УДК 517.9

Ю. О. Митропольський, акад.,
І. О. Антонишин, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ),
А. К. Прикарпатський, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів),
В. Г. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

Симплектичний аналіз динамічних систем з малим параметром. Новий критерій стабілізації гомоклінічних сепаратрис та його застосування

Исследуются адиабатические инварианты нелинейных динамических систем автономного и неавтономного типа на симплектических многообразиях, в частности, критерии их существования и методы их явного построения. Проведен тщательный анализ явления расщепления гомоклинической сепаратрисы с особой точкой гиперболического типа, а также предложен новый, точный метод построения аналога μ-функции Мельникова, что дает необходимое и достаточное условие трансверсальности, который автоматически обобщен на случай динамической системы в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Досліджуються адіабатичні інваріанти нелінійних динамічних систем автономного і неавтономного типу на симплектичних многовидах, зокрема, критерії їх існування та методи їх явної побудови. Проведено грунтовний аналіз явища розщеплення гомоклінічної сепаратриси з особливою точкою гіперболічного типу, а також запропоновано новий, точний метод побудови аналога μ-функції Мельникова, що дає необхідні та достатні умови трансверсальності, який автоматично узагальнений на випадок динамічної системи в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Вступ. З часів класичних праць П. Еренфеста, Л. Больцмана, А. Пуанкаре і Е. Картана з теорії інтегральних і адіабатичних інваріантів скінченновимірних нелінійних динамічних систем [1, 2] добре відома та фундаментальна роль, яку відіграють внутрішні так звані приховані точні і наближені їх симетрії. У випадку, коли фазовий многовид вихідної нелінійної динамічної системи допускає інваріантну симплектичну структуру [3], цим симетріям згідно з теоремою Ньотер відповідають точні чи наближені інваріанти — закони збереження, які дають можливість за допомогою певного функціонального перетворення типу Гамільтона—Якобі одержати власне адіабатичні інваріанти, якщо динамічна система збурена векторним полем з малим параметром. Як правило, в багатьох випадках збурена динамічна система не зберігає вихідну симплектичну структуру на фазовому многовиді, що приводить до необхідності попередньої побудови нової симплектичної структури на ньому, якщо вона існує, або відповідного наближення до неї з достатнім степенем точності щодо малого параметра збурення. Якщо така наближена симплектична структура існує, то для вихідної збуреної нелінійної динамічної системи справедливий відповідний аналог (при стандартних обмеженнях на збурення) теореми Колмогорова — Арнольда — Мозера про збереження інваріантних многовидів у фазовому просторі для майже всіх неособливих початкових даних Коші [3]. Якщо дані Коші є особливі, то має місце ситуація, розглянута ще А. Пуанкаре, коли збурення вихідної динамічної системи приводить до розщеплення сепаратрис незбуреного векторного поля і до подальшої непрогнозованої поведінки траєкторій динамічної системи на фазовому просторі, що веде до їх стохастизації в певній його області [4, 5]. З цього приводу А. Пуанкаре писав: «Якщо спробувати уявити собі фігуру, утворену цими двома кривими (розщепленими вітками сепаратриси — авт.) і їх незчисленними перетинами, кожний з яких відповідає двоякоасимптотичному розв'язку, то ці перетини утворюють дещо подібне до гратки, тканини, сітки з нескінченно щільними петлями, жодна з двох кривих ніколи не повинна перетинати саму себе, але вона повинна обмотувати саму себе дуже складним чином, щоб перетнути нескінченне число разів всі петлі. Вражаєшся складності цієї фігури, яку я навіть не пробую зобразити. Ніщо не є більш придатним, щоб дати нам уявлення про складність задачі трьох тіл і, взагалі, всіх задач динаміки». Це означає, зокрема, що в околі сепаратриси траєкторії динамічної системи дуже чутливі до впливу малих збурень її векторного поля, що приводить до появи областей стохастичності в околі особливих точок.

Якщо ж мале збурення вихідної динамічної системи містить повільно змінні від часу параметри, то вона перестає бути на фазовому просторі автономною динамічною системою і втрачає сенс інваріантності симплектичної структури на ньому. Тим самим втрачає чіткий математичний зміст і сама задача опису її адіабатичних інваріантів при довільних малих неавтономних збуреннях вихідної динамічної системи.

Як відомо [1, 4], у випадку неавтономних малих збурень з повільно змінними в часі параметрами в околі сепаратрис порушується умова повільності [1, 3], в результаті чого траєкторії збуреної динамічної системи набувають здатності переходу через сепаратрису [4, 5]. Вперше це явище було досліджено ще П. Еренфестом для задачі коливання фізичного маятника повільно змінної довжини. Ним, зокрема, було встановлено плавний перехід траєкторії з області обертального руху до області з коливним рухом. В перехідній області фазового простору існують спеціальні локальні асимптотичні многовиди довільної степені порядку малості, які «зшивають» [1] примикаючі до перехідної області інваріантні многовиди різної топології. В цьому випадку неавтономна збурена система допускає так звані локальні адіабатичні інваріанти, значення яких при перетині сепаратриси змінюються стрибком, причому величина зміни може бути вказана з експоненціальною точністю майже для всіх інтегральних кривих. При скороченому описі [1] можна знайти ймовірність, з якою система набуває одне з багатьох можливих значень локального адіабатичного інваріанта при переході через сепаратрису.

Виходячи із складності описаної вище ситуації при **дослідженні** адіабатичних інваріантів неавтономно слабко збурених динамічних систем, в даній статті ми пропонуємо регулярну процедуру опису для цих адіабатичних інваріантів разом із критерієм їх існування, задача побудови якого була поставлена в [6]. А саме, покладемо в основу дослідження неавтономно слабко збурених динамічних систем метод симплектичного розширення вихідного фазового простору за допомогою інваріантних функцій [7—9] з подальшою побудовою нової симплектичної структури із певним степенем точності щодо малого параметра, яка буде інваріантною (наближено) відносно результуючої автономної динамічної системи. При цьому алгоритм знаходження симплектичної структури на основі так званого рівняння Лакса [7, 10, 11] одразу ж дає змогу описати топологічні структури областей, в яких перебуває в кожний заданий момент часу траєкторія динамічної системи, а також, використовуючи інтегральний інваріант Пуанкаре на розширеному фазовому просторі, стандартним чином будувати всі адіабатичні інваріанти вихідної неавтономно слабко збуреної динамічної системи.

Особлива увага в роботі приділена класичній задачі А. Пуанкаре про дослідження умов перетину стійких і нестійких інваріантних многовидів особливих гомо- і гетероклінічних орбіт гіперболічного типу [3, 12—14]. Ці умови трансверсальності для випадку планарних нелінійних динамічних систем були вперше сформульовані В. К. Мельниковим [4] і далі розвивались в роботах [8, 12—31]. В даній статті проведено детальний аналіз методу Мельникова [17, 23] і, зокрема, побудови характеристичної функції Мельникова [23], аналітичні властивості якої дають критерій трансверсальності. Встановлено, що μ-функція Мельникова не дає в загальному випадку критерію перетину ε-деформованих сепаратрис, оскільки вона містить в собі неконтрольовану похибку порядку $O(\varepsilon)$, що є недостатнім для застосувань. В результаті цього аналізу запропоновано більш тонкий і точний критерій трансверсальності стійких і нестійких інваріантних множин гомоклінічної орбіти, що узагальнюється автоматично на випадок ε-збуреної динамічної системи, заданої в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При цьому введена μ-функція типу Мельникова і асоційований з нею набір інтегральних співвідношень, які дають ефективний критерій трансверсальності. Зокрема, в рамках запропонованого методу можна також вивчати інваріантні гіперповерхні перетину цих множин, що у випадку їх гладкості приводять до структурної перебудови фазового портрету ε-деформації вихідної динамічної системи.

1. **Інтегральні інваріанти Пуанкаре—Картана. Метод Гамільтона—Якобі.** Нехай на скінченновимірному симплектичному многовиді $(M^{2n}, \omega^{(2)}, n \in N)$ задана нелінійна гамільтонова динамічна система

$$u_t = K[u], \tag{1}$$

де $K: M \to T(M)$ — гладке векторне поле на $M \ni u$, $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр і $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ — відповідна симплектична структура [3,10]. Припустимо додатково, що на M існує рівно $n \in \mathbb{N}\left(n = \frac{1}{2}\dim M^{2n}\right)$ інволютивних і функціонально незалежних законів збереження $P_j \in \mathcal{D}(M)$, $j = \overline{1, n}$, причому підмноговид рівня $M_p = \{u \in M : P_j[u] = p_j \quad j = \overline{1, n}\}$, де $p_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, — деякі числа, — компактний підпростір в M. Тоді, як відомо [3,10], теорема Ліувілля стверджує, що динамічна система (1) на M є цілком інтегровною, причому канонічно спряжена інволютивна система функцій $Q = \{Q_j \in \mathcal{D}(M) : j = \overline{1, n}\}$ до інволютивної системи інваріантів $P = \{P_j \in \mathcal{D}(M) : j = \overline{1, n}\}$, де $\{Q_j, P_k\}_\omega = \delta_{jk}$, $j, k = \overline{1, n}$, будується за допомогою квадратур. У зв'язку з подальшим використанням цього твердження приведемо короткий виклад його доведення.

