Бакай А. С.* Асимптотические методы в теоретической физике // Проблемы асимптотической теории нелинейн. колебаний.— Киев : Наук. думка, 1981.— С. 17—42.
49. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* К вопросу о существовании интегральных многообразий // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 1.— С. 1—8.
50. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
51. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием : Метод. пособие.— Киев : Киев. ун-т, 1980.— 80 с.
52. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.— 534 с.

Получено 23.08.91