Нехай точка $u \in M_p$ має в локальних координатах многовиду M_p представлення виду $u = u(S, P)$, де вибір системи функцій $S = \{S_j \in \mathcal{D}(M) : j = \overline{1, n}\}$ є довільним. Нехай 1-форма $\varphi^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ така, що $d\varphi^{(1)} = \omega^{(2)}$, де $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ — задана симплектична форма на M. Форма $\varphi^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ завжди існує в силу замкнутості 2-форми $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$, тобто

$d\omega^{(2)} = 0$ на M, і лемі Пуанкаре [1, 32]. Локально в координатах $\{S; P\}$ 1-форму $\varphi^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ можна записати у вигляді

$$\varphi^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} a_j [S, P] \, dP_j + \sum_{j=1}^{n} b_j [S, P] \, dS_j, \tag{2}$$

де $a_j, b_k \in \mathscr{D}(M)$, $j, k = \overline{1, n}$, — певні гладкі функції. В силу інволютивності системи функцій $P \subset \mathscr{D}(M)$ знаходимо, що на підмноговиді $M_p \subset\to M$ 2-форма $\omega^{(2)}|_{M_p} = 0$. Тоді відповідне обмеження 1-форми $\varphi^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ на підмноговид M_p локально буде повним диференціалом від деякої функції $\tilde{Q} \in \mathscr{D}(M)$, тобто $\varphi^{(1)}|_{M_p} = d\tilde{Q} \in \Lambda^1(M_p)$. Остання рівність з урахуванням представлення (2) веде до співвідношення на M:

$$\varphi^{(1)} = d\tilde{Q} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j - \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial P_j} \right) dP_j. \tag{3}$$

Якщо ввести величини $Q_j = -a_j + \dfrac{\partial \tilde{Q}}{\partial P_j} \in \mathscr{D}(M)$, $j = \overline{1, n}$, то форма $\varphi^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ (3) набуде вигляду $\varphi^{(1)} = d\tilde{Q} - \sum_{j=1}^{n} Q_j dP_j$, звідки для форми $\omega^{(2)} = d\varphi^{(1)} \in \Lambda^2(M)$ знаходимо канонічний вираз

$$\omega^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} dP_j \wedge dQ_j. \tag{4}$$

В силу невиродженості симплектичної структури $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ знаходимо, що всі множини функцій $P, Q \subset \mathscr{D}(M)$ функціонально незалежні на M, причому $\{Q_j, Q_k\} = 0 = \{P_j, P_k\}$, $\{P_j, Q_k\}_\omega = \delta_{j,k}$, $j, k = \overline{1, n}$, тобто інволютивна система функцій $Q \subset \mathscr{D}(M)$ канонічно спряжена до такої ж системи функцій $P \subset \mathscr{D}(M)$, що і треба було встановити. Зокрема, в змінних $\{Q; P\}$ еволюція динамічної системи (1) лінійна, тобто $Q_j = c_j(t - t_0) + Q_{j0} \in \mathbb{R}$, $P_j = p_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, де $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, — деякий набір «швидкостей».

Щоб перейти тепер до інтегральних інваріантів Пуанкаре—Картана, розглянемо інваріантний многовид $M_p \subset\to M$ у випадку його компактності більш детально. В силу теореми Ліувілля [3, 32] многовид M_p, гомеоморфний T^n — n-вимірному тору. Нехай $\sigma_j \in H_1(M_p; \mathbb{Z})$, $j = \overline{1, n}$, — набір циклів на M_p, що утворює базис одномірної групи гомологій многовиду M_p, і розглянемо такі інтеграли:

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma_j} \varphi^{(1)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де, як і раніше, $\omega^{(2)} = d\varphi^{(1)} \in \Lambda^2(M)$ — вихідна симплектична структура на M. Легко бачити, що всі функції (5) — закони збереження на M для динамічної системи (1) і утворюють інволютивну функціонально незалежну систему функцій $\gamma \in D(M)$, причому, очевидно, $\gamma_j = \gamma_j[P]$, $j = \overline{1, n}$, і відображення $P \rightarrow \gamma$ — невироджене. Звідси випливає параметризація $P_j = P_j[\gamma]$, $j = \overline{1, n}$, яка відображає n-вимірний компакт M_p в компакт $M_p \subset\to M$. Введемо наступне багатозначне відображення згідно методу Гамільтона—Якобі [3]:

$$\Phi[\gamma, Q] = \int_{\sigma(Q, Q_0)} \varphi^{(1)} \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де $\sigma(Q, Q_0)$ — деякий гладкий шлях з початком в точці $Q_0 \in M_\gamma$ і кінцем в точці $Q \in M_\gamma$, який лежить на торі M_γ. За допомогою (6) будуємо канонічне перетворення $\tilde{\Phi}(\gamma, \theta) \to (P, Q)$, де $\theta = \{\theta_j \in \mathcal{D}(M): j = \overline{1, n}\}$ — нова інволютивна система функцій на M, що визначається з рівнянь

$$P_j = \partial\Phi/\partial Q_j, \ \theta_j = \partial\Phi/\partial\gamma_j, \ j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

які забезпечують інваріантність симплектичної структури (4), тобто $\tilde{\Phi}^*\omega^{(2)} = \omega^{(2)}$ на M. Використовуючи тепер (6) і (7), знаходимо, що для всіх $j, k = \overline{1, n}$

$$\int\limits_{\sigma_k} d\theta_j = \frac{\partial}{\partial\gamma_j}\int\limits_{\sigma_k} d\Phi = \frac{\partial}{\partial\gamma_j}\oint\limits_{\sigma_k}\varphi^{(1)} = 2\pi\frac{\partial\gamma_k}{\partial\gamma_j} = 2\pi\delta_{j,k},$$

тобто величини $\theta_j \in \mathcal{D}(M)$ на торі M_γ задають так звані кутові, чи циклічні змінні, а $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$ — змінні «дії». В термінах канонічної системи змінних $\{\theta; \gamma\}$ динамічна система (1) на M_γ задає квазіперіодичний рух з набором частот $\omega_j = \partial H[\gamma]/\partial\gamma_j$, $j = \overline{1, n}$, де $H[\gamma] \subset \mathcal{D}(M)$ — відповідний гамільтоніан системи (1).

Таким чином, ми побудували систему (5) інтегральних інваріантів Пуанкаре — Картана, еквівалентну вихідній системі інваріантів $P \in \mathcal{D}(M)$ для динамічної системи (1). В загальному випадку, коли динамічна система (1) має інтегральний інваріантний многовид $M_p \subset M$, на якому існують гомотопічно нетривіальні цикли $\sigma_j \in H_1(M_p; \mathbb{Z})$, $j = \overline{1, m_\gamma}$, $m_\gamma \leqslant n$, причому симплектична структура $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ інваріантна, тоді згідно з (5) всі функції $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j = \overline{1, m_\gamma}$, де

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\sigma_j}\varphi^{(1)} \tag{8}$$

— інваріанти динамічної системи. Дійсно, симплектична структура $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ інваріантна відносно векторного поля (1), коли виконана рівність $L_K\omega^{(2)} = 0$, де $L_K = i_K d + d i_K$ — похідна Лі [3, 32] в алгебрі Грасмана $\Lambda(M)$ диференціальних форм на многовиді M. З умови, що $dL_K = L_K d$ для довільного векторного поля $K: M \to T(M)$, із (8) знаходимо

$$d\gamma_j/dt = L_K\gamma_j = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_j} L_K\varphi^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_j} d\xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{D}(M), \quad \text{де} \quad j = \overline{1, m},$$

$L_K\varphi^{(1)} = d\xi$, так як $0 = L_K\omega^{(2)} \Rightarrow L_K d\varphi \Rightarrow dL_K\varphi^{(1)} \Rightarrow d^2\xi$. Зауважимо також, що в (8) форма $\varphi^{(1)} \in \Lambda^1(M)$ визначена з точністю до повного диференціала, який завжди можна вибрати так, щоб функція $\xi \equiv 0$. Отже, функції (8) визначають інтегральні інваріанти на M для (1), які в загальному випадку є гладкими функціями законів збереження $P_j \in \mathcal{D}(M)$, $j = \overline{1, m_p}$, $m_p < 2n$, які не обов'язково повинні бути в інволюції.

Щоб розширити клас можливих формул для знаходження інтегральних інваріантів нелінійної динамічної системи (1) на симплектичному многовиді M, зауважимо [1], що згідно з формулою Картана — Ньотер $L_K\omega^{(2)} = 0$ довільна функція

$$\mu_k = \int\limits_{M_p^{2n-k}} \left(\bigwedge_{j=1}^{n}\omega^{(2)}\right) / \bigwedge_{j=1}^{k} dP_j \in \mathcal{D}(M), \tag{9}$$

де $k = \overline{0,2n-1}$ — число можливих інваріантів динамічної системи (1), многовид $M_p^{2n-k} = \{u \in M^{2n}: P_j[u] = p_j \in \mathbb{R}, \ j = \overline{0, k}\}$ — гіперповерхня рівня інтегралів (1), $k = \overline{0,2n-1}$, є інтегральним інваріантом динамічної системи (1). Зокрема, у випадку повного комутативного набору інваріантів

$P=\{P_j \in \mathcal{D}(M): j=\overline{1,n}\}$ формула (9) набуде вигляду

$$\mu_n = \int\limits_{M_p^n} \bigwedge_{j=1}^{n} (\omega^{(2)}/dP_j) = \int\limits_{M_p^n} \bigwedge_{j=1}^{n} dQ_j = \prod_{j=1}^{n} \oint\limits_{\sigma_j} dQ_j = \prod_{j=1}^{n} l[\sigma_j].$$

Таким чином, μ_n — добуток «довжин» $l[\sigma_j] \in \mathbb{R}_+$, $j=\overline{1,n}$, σ-циклів на торі $T^n = \bigotimes_{j=1}^{n} \sigma_j \simeq M_p^n$, або (згідно з теоремою Ліувілля [3]) симплектичний об'єм $\mu_n(M_p^n)$ фазового простору орбіт $M_p^n \subset\to M$. У випадку $n=1$ маємо два очевидні інваріанти: $\mu_0 = \int\limits_{M_h} \omega^{(2)} = \int\limits_{M_h} d\varphi^{(1)} = \int\limits_{\sigma_1 = \partial M_h} \varphi^{(1)}$ — об'єм фазового простору гіперповерхні рівня функції Гамільтона $H \in \mathcal{D}(M^2)$ і $\mu_1 = \oint\limits_{\sigma_1} \omega^{(2)}/dH = l[\sigma_1]$ — довжина замкнутої орбіти відповідної гамільтонової системи.

2. Адіабатичні інваріанти автономних слабко збурених нелінійних динамічних систем з малим параметром. Розглянемо автономне слабке збурення динамічної системи (1) у вигляді

$$u_t = K[u;\varepsilon] = K[u] + \varepsilon F[u;\varepsilon], \tag{10}$$

де залежність від малого параметра $\mathbb{R} \ni \varepsilon \to 0$ вважається аналітичною. Якщо при $\varepsilon = 0$ динамічна система (10) допускає інтегральні інваріанти (8) відносно симплектичної структури $\omega^{(2)} = d\varphi^{(1)} \in \Lambda^2(M)$, то при деформації (10) деякі цикли з $\{\sigma_j \in H_1(M_p; \mathbb{Z}): j=\overline{1,m_\gamma}\}$ на інваріантних многовидах M_p руйнуються [1, 3, 5]. Якщо $\sigma_{(j)} \in H_1(M_{p(\varepsilon)}; \mathbb{Z})$ — ті цикли на збуреному інтегральному многовиді $M_{p(\varepsilon)} \subset\to M$, що залишились, то за формулою типу (8)

$$\gamma_{(j)} = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\sigma_{(j)}} \varphi^{(1)}(\varepsilon) \tag{11}$$

знаходимо адіабатичні інваріанти $\gamma_{(j)} \in \mathcal{D}(M)$, де $\varphi^{(1)}(\varepsilon) \in \Lambda^1(M)$ — збурена 1-форма на M, яка задає збурену симплектичну структуру $\omega^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(M)$ і інваріантна відносно векторного поля (10) з високим порядком точності щодо малого параметра $\varepsilon \to 0$. Якщо така деформація щодо параметра $\varepsilon \to 0$ симплектичної структури $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ існує, то адіабатичні інваріанти (11) існують [1] згідно з загальними результатами в рамках теореми Колмогорова—Арнольда—Мозера. Для визначення адіабатичного інваріанта [1, 3, 27] будемо користуватись наступними визначеннями.

Визначення 1. *Функція $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ називається адіабатичним інваріантом слабко збуреної нелінійної динамічної системи $u_t = K[u;\varepsilon]$ на многовиді $M \ni u$, якщо для довільного $\eta > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що*

$$\sup_{t \in [0,1/\varepsilon]} |\gamma[u;\varepsilon] - \gamma[u_0;0]| < \eta \tag{12}$$

для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$ рівномірно за даними Коші $u_0 \in M$. Якщо вираз (12) справедливий для майже всіх $u_0 \in M$ з точністю до множини малої міри, то функцію $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ називають майже, або квазіадіабатичним інваріантом.

Визначення 2. *Адіабатичний інваріант $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ будемо називати сильним, якщо існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$*

$$\sup_{t \in [0,1/\varepsilon]} |\gamma[u;\varepsilon] - \gamma[u_0;0]| = O(\varepsilon). \tag{13}$$

Наслідок 1. *Нехай функція $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ така, що для всіх $t \in [0, 1/\varepsilon]$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$*

$$d\gamma[u;\varepsilon]/dt = O(\varepsilon^2). \tag{14}$$

Тоді $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ — сильний адіабатичний інваріант на M.

Вище ми зробили суттєве припущення: ε-деформація векторного поля (10) зберігає її гамільтоновість у достатньо високому порядку щодо малого параметра $\varepsilon \to 0$, що дає можливість скористатись КАМ-теорією про збереження інваріантних многовидів [1, 3, 5]. Якщо ж така ε-деформація симплектичної структури для (10) відсутня, проблема існування адіабатичних інваріантів залишається відкритою, і в більшості випадків вони не існують. Мотивацією цього твердження є той факт, що з існування ε-деформації $\omega^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(M)$ симплектичної структури [33] для (10) на многовиді M існує; інваріантна відносно (10) міра об'єму $d\mu(u; \varepsilon) = (\omega^{(2)})^n(u; \varepsilon)$, $u \in M^{2n}$ в противному випадку такої міри на M^{2n} не існує, що приводить по відношенню до міри $d\mu(u) = (\omega^{(2)})^n(u) \in \Lambda^{2n}(M)$ до явища дисипації [34] множини траєкторій з даними Коші із області $\delta M \subset M$ при $t = t_0$, так як величина $\mu(\delta M(t))$ при $t \neq t_0$ не зберігається згідно з теоремою Ліувілля [1, 3, 10]. Тим самим неіснування симплектичної деформації $\omega^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(M)$ для динамічної системи (10) може служити ефективним критерієм існування для (10) адіабатичних інваріантів [5, 35].

Щоб сформулювати в аналітичному вигляді вказаний вище критерій, розглянемо елемент $\varphi \in T^*(M)$ і лінійне векторне рівняння Лакса [7, 10, 11] $L_K\varphi = 0$, що еквівалентне такому:

$$\varphi_t + K'^{*} \cdot \varphi = 0, \tag{15}$$

де K' — матриця Якобі вектора $K[u; \varepsilon] \in T_u(M)$ в точці $u \in M$, $*$ — операція спряження відносно стандартної білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $T^*(M) \times T(M)$, причому вважаємо, що $T^*(M) \simeq T(M)$. Враховуючи, що $\partial\varphi/\partial t = 0$ (однорідність елемента $\varphi \in T^*(M)$), із (15) знаходимо

$$\begin{aligned}\varphi_t + K'^{*} \cdot \varphi &= \varphi' \cdot K - \varphi'^{*} \cdot K + \varphi'^{*} \cdot K + K'^{*} \cdot \varphi = \\ &= (\varphi' - \varphi'^{*}) \cdot K + \operatorname{grad}\langle \varphi, K \rangle = \omega \cdot K + \operatorname{grad} H = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

де за визначенням $\omega = \varphi' - \varphi'^{*}$ — кососиметрична матриця симплектичної структури $\omega^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(M)$, що визначається за стандартним правилом $\omega^{(2)}(\varepsilon) = -\dfrac{1}{2}\langle du, \wedge\, \omega[u; \varepsilon]\, du \rangle$, $\wedge$ — звичайна операція [3] зовнішнього добутку в алгебрі Грасмана $\Lambda(M)$; $\langle \varphi, K \rangle = H \in \mathscr{D}(M)$ — функція Гамільтона динамічної системи (10) у випадку розв'язності рівняння Лакса (15). Дійсно, нехай $\{\cdot, \cdot\}_\omega = \langle \operatorname{grad}(\cdot), \mathscr{L} \operatorname{grad}(\cdot) \rangle$, де $\mathscr{L} = \omega^{-1}: T^*(M) \to T(M)$ — так званий імплектичний (косимплектичний) [7] оператор на многовиді M. Тоді рівність (16) еквівалентна такій гамільтоновій формі запису на M відносно пуассонової структури $\{\cdot, \cdot\}_\omega$ динамічної системи (10)

$$u_t = \{H, u\}_\omega = -\mathscr{L}(\varepsilon) \operatorname{grad} H(\varepsilon) = K[u; \varepsilon]. \tag{17}$$

Зауважимо, що якщо рівняння Лакса (15) допускає розв'язок $\varphi[u; \varepsilon] \in T^*(M)$ деякого порядку щодо параметра $\varepsilon \to 0$, то відповідно динамічна система (10) буде гамільтоновою того ж порядку щодо параметра $\varepsilon \to 0$. Отже, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Достатньою умовою існування адіабатичного інваріанта автономно слабко збуреної нелінійної динамічної системи* (10) *є розв'язність у високому порядку малого параметра* $\varepsilon \to 0$ *характеристичного рівняння Лакса* (15).

Рівняння Лакса в силу своєї лінійності допускає ряд методів їх розв'язку, найбільш ефективним серед яких є так званий асимптотичний μ-метод [7, 11], суть якого полягає в розвиненні невідомого розв'язку $\varphi[u; \varepsilon] \in T^*(M)$ в асимптотичний μ-ряд по степенях (u)-форм з використанням рекурентної процедури для їх визначення. А саме, нехай векторне поле (10) допускає μ-розклад

$$K[u; \varepsilon] = K^{(0)}[u^{(1)}; \varepsilon] + \mu K^{(1)}[u^{(1)}; \varepsilon] + \mu^2 K^{(2)}[u^{(1)}; \varepsilon] + \ldots, \tag{18}$$

де $u = u_0 + \mu u^{(1)} \in T(M)$, $\mu \to 0$ — новий малий параметр, $K^{(i)}[u^{(1)}; \varepsilon] \in$

$\in T(M)$ — відповідні (u)-форми j-го порядку, $j \in \mathbb{Z}_+$, причому в (18) ми припустили для зручності, що динамічна система (10) регулярна в точці $u_0 \in M^{2n}$. Розкладу (18) відповідає наступне μ-представлення для векторного поля $d/dt : M \to T(M)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_0} + \mu \frac{d}{dt_1} + \mu^2 \frac{d}{dt_2} + \dots, \tag{19}$$

де нова ієрархія еволюційних параметрів $t_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, визначається із співвідношень

$$du^{(1)}/dt_j = K^{(j+1)}[u^{(1)}; \varepsilon], \ j \in \mathbb{Z}_+. \tag{20}$$

Аналогічно покладемо тепер

$$\varphi[u; \varepsilon] = \varphi^{[0]}[u^{(1)}; \varepsilon] + \mu\varphi^{[1]}[u^{(1)}; \varepsilon] + \mu^2\varphi^{[2]}[u^{(1)}; \varepsilon] + \dots \tag{21}$$

і підставимо співвідношення (18)—(21) в характеристичне рівняння Лакса (15). В результаті одержимо рекурентну послідовність лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{gathered} \varphi_{t_0}^{[0]} + K_0'^{*} \cdot \varphi^{[0]} = 0, \\ \varphi_{t_0}^{[1]} + K_0'^{*} \cdot \varphi^{[1]} = - K_1'^{*} \cdot \varphi^{[0]}, \\ \varphi_{t_0}^{[2]} + K_0'^{*} \cdot \varphi^{[2]} = - K_1'^{*} \cdot \varphi^{[1]} - K_2'^{*} \cdot \varphi^{[0]} - \varphi^{[1]\prime} \cdot K^{(2)}, \dots \end{gathered} \tag{22}$$

і т. д., де $K^{(j+1)\prime} = K_j'$, $j \in \mathbb{Z}_+$. При розв'язанні системи рекурентних рівнянь (21) необхідно врахувати, що в силу малості параметра $\mu \to 0$ елементи $u_0 \in M$ і $u^{(1)} \in T(M)$ задовольняють лінеаризовані рівняння (10):

$$u_{t_0}^{(1)} = K_0' \cdot u^{(1)}, \ du_0/dt_0 = K^{(0)}[u^{(1)}; \varepsilon], \tag{23}$$

що випливають з (18) і (20) при $j = 0$, якщо врахувати очевидну тотожність $K_0' \cdot u^{(1)} \equiv K^{(1)}[u^{(1)}; \varepsilon]$, $u^{(1)} \in T(M)$.

В загальному випадку розклад (21) містить щодо степенів параметра $\mu \to 0$ нескінченне число членів, що з аналітичної точки зору є нерозв'язною ситуацією. Але враховуючи, що в нашій вихідній задачі (10) міститься ще один, основний малий параметр $\varepsilon \to 0$, то очевидно ряд (21) необхідно обірвати на тому члені $\varphi^{[l]}[u^{(1)}; \varepsilon]$, $l \in \mathbb{Z}_+$, для якого виконана умова асимптотичної малості: $\varphi^{[l]}[u^{(1)}; \varepsilon] = 0(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$. Останнє зауваження спрощує задачу аналітичного використання на практиці асимптотичного μ-методу, особливо у тому випадку, коли вихідна динамічна система (10) при $\varepsilon = 0$ гамільтонова на фазовому просторі M.

Другим суттєвим зауваженням до методу побудови нескінченної ієрархії (u)-форм в (21) є таке: так як адіабатичний інваріант $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ для (10) визначається за формулою (11), то очевидно, що ті компоненти $\varphi^{[l]}[u^{(1)}; \varepsilon] \in T^*(M)$, для яких виконана умова градієнтності Вольтери [11, 36] вигляду $(\varphi^{[l]}[u^{(1)}; \varepsilon])' = (\varphi^{[l]}[u^{(1)}, \varepsilon])'^{*}$, $u^{(1)} \in T(M)$, вкладу в адіабатичний інваріант $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ не вносять. Звідси випливає, що ряд (21) ефективно з точки зору практичного застосування обривається на тому порядку $l \in \mathbb{Z}_+$ (u)-форми $\varphi^{[l]}[u^{(1)}; \varepsilon] \in T^*(M)$, для якого виконана вказана вище умова градієнтності Вольтери, так як всі наступні (u)-форми $\varphi^{[j]}[u^{(1)}; \varepsilon] \in T^*(M)$, $j \geqslant l$, в силу рекурентності їх визначення та обмеженості μ-порядку для фунції Гамільтона $H \in \mathcal{D}(M)$ будуть теж задовольняти умову Вольтери.

Відзначимо також апріорну можливість отримання загального розв'язку $\varphi[u; \varepsilon] \in T^*(M)$ рівняння Лакса (15), який є нерегулярним щодо параметра $\varepsilon \to 0$, тобто границя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi[u; \varepsilon] \notin T^*(M)$ не існує в $T^*(M)$. Це свідчить, зокрема, про те, що динамічна система (10) при $\varepsilon = 0$ апріорі може бути гамільтоновою на фазовому просторі M, але не завжди допускає симплектичну деформацію при $\varepsilon \neq 0$. Звідси випливає, що адіабатичний інваріант (11) для динамічної системи (10) може бути визначений, так як симплектична структура $\omega[u;\varepsilon] = \varphi'[u;\varepsilon] - \varphi'^*[u;\varepsilon]$ може не містити в собі сингулярних ε-членів при $\varepsilon \to 0$, яких також не має в цьому випадку і в формулі (11), і симплектична деформація $\omega^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(M)$ має при $\varepsilon \to 0$ регулярну границю.

Приклад 1. Розглянемо на фазовому просторі $M = \mathbb{R}^2$ автономно слабко збурену нелінійну динамічну систему типу Хенона—Хейлеса [3, 37]:

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= y + \varepsilon xy(x-y) + \varepsilon xy \\ dy/dt &= -\Omega^2 x + \varepsilon(x^2 - y^2)/2 - \varepsilon\Omega^2 x^2(x-y) \end{aligned}\right\} = K[x, y; \varepsilon], \tag{24}$$

де $\Omega \in \mathbb{R}_+$ — частота коливань, $\varepsilon \to 0$ — малий параметр. Векторне поле (24), згідно з (19) і (20), має μ-розклад

$$\begin{gathered} du^{(1)}/dt_0 = K^{(1)}[u^{(1)};\varepsilon] = (y^{(1)}, -\Omega^2 x^{(1)})^\tau, \\ du^{(1)}/dt_1 = K^{(2)}[u^{(1)};\varepsilon] = (\varepsilon x^{(1)} y^{(1)}, \varepsilon(x^{(1)2} - y^{(1)2})/2)^\tau, \\ du^{(1)}/dt_2 = K^{(3)}[u^{(1)};\varepsilon] = (\varepsilon x^{(1)} y^{(1)}(x^{(1)} - y^{(1)}), -\varepsilon\Omega^2 x^{(1)2}(x^{(1)} - y^{(1)}))^\tau, \\ du^{(1)}/dt_n = K^{(n+1)}[u^{(1)};\varepsilon] \equiv 0, \ n \geqslant 3, \end{gathered} \tag{25}$$

де за визначенням $u_0 = 0 \in M$, $u^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})^\tau \in T(M)$. Відповідний μ-розклад маємо також для спряженої матриці похідної Фреше $K'^*[u;\varepsilon]$:

$$\begin{gathered} K_0'^*[u^{(1)};\varepsilon] = \left\|\begin{matrix} 0 & -\Omega^2 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad K_1'^*[u^{(1)};\varepsilon] = \left\|\begin{matrix} \varepsilon y^{(1)} & \varepsilon x^{(1)} \\ \varepsilon x^{(1)} & -\varepsilon y^{(1)} \end{matrix}\right\|, \\ K_1'^*[u^{(1)};\varepsilon] = \left\|\begin{matrix} (2x^{(1)} - y^{(1)})\, y^{(1)} & \varepsilon\Omega^2 x^{(1)}(2y^{(1)} - 3x^{(1)}) \\ x^{(1)}(x^{(1)} - 2y^{(1)}) & \varepsilon\Omega^2 x^{(1)2} \end{matrix}\right\|. \end{gathered} \tag{26}$$

При $\varepsilon \to 0$ динамічна система (23) вироджується до звичайного лінійного осцилятора, симплектична структура якого $\omega^{(2)} = dy \wedge dx$ — канонічна. Розглянемо розв'язок рівняння Лакса (15) для векторного поля (24) такий, що при $\varepsilon \to 0$ породжує симплектичну структуру $\omega^{(2)} = dy \wedge \wedge dx$. При $\mu \to 0$ розглянемо асимптотичний розклад (21), де $\varphi^{[0]}(\varepsilon) = 0$, $\varphi^{[1]}(\varepsilon) = \frac{1}{2}(y^{(1)}, -x^{(1)})^\tau$. Тоді, розв'язуючи рекурентно рівняння (22), знаходимо

$$\varphi[u;\varepsilon] = \frac{1}{2}(y + \varepsilon xy^2, -x + 2\varepsilon x^3/3)^\tau/\{\mathrm{mod}\,(\mathrm{grad}\,\mathscr{D}(\mathbb{R}^2))\} + O(\varepsilon^2). \tag{27}$$

Відповідна симплектична структура $\omega^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(M)$ задається явною формулою

$$\omega^{(2)}(\varepsilon) = [1 + \varepsilon x(y - x)]\, dy \wedge dx, \tag{28}$$

що є наслідком загальної формули

$$\omega^{(2)}(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\langle du, \wedge\, \omega[u;\varepsilon]\, du\rangle, \tag{29}$$

де $\omega[u;\varepsilon] = \varphi'[u;\varepsilon] - \varphi'^*[u;\varepsilon]$. Причому у випадку (27) симплектичний оператор $\omega[u;\varepsilon] : T(M) \to T^*(M)$ задається матрицею

$$\omega[u;\varepsilon] = [1 + \varepsilon x(y - x)]\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\| + O(\varepsilon^2), \tag{30}$$

що й приводить до результату (28).

Перейдемо тепер до розгляду згідно з (11) виразу для адіабатичного інваріанта $\gamma \in \mathscr{D}(M)$ для динамічної системи (24):

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_\sigma \varphi^{(1)}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \oint_\sigma [-(x - 2\varepsilon x^3/3)\, dy + (y + \varepsilon x y^2)\, dx] + O(\varepsilon^2), \quad (31)$$

де $\varphi^{(1)}(\varepsilon) = \langle \varphi[u; \varepsilon], du \rangle$, контур $\sigma \in H_1(M_{h(\varepsilon)}; \mathbb{Z})$ визначається інтегральним многовидом $M_{h(\varepsilon)} = \{u \in M : H(\varepsilon) = h \in \mathbb{R}_+\}$, $H(\varepsilon) \in \mathscr{D}(M)$ — відповідна функція Гамільтона для динамічної системи (24). Оскільки функція Гамільтона $H \in \mathscr{D}(M)$ для динамічної системи (10) визначається за розв'язком рівняння (15) формулою $H = \langle \varphi, K \rangle$, використовуючи розширений градієнтними членами розв'язок (27), знаходимо

$$H(\varepsilon) = \frac{1}{2} [y^2 + \Omega^2 x^2 + \varepsilon (x y^2 - x^3/3)] + O(\varepsilon^2) = h,$$

що є нормальною формою Біркгофа функції Гамільтона на $\mathbb{R}^2$ із резонансами частот третього порядку [3, 37].

Тоді для елемента $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на кривій $\delta \subset M_{h(\varepsilon)}$ маємо вираз

$$y^2 = 2h - x^2\Omega^2 + \varepsilon [x^3/3 - (2h - x^2\Omega^2) x] + O(\varepsilon^2). \quad (32)$$

Вибираючи параметр $h \in \mathbb{R}_+$ в (32) так, що многовид $M_{h(\varepsilon)} \subset_\to M$, який задається алгебраїчною кривою (32), компактний і без межі, тобто межа $\partial M_{h(\varepsilon)} = \varnothing$, знаходимо, що замкнений контур $\sigma = M_{h(\varepsilon)} \subset_\to M$. Виконавши інтегрування по контуру $\sigma \subset_\to M$ в (31), знайдемо

$$\gamma = \frac{h}{\Omega} \left(1 - \frac{\varepsilon h}{2\Omega^2} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (33)$$

Таким чином, з (33) видно, що при достатньо великих значеннях енергії динамічної системи (24), тобто при $h \simeq \Omega^2$, ε-поправка в (33) до адіабатичного інваріанта $\gamma \in \mathscr{D}(M)$ є суттєвою, так як при її відсутності не виконана умова адіабатичності (14). Такого ж типу результати отримані в [6].

3. Адіабатичні інваріанти неавтономно слабко збурених нелінійних динамічних систем з малим параметром. Нехай автономна нелінійна динамічна система (1) на фазовому просторі M неавтономно слабко збурюється до вигляду

$$u_t = K[u; \tau, \varepsilon] = K[u] + \varepsilon F[u; \tau, \varepsilon], \quad (34)$$

де $\tau = \varepsilon t \in \mathbb{R}$ — повільно змінний еволюційний параметр, $\mathbb{R} \ni \varepsilon \to 0$ — малий параметр. Динамічна система (34) вже неавтономна, тому прямо застосувати результати попереднього розділу ми не можемо. Окрім того, наявність повільної залежності (34) від параметра $\tau \in \mathbb{R}$ може суттєво порушуватись в області сепаратрис [1, 3], через що особливо важливою є задача побудови ефективного критерію існування адіабатичного інваріанта при вказаних вище умовах. Особливо цікавою задачею з точки зору теорії є дослідження критичного випадку динамічної системи (34), що допускає при $\varepsilon \neq 0$ адіабатичний інваріант $\gamma(\varepsilon) \in \mathscr{D}(M)$, що задовольняє умові (14) при $\varepsilon \to 0$, але при цьому $\lim \gamma(\varepsilon) \notin \mathscr{D}(M)$, хоча регулярна границя (34) при $\varepsilon \to 0$ існує всюди на M. Така ситуація, як правило, виникає тоді, коли вихідна незбурена нелінійна динамічна система (1) не є гамільтоновою.

Аналогічно методу [11] в основу аналізу неавтономно збуреної динамічної системи покладемо процедуру розширення фазового простору $M \to \tilde{M} = M^{2n+2} \simeq M^{2n} \times \mathbb{R}^2$ за допомогою двох нових однорідних змінних: $(\tau, p)^\tau \in \mathbb{R}^2$ (тут τ над дужкою — операція транспонування, яку по контексту необхідно відрізняти від нової змінної $\tau = \varepsilon t \in \mathbb{R}$). Тим самим динамічна система (34) на $\widetilde{M}$ стає автономною і набуває такого вигляду:

$$\left.\begin{aligned} du/dt &= K[u;\ \tau,\ \varepsilon p] \\ d\tau/dt &= \varepsilon p \\ dp/dt &= 0 \end{aligned}\right\} = \widetilde{K}[u,\ \tau,\ p;\ \varepsilon],\ \ p = 1, \tag{35}$$

до якого можна застосувати результати, викладені в п. 2. Отже нехай $\widetilde{\varphi} \in T^*(\widetilde{M})$ — розв'язок характеристичного рівняння Лакса (15)

$$d\widetilde{\varphi}/dt + \widetilde{K}'^* \cdot \widetilde{\varphi} = 0, \tag{36}$$

який можна отримати, наприклад, асимптотичним μ-розкладом (21). Якщо розв'язок (36) знайдено, принаймні, з точністю $O(\varepsilon^2)$ і при $\varepsilon \to 0$ симплектична структура $\widetilde{\omega}[u;\varepsilon] = \widetilde{\varphi}'[u;\varepsilon] - \widetilde{\varphi}'^*[u;\varepsilon]$ прямує до вихідної симплектичної структури $\widetilde{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} + dp \wedge d\tau$, де $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ — симплектична структура векторного поля $du/dt = K[u;\ 0,\ 0]$ на многовиді M, яка вважається апріорі заданою, у випадку, якщо $H \in \mathcal{D}(M)$ — функція Гамільтона векторного поля $du/dt = K[u;\ 0,\ 0]$ на многовиді M, то асимптотично при $\varepsilon \to 0$ функція Гамільтона $\widetilde{H}(\varepsilon) \in \mathcal{D}(\widetilde{M})$ для динамічної системи (35) буде рівна величині $\widetilde{H}(\varepsilon) \simeq H + \varepsilon p^2/2$.

Приклад 2. Розглянемо знову нелінійну динамічну систему типу Хенона—Хейлеса (24), де частота $\Omega = \Omega(\tau) \in \mathbb{R}_+$ — повільно змінна функція параметра $\tau = \varepsilon t \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= y + \varepsilon xyp(x - y) + \varepsilon xyp \\ dy/dt &= -\Omega^2(\tau)x + \varepsilon p(x^2 - y^2)/2 - p\varepsilon\Omega^2(\tau)x^2(x - y) \\ d\tau/dt &= p\varepsilon \\ dp/dt &= 0 \end{aligned}\right\} = \widetilde{K}[\widetilde{u};\ \varepsilon]. \tag{37}$$

Тут вектор $\widetilde{u} = (x,\ y,\ \tau,\ p)^\tau \in \widetilde{M} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, причому параметр «однорідності» $p \in \mathbb{R}$ вважатимемо довільним, поклавши його значення $p = 1$ в кінці розрахунку адіабатичного інваріанта

$$\widetilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\widetilde{M}) \to \gamma(\varepsilon) \in \mathcal{D}(M).$$

Використовуючи результати п. 2, знаходимо таке значення адіабатичного інваріанта:

$$\gamma = \frac{h(\tau) + \varepsilon/2}{\Omega(\tau)}\left[1 - \frac{\varepsilon h(\tau) + \varepsilon^2/2}{2\Omega^2(\tau)}\right] + O(\varepsilon^3). \tag{38}$$

Зауважимо лише, що при розрахунку інтегрального інваріанта $\widetilde{\gamma} \in D\,(\widetilde{M})$ за формулою

$$\widetilde{\gamma} = \frac{1}{2\pi}\oint_{\widetilde{\sigma}} \widetilde{\varphi}^{(1)}(\varepsilon) \tag{39}$$

необхідно спроектувати цикл $\widetilde{\sigma} \in H_1(\widetilde{M};\ \mathbb{Z})$ на підмноговид $\{\widetilde{u} \in \widetilde{M}_{h(\varepsilon)} : \widetilde{H}(\varepsilon) = h \in \mathbb{R}_+,\ p = 1,\ \tau = \varepsilon t = \mathrm{const}\} \subset M$, зберігши його замкненість. Остання умова служить критерієм того, що адіабатичний інваріант для заданої динамічної системи існує, причому вона дає можливість також дослідити явище переходу траєкторій через сепаратриси, пов'язане з їх руйнуванням [5, 15, 28—31, 35, 38—45].

4. Адіабатичні інваріанти неавтономних квазіперіодично слабко збурених нелінійних динамічних систем з малим параметром. Умови трансверсального перетину інваріантних многовидів і метод В. К. Мельникова. Будемо розглядати на скінченновимірному многовиді M^{2n} таку нелінійну неавтономну гладку динамічну систему з малим параметром $\varepsilon \to 0$:

$$du/dt = K[u, t; \varepsilon] = K[u] + \varepsilon F[u, \tau, \theta; \varepsilon], \tag{40}$$

де, за визначенням, $u \in M^{2n}$, $\tau = \varepsilon t \in \mathbb{R}$, $\theta \in T^m$ — m-вимірному тору з умовою, що для всіх $j = \overline{1, m}$

$$d\theta_j/dt = \Omega_j \in \mathbb{R}_+,\ \theta_j|_{t=t_0} = \theta_{j0} \in \mathbb{R}. \tag{41}$$

Будемо вважати, що вектор $\theta \in T^m$ є «кутовим» вектором змінних «дія — кут» деякої асоційованої нелінійної (або лінійної) динамічної системи Гамільтона на дифеоморфному T^m інтегральному многовиді $Q^m_g \cong T^m$, де вектор $g \in \mathcal{D}^m(Q)$ — елемент повної системи її інволютивних законів збереження на фазовому просторі Q^{2m}. Крім того, припустимо, що динамічна система (40) при $\varepsilon = 0$ є на многовиді M^{2n} гамільтоновою з функцією Гамільтона $H \in \in \mathcal{D}(M)$ і симплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$. Враховуючи викладене вище, представимо динамічну систему (40) в такому автономному вигляді:

$$d\tilde{u}/dt = \tilde{K}[\tilde{u}; \varepsilon] = \tilde{K}[\tilde{u}] + \varepsilon \tilde{F}[\tilde{u}], \tag{42}$$

де, за визначенням, $\tilde{u} = (u, v, \tau, p)^\tau \in M^{2n} \times Q^{2m} \times \mathbb{R}^2 \simeq \tilde{M}$, причому $v \in Q^{2m}$ тоді і тільки тоді, коли елемент $(g, \theta)^\tau \in \mathcal{D}^{2m}(Q)$ визначає інтегральний многовид $Q^m_g \simeq T^m$ згідно з конструкцією змінних «дія — кут» п. 1. В покомпонентному вигляді динамічна система (42) записується так:

$$\begin{gathered} du/dt = K[u] + p\varepsilon F_g[u, v, \tau; \varepsilon p], \\ dv/dt = G[v], \quad d\tau/dt = \varepsilon p, \quad dp/dt = 0, \quad p = 1, \end{gathered} \tag{43}$$

де $F_g \subset D(\tilde{M})$ — редукований набір функцій, еквівалентний на орбітах динамічної системи $dv/dt = G[v]$ (на многовиді Q^{2m}) ε-збуренню в (40) при фіксованому виборі інтегрального многовиду $Q^m_g \subset\!\!\to Q^{2m}$, дифеоморфного тору T^m з умовами (41). Тепер можна застосувати до автономної нелінійної динамічної системи (43) на многовиді $\tilde{M}$ результати п. 1 з метою одержання адіабатичних інваріантів. Зауважимо тільки, що при $\varepsilon = 0$ симплектична структура $\tilde{\omega}^{(2)} \in \Lambda^2(\tilde{M})$ задається сумою $\omega^{(2)}_M + \omega^{(2)}_Q + dp \wedge \wedge d\tau = \tilde{\omega}^{(2)}_M$, і очевидно, є невиродженою на $T(M)$. При $\varepsilon \neq 0$ симплектична структура $\tilde{\omega}^{(2)} \to \tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon)$, тобто деформується, причому в силу $O(\varepsilon^2)$-асимптотичної точності динамічної системи (43) необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{gathered} \tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon)|_Q = \omega^{(2)}_Q + O(\varepsilon^2) \in \Lambda^2(\tilde{M})|_Q, \\ \tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon)|_{(\tau,p)} = dp \wedge d\tau + O(\varepsilon^2) \in \Lambda^2(\tilde{M})|_{(\tau,p)} \end{gathered} \tag{44}$$

для всіх $\tilde{u} \in \tilde{M}$ і $(\tau, p)^\tau \in \mathbb{R}^2$ при $\varepsilon \to 0$. Разом з умовами (44) деформація симплектичної структури $\tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon)|_M$ визначається умовою Картана — Ньотер: $L_{\tilde{K}}\tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$. Сама симплектична структура $\tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(\tilde{M})$ визначається формулою [5]

$$\tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\langle \tilde{\omega}[\tilde{u};\varepsilon]\, d\tilde{u}, \wedge d\tilde{u}\rangle, \tag{45}$$

де $\tilde{\omega}[\tilde{u};\varepsilon] = \tilde{\varphi}'[\tilde{u};\varepsilon] - \tilde{\varphi}'^{*}[\tilde{u};\varepsilon]$ і $\tilde{\varphi}[\tilde{u};\varepsilon] \in T^{*}(\tilde{M})$ — розв'язок відповідного рівняння Лакса (36). Адіабатичний інваріант $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\tilde{M})$ вираховується за формулою (39), причому цикл $\tilde{\sigma} \subset \tilde{M}_{\tilde{h}}$, де $\tilde{h} \subset \mathcal{D}(\tilde{M})$— повна система інваріантів інтегрального многовиду $\tilde{M}_{\tilde{h}}$, визначена з точністю $O(\varepsilon^2)$. Сама еволюція (43) задається функцією Гамільтона $\tilde{H}(\varepsilon) = \langle \varphi(\varepsilon), \tilde{K}\rangle \in \mathcal{D}(\tilde{M})$, яка входить в систему функцій $\tilde{h} \in \mathcal{D}(\tilde{M})$. Є очевидним, що апріорне визначення умови компактності інтегрального многовиду, а також стійкості орбіти в околі сепаратриси динамічної системи (40) є проблематичним у загальному випадку. Тому скористаємося підходом робіт [8, 16—24, 46], в основі яких лежить так званий метод В. К. Мельникова [4].

Нехай початкові дані Коші для системи (43) такі, що при $\varepsilon = 0$ динамічна система $u_t = K[u]$, $u \in M$, породжує гомо- або гетероклінічну орбіту [8, 12] на M, а динамічна система $dv/dt = G[v]$, $v \in Q$,— періодичну орбіту на Q. Ставиться задача дослідження поведінки гомоклінічної сепаратриси при $\varepsilon \neq 0$, зокрема структури області її руйнування, що приводить до явища перетину близькими траєкторіями інваріантного многовиду динамічної системи (43) при $\varepsilon = 0$. Як наслідок, одержуємо в результаті неінтегровність нелінійної динамічної системи (43), тобто порушення умов стійкості інваріантного многовида згідно КАМ-теорії [23, 34], а також реалізацію явища стохастизації траєкторій в околі сепаратриси—так званий динамічний хаос. Останнє вимагає доведення існування спеціальних деформацій гомоклінічної сепаратриси, що мають назву «підкови Смейла» (Smale horseshoe) [5, 15, 21—26, 28—31, 38—40], яка відображає властивість асоційованого відображення Пуанкаре [12].

З метою подальшого використання наведемо такі визначення [12, 13].

Визначення 3. *Нехай задане векторне поле* (1) *на многовиді* M; *ω-граничною множиною* $\omega(u)$ *точки* $u \in M$ *називається множина* $\omega(u) = \{w \in M : \exists t_n \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ *і* $u(t_n) \to w\}$; *відповідно α-граничною множиною* $\alpha(u)$ *точки* $u \in M$ *називається множина* $\alpha(u) = \{w \in M : \exists t_n \in \mathbb{R}_-,\ \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$ і $u(t_n) \to w\}$, *де* $u(t_0) = u \in M$.

Наслідок 2. *Якщо* $\omega(u)$ — *ω-гранична множина точки* $u \in M$ *для векторного поля* (1) $u_t = K[u]$, *то* $\omega(u)$ — *α-гранична множина для векторного поля* $u_t = -K[u]$ *на многовиді* M.

Нехай $Q \subset N$ — гладкий підмноговид і $f : M \to N$ — диференційоване відображення.

Визначення 4. *Відображення* $f : M \to N$ *називається трансверсальним до* $Q \subset N$ *в точці* $u \in M$, *якщо або* $f[u] \notin Q$, *або* $f_{*}T_u(M) + T_{f[u]}(Q) = T_{f[u]}(N)$, *тобто якщо образ* $T_u(M)$ *при дії відображення* $f_{*} : T(M) \to T(N)$ *містить в собі підпростір в* $T_{f[u]}(N)$, *доповняльний до* $T_{f[u]}(Q)$. *Відповідно говоритимемо, що відображення* $f : M \to N$ *трансверсальне до* $Q \subset N$, $(f \pitchfork Q)$, *якщо воно трансверсальне в кожній точці* $u \in M$.

Нехай $\bar{u} \in M$ — особлива «нерухома» точка векторного поля (1), яка є гіперболічною [13], тобто матриця Якобі $K' : T(M) \to T(M)$ не має власних значень, що лежать на уявній осі комплексної площини $\mathbb{C}$. В цьому випадку наведемо такі визначення.

Визначення 5. *Множина точок* $W^s(\bar{u}) \subset M$, *для яких точка* $\bar{u} \in M$ *є ω-граничною множиною, називається стійким многовидом особливої точки* $\bar{u} \in M$. *Відповідно множина точок* $W^u(\bar{u}) \subset M$, *що мають точку* $\bar{u} \in M$ *в якості α-граничної множини, називається нестійким многовидом особливої точки* $\bar{u} \in M$.

Визначення 6. *Якщо* $\sigma \subset M$ *— гіперболічна* [13] *замкнена орбіта векторного поля* (1) *на многовиді* M, *то визначені стійкий і нестійкий многовиди* $W^s(\sigma)$ *і* $W^u(\sigma)$:

$$W^s(\sigma) = \{u \in M : \omega(u) = \sigma\},$$
$$W^u(\sigma) = \{u \in M : \alpha(u) = \sigma\}. \tag{46}$$

Визначимо тепер відображення Пуанкаре [8, 12, 13, 23, 24] для динамічної системи (43) за допомогою поперечного перерізу $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{u} \in \tilde{M} : \tilde{\mu}[\tilde{u}] = \tilde{\mu}[u, g[v]] = 0\}$, де функція $\tilde{\mu} \in \mathcal{D}(\tilde{M})$ задовольняє умову «трансверсальності»:

$$\langle \operatorname{grad} \tilde{\mu}[\tilde{u}], \tilde{K}[\tilde{u}; \varepsilon] \rangle \neq O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{47}$$

для всіх $\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}$. Введемо таке позначення: $\tilde{u}[g] = (u, Q_g^m \times \mathbb{R}^2_{(\tau, p)}) \subset \tilde{M}$. Так як множина функцій $g_j : Q \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$, інваріантна відносно динамічної системи (43), то легко бачити, що множина $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{M}$ розшаровується на множини виду $\tilde{u}[g] \subset \tilde{\Sigma}$, тобто

$$\tilde{\Sigma} = \bigcup_{u \in M} \tilde{u}[g], \quad \tilde{\mu}[\tilde{u}[g]] = 0. \tag{48}$$

Враховуючи, що динамічна система (43) допускає ε-деформацію симплектичної структури $\tilde{\omega}^{(2)}(\varepsilon) \in \Lambda^2(\tilde{M})$, умову (47) можна записати в еквівалентному вигляді так: для всіх $\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}$ $\{\tilde{H}, \tilde{\mu}\}_{\tilde{\omega}(\varepsilon)} \neq O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. В силу еволюції динамічної системи (43) при деякому значенні параметра $t_1 \in \mathbb{R}$ елемент $\tilde{u}_1[g] = \tilde{u}[g](t_1) \subset \tilde{\Sigma}$, де $t_1 > t_0 \in \mathbb{R}$, тобто $\tilde{\mu}[\tilde{u}_1] = 0$, і т. д. при зростанні параметра $t \in \mathbb{R}$. Тим самим визначено відображення Пуанкаре $\tilde{P}_\varepsilon : \tilde{\Sigma} \to \tilde{\Sigma}$, де $\tilde{P}_\varepsilon : \tilde{u}_n[g] \to \tilde{u}_{n+1}[g]$, $\tilde{u}_{n+1}[g] = \tilde{u}[g](t_{n+1}) \in \tilde{\Sigma}$, $t_{n+1} > t_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді очевидно, що вихідна динамічна система (40) допускає періодичний розв'язок лише тоді, коли існує деяке ціле число $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $\tilde{P}_\varepsilon^{n_0} : \tilde{u}_0[g] \to \tilde{u}_{t_{n_0}}[g] = \tilde{u}_0[g] \subset \tilde{\Sigma}$, причому період його дорівнює числу $T_0 = t_{n_0} - t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Якщо розв'язок $\tilde{u} \subset \tilde{M}$ динамічної системи (43) при $\varepsilon \to 0$ є близьким до її розв'язку при $\varepsilon = 0$, то відображення Пуанкаре $\tilde{\Sigma} \to \tilde{\Sigma}$ буде ε-близьким до відповідного відображення Пуанкаре $\tilde{P}_0 : \tilde{\Sigma} \to \tilde{\Sigma}$ при $\varepsilon = 0$. Нехай тепер множина $\tilde{\tilde{u}}[g; 0] \subset \tilde{M}$ — гіперболічна «нерухома» множина динамічної системи (43) при $\varepsilon = 0$. Тоді при $\varepsilon \to 0$ існує єдина деформація $\tilde{\tilde{u}}[g; 0] \to \tilde{\tilde{u}}[g; \varepsilon]$ до гіперболічної періодичної орбіти $\{\tilde{\tilde{u}}[g; \varepsilon](t) : t \in \mathbb{R}$, ε-близької до множини $\tilde{\tilde{u}}[g; 0] \subset \tilde{M}$. Відповідно відображення Пуанкаре $\tilde{P}_\varepsilon^{t_0} : \tilde{\Sigma}^{t_0} \to \tilde{\Sigma}^{t_0}$ має єдину гіперболічну «сідлову» множину $\tilde{\tilde{u}}_0[g; \varepsilon] \subset \tilde{\Sigma}^{t_0}$, близьку до множини $\tilde{\tilde{u}}[g; 0] \in \tilde{\Sigma}^{t_0}$, $t_0 \in \mathbb{R}$. При цьому період орбіти $\tilde{\tilde{u}}[g; \varepsilon]$ є кратним періоду динамічної системи $dv/dt = G[v]$ на многовиді Q згідно з формулою (41), а гіперболічність множини $\tilde{\tilde{u}}_0[g; \varepsilon] \subset \tilde{\Sigma}$ випливає з того, що матриця Якобі $\tilde{P}_0'[\tilde{\tilde{u}}_0]$ не містить у своєму спектрі одиниці, так що матриця $Id - \tilde{P}'[\tilde{\tilde{u}}]$ має обернену, забезпечуючи існування гладкої деформації $\tilde{\tilde{u}}[g;0] \to \tilde{\tilde{u}}_0[g;\varepsilon] \subset \tilde{\Sigma}$, тобто $\tilde{\mu}[\tilde{\tilde{u}}[g;0]] = 0 \Rightarrow \tilde{\mu}[\tilde{\tilde{u}}_0[g;\varepsilon]] = 0$, $\varepsilon \to 0$.

Справедлива така лема [23].

Лема 1. *Локально стійкий і нестійкий многовиди* $W^s_{\mathrm{loc}}[\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])$ *і* $W^u_{\mathrm{loc}}(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])$ *ε-деформованої періодичної обріти* $\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon] \subset \tilde{M}$ *є диференційовано ε-близькі до стійкого і нестійкого многовидів недеформованої гіперболічної множини* $\tilde{\tilde{u}}[g;0] \subset \tilde{M}$. *Більше того, якщо орбіта* $\tilde{\sigma}^+_\varepsilon[g] \in W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])$, *а орбіта* $\tilde{\sigma}^-_\varepsilon[g] \in W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])$, *то в околі перерізу Пуанкаре* $\tilde{\Sigma}^{t_0} \subset M$, $t_0 \in \mathbb{R}$, *для якого виконана умова* $g[v(t)]_{t=t_0} = g \in \mathbb{R}^m$ *справедливі такі рівномірні по* $t \in \mathbb{R}$ *ε-розклади*:

$$\tilde{\sigma}^+_\varepsilon[g](t,t_0) = \tilde{\sigma}_0[g](t-t_0) + \varepsilon\tilde{\sigma}^+_{0,1}[g](t,t_0) + O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, \infty),$$
$$\tilde{\sigma}^-_\varepsilon[g](t,t_0) = \tilde{\sigma}_0[g](t-t_0) + \varepsilon\tilde{\sigma}^-_{0,1}[g](t,t_0) + O(\varepsilon^2), \quad t \in (-\infty, t_0]. \tag{49}$$

При $\varepsilon = 0$ згідно з припущенням динамічна система (43) має гіперболічну особливу множину $\tilde{\tilde{u}}[g] \subset \tilde{M}$, а також замкнену гомоклінічну орбіту — сепаратрису $\tilde{\sigma}_0[g] = W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;0]) \cap W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;0])$, яка наповнена нетрансверсально гомоклінічними множинами з $\tilde{M}$ для відображення Пуанкаре $\tilde{P}_0 : \tilde{\Sigma}^{t_0} \to \tilde{\Sigma}^{t_0}$, $t_0 \in \mathbb{R}$. При $\varepsilon \neq 0$ ця структура буде, очевидно, руйнуватися з утворенням трансверсально гомоклінічних орбіт $\sigma^\pm_\varepsilon[g]$, $\varepsilon \to 0$, де для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\sigma}^+_\varepsilon[g] = \{\tilde{u} \subset \tilde{M} : \tilde{P}_\varepsilon \pitchfork_{\tilde{u}} W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon]), \tilde{P}_\varepsilon : \tilde{\Sigma}^{t_0} \cap W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon]) \to \tilde{\Sigma}^{t_0}\},$$
$$\tilde{\sigma}^-_\varepsilon[g] = \{\tilde{u} \subset \tilde{M} : \tilde{P}_\varepsilon \pitchfork_{\tilde{u}} W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon]), \tilde{P}_\varepsilon : \tilde{\Sigma}^{t_0} \cap W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon]) \to \tilde{\Sigma}^{t_0}\}. \tag{50}$$

При цьому, очевидно, повинна виконуватись [14] така нерівність: $\dim W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon]) + \dim W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon]) \geqslant 1 + \dim M^{2n}$. Щоб дослідити структуру руйнування сепаратриси $\tilde{\sigma}_0[g] \subset \tilde{M}$ динамічної системи (43) при $\varepsilon \neq 0$, використаємо метод Мельникова [4, 17, 23].

Нехай $t_0 \in \mathbb{R}$ — довільний еволюційний параметр. Тоді згідно з лемою 1 знаходимо, що при $\varepsilon \to 0$ справедлива асимптотична рівність

$$d\tilde{\sigma}^\pm_{0,1}[g]/dt = \tilde{K}'[\tilde{\sigma}_0[g](t-t_0)]\,\tilde{\sigma}^\pm_{0,1}[g] + \tilde{F}[\tilde{\sigma}_0[g](t-t_0)], \tag{51}$$

де верхній знак «+» відповідає значенням $t \in [t_0, \infty)$, а нижній «—» — значенням $t \in (-\infty, t_0]$. Введемо функцію галуження многовидів $W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])$ і $W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])$ на перерізі $\tilde{\Sigma}^{t_0}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, в «точці» $\tilde{\sigma}_0[g](0) \subset \tilde{M}$ таким виразом:

$$\tilde{\delta}(t_0) = \tilde{\sigma}^-_{0,1}(t_0, t_0) - \sigma^+_{0,1}(t_0, t_0). \tag{52}$$

Тоді справедлива теорема, що узагальнює на $2n$-вимірний випадок многовиду M^{2n} результати [4, 23].

Теорема 2. *Якщо вектор-функція* (52) *має по параметру* $t_0 \in \mathbb{R}$ *прості нулі, що є незалежні від параметра* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, *то для достатньо малих значень* $\varepsilon \to 0$ *множини* $W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon](t_0))$ *і* $W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon](t_0))$ *перетина-*

ються трансверсально. В противному разі виконана умова $W^s(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon] \times (t_0)) \cap W^u(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon](t_0)) \neq \varnothing$.

Значення теореми 2 згідно з результатами Біркгофа—Смейла [8, 12—14, 23—26] полягає в тому, що наявність трансверсально гомоклінічних орбіт в динамічній системі (43) приводить до існування інваріантної гіперболічної множини типу «підкови» Смейла.

Ця множина містить злічення число нестійких періодичних орбіт і незлічення число обмежених, неперіодичних і щільних орбіт, причому сама ця інваріантна множина може мати дробову фрактальну або хаусдорфову розмірності.

Щоб ефективно вивчати нулі вектор-функції (52), розглянемо попередньо більш детально властивості розв'язків рівняння (51) на многовиді $\tilde{M}$. В силу того, що $\dim \tilde{M}/Q \times \mathbb{R}^2 = 2m$, лінійна неоднорідна система (51) має повну систему розв'язків, дихотомічна структура якої в точці $\tilde{\sigma}_0[g](0) \in \in \tilde{\Sigma}^{t_0}$ має, зокрема, вигляд

$$\{\tilde{\sigma}^{+}_{0,1(j)}[g](t,t_0) \in T(\tilde{M}): j = \overline{1,2n}\} \subset T(W^s_{\mathrm{loc}}(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])),$$
$$\{\tilde{\sigma}^{-}_{0,1(j)}[g](t,t_0) \in T(\tilde{M}): j = \overline{1,2n}\} \subset T(W^u_{\mathrm{loc}}(\tilde{\tilde{u}}[g;\varepsilon])), \tag{53}$$

де для всіх $j = \overline{1,2n}$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\sigma}^{\pm}_{0,1(j)}[g](t,t_0) = \tilde{\tilde{\sigma}}_{0,1}[g](t,t_0;t_0)\tilde{\beta}^{\pm}_j(t_0) + \int\limits_{\pm\infty}^{t} d\tau\tilde{\tilde{\sigma}}_{0,1}[g](t,\tau;t_0) \times$$
$$\times \tilde{F}[\tilde{\sigma}_0[g](\tau - t_0);\tau], \tag{54}$$

$\tilde{\tilde{\sigma}}_0[g](t,\tau;t_0)$, $t,\tau,t_0 \in \mathbb{R}$, — фундаментальна матриця лінійної частини рівняння (51), нормована на одиницю: $\tilde{\tilde{\sigma}}_{0,1}[g](t,t;t_0) = 1$, $t,t_0 \in \mathbb{R}$ і $\tilde{\beta}^{\pm}_j(t_0) = (\delta_{1,j},\ldots,\delta_{2n,j})^{\tau}$, $j = \overline{1,2n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, — фіксовані вектори. Щоб розв'язати задачу трансверсальності перетину розщеплених віток сепаратриси $\tilde{\sigma}_0[g](t-t_0) \subset \tilde{M}$, в деякій точці $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$ задамо ці вітки такими апріорними виразами: $\tilde{\sigma}^{\pm}_{\varepsilon}(\pi) = \tilde{\sigma}_0[g](t-t_0) + \varepsilon\tilde{\sigma}^{\pm}_{0,1}(\tilde{\pi}) + O(\varepsilon^2)$, де

$$\tilde{\sigma}^{\pm}_{0,1}(\tilde{\pi}) = \tilde{\tilde{\sigma}}_{0,1}[g](t,t_0;t_0)\tilde{\pi}^{\pm}(t_0) + \int\limits_{\pm\infty}^{t} d\tau\tilde{\tilde{\sigma}}_{0,1}[g](t,\tau;t_0)\tilde{F}[\tilde{\sigma}_0[g](\tau-t_0);\tau], \tag{55}$$

а вектори $\tilde{\pi}^{\pm}(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, визначаються з умови

$$\tilde{\sigma}^{+}_{0,1}(\tilde{\pi}) = \tilde{\sigma}^{-}_{0,1}(\tilde{\pi}) \tag{56}$$

в деякій фіксованій точці $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$. Введемо тепер таку характеристичну $\tilde{\mu}^{-}$-функцію типу Мельникова. $\tilde{\mu}^{-}(t_0,\tilde{s}) = \tilde{\mu}(t_0,t_0;\tilde{s})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, де для всіх $t,t_0 \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\mu}^{-}(t,t_0,\tilde{s}) = \det\|\tilde{\sigma}^{+}_{0,1(1)} + \tilde{s}_1(t_0)\tilde{\sigma}^{+}_{0,1(2n)},\ldots,\tilde{\sigma}^{+}_{0,1(2n-1)} + \tilde{s}_{2n-1}(t_0)\tilde{\sigma}^{+}_{0,1(2n)},$$
$$\tilde{\sigma}^{-}_{0,1}(\tilde{\pi})\|(t,t_0) \tag{57}$$

і $\tilde{s}$-параметри $\tilde{s}_j(t_0) \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,2n-1}$, довільні. Задамо січну гіперповерхню $\tilde{\Sigma}^{t_0}$ відображення Пуанкаре такою умовою: для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$ $\tilde{\mu}^{-}(t_0;\tilde{s}) \equiv 0$. Звідси випливає, що існує така система $\tilde{\pi}$-функцій $\tilde{\pi}^{+}_j(t_0) \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,2n}$, що для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{2n} \tilde{\pi}_j^+ (t_0) \tilde{\sigma}_{0,1(j)}^+ [g] (t_0, t_0) = \tilde{\sigma}_{0,1}^- (\tilde{\pi}) (t_0, t_0). \tag{58}$$

Враховуючи (55), з (58) маємо

$$\tilde{\pi}^+ (t_0) = \tilde{\pi}^- (t_0) - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tilde{\tilde{\sigma}}_{0,1} (t_0, \tau; t_0) \tilde{F} [\tilde{\sigma}_0 [g] (\tau - t_0); \tau], \tag{59}$$

де $\tilde{\pi}^+ (t_0) = (\tilde{\pi}_1^+ (t_0), \ldots, \tilde{\pi}_{2n}^+ (t_0))^\tau$. З (55), зокрема, випливає що розщеплена вітка сепаратриси $\tilde{\sigma}_{0,1}^+ (\tilde{\pi}) (t, t_0) \subset \tilde{M}$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, для якої виконана умова перетину (58), існує тоді і лише тоді, коли знайдеться таке число $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$, що на січній гіперповерхні $\tilde{\Sigma}^{\bar{t}_0}$ виконана умова трансверсальності

$$\pi (t_0) = \sum_{j=1}^{2n} \tilde{\pi}_j^+ (\bar{t}_0) = 1, \tag{60}$$

тобто система π-функцій з проективного простору $\mathbb{R}P^{2n}$ в (60) стабілізована. З метою ефективного запису умови (60) продиференціюємо $\tilde{\mu}$-функцію (57) по параметру $t \in \mathbb{R}$:

$$d\tilde{\mu}^- (t, t_0; \tilde{s})/dt = (\operatorname{tr} \tilde{K}' [\sigma_0]) \tilde{\mu}^- (t, t_0; \tilde{s}) + \det \| \tilde{\sigma}_{0,1(1)}^+ + \tilde{s}_1 (t_0) \tilde{\sigma}_{0,1(2n)}^+ -$$
$$- (1 + \tilde{s}_1 (t_0)) \tilde{\sigma}_{0,1}^- (\pi), \ldots, \sigma_{0,1(2n-1)}^+ + \tilde{s}_{2n-1} (t_0) \tilde{\sigma}_{0,1(2n)}^+ - (1 + \tilde{s}_{2n-1} (t_0)) \times$$
$$\times \tilde{\sigma}_{0,1}^- (\pi)), \tilde{F} [\tilde{\sigma}_0] \| (t, t_0), \tag{61}$$

тобто

$$d\tilde{\mu}^- (t, t_0; \tilde{s})/dt = (\operatorname{tr} \tilde{K}' [\tilde{\sigma}_0]) \tilde{\mu}^- (t, t_0; \tilde{s}) + \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\xi} [\tilde{\sigma}_0; \tilde{\pi}^-] (t, t_0) \tilde{s}_j (t_0), \tag{62}$$

де $\tilde{s}_0 (t_0) \equiv 1$, $t_0 \in \mathbb{R}$, і числові функції $\tilde{\xi} [\tilde{\sigma}_0; \pi^-] (t, t_0)$, $j = \overline{0, 2n-1}$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, визначаються з (61) однозначно.

Враховуючи тепер, що вектор-функції $\tilde{\sigma}_{0,1(j)}^+ + \tilde{s}_1 (t_0) \tilde{\sigma}_{0,1(2n)}^+ - (1 + \tilde{s}_j \times (t_0)) \sigma_{0,1}^- (\pi) = \tilde{\alpha}_j + \tilde{s}_j (t_0) \tilde{\alpha}_{2n} \in T (\tilde{M})$, $j = \overline{1, 2n-1}$, — розв'язки рівняння

$$\tilde{\alpha}_t = \tilde{K}' \cdot \tilde{\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{63}$$

можна записати еквівалентну умові (57) рівність:

$$\tilde{\mu}^- (t, t_0; \tilde{s}) = \det \| \tilde{\alpha}_1^+ + \tilde{s}_1^+ \tilde{K}, \quad \tilde{\alpha}_1^- + \tilde{s}_1^- \tilde{K}, \ldots, \tilde{\alpha}_{n-1}^+ + \tilde{s}_{n-1}^+ K, \quad \tilde{\alpha}_{n-1}^- +$$
$$+ \tilde{s}_{n-1}^- \tilde{K}, \quad \tilde{\alpha}_0 + \tilde{s}_0 \tilde{K}, \tilde{\sigma}_{0,1}^- (\pi) \|. \tag{64}$$

Тут $\{\tilde{\alpha}_j^\pm (t, t_0),\ j = \overline{1, n-1};\ \tilde{K}, \tilde{\alpha}\} \subset T (M)$ — базис рівняння (63), узгоджений з апріорними асимптотиками при $t \to \pm \infty$:

$$\lim_{t \to \pm\infty} \tilde{\alpha}_j^+ (t, t_0) = 0, \quad \lim_{t \to \pm\infty} | \tilde{\alpha}_0 (t, t_0) | = \infty,$$
$$\lim_{t \to \pm\infty} | \tilde{\alpha}_j^- (t, t_0) | = \infty, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \tag{65}$$

$\tilde{s}_0$, $\tilde{s}_j^\pm \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n-1}$, — довільні параметри.

Якщо ми побудуємо тепер аналогічно (64) $\tilde{\mu}^+$-функцію

$$\tilde{\mu}^+ (t, t_0; \tilde{s}) = \det \| \tilde{\alpha}_1^+ + \tilde{s}_1^+ \tilde{K}, \tilde{\alpha}_1^- + \tilde{s}_1^- \tilde{K}, \ldots, \tilde{\alpha}_{n-1}^+ + \tilde{s}_{n-1}^+ \tilde{K}, \tilde{\alpha}_{n-1}^- + \tilde{s}_{n-1}^- \tilde{K},$$

$$\widetilde{\alpha}_0 + \widetilde{s}_0\widetilde{K}, \widetilde{\sigma}_{0,1}^{+}(\pi)\|, \tag{66}$$

то, очевидно, умова трансверсальності розщеплення гомоклінічної сепаратриси (56) буде еквівалентна такій: для всіх $\widetilde{s}_0, \widetilde{s}_j^{\pm} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n-1}$, $\widetilde{\mu}$-функція виду

$$\widetilde{\mu}(t_0, t_0; \widetilde{s}) = \widetilde{\mu}^{-}(t_0, t_0; \widetilde{s}) - \widetilde{\mu}^{+}(t_0, t_0; \widetilde{s}) \tag{67}$$

при деякому простому значенні $t_0 = \overline{t}_0 \in \mathbb{R}$ перетворюється в тотожний нуль. Враховуючи аналогічно (62), що

$$d\widetilde{\mu}^{\pm}(t, t_0; \widetilde{s})/dt = (\operatorname{tr} \widetilde{K}'[\sigma_0])\,\widetilde{\mu}^{\pm}(t, t_0; \widetilde{s}) + \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{\xi}_j^{(\pm)}(t, t_0)\,\widetilde{s}_j^{\pm}, \tag{68}$$

де $\widetilde{s}_0^{-} = \widetilde{s}_0 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{s}_0^{+} = 1$, а $\widetilde{\xi}_j^{(\pm)}(t, t_0)$, $j = \overline{0, n-1}$, — функції вигляду

$$\begin{gathered}
\widetilde{\xi}_j^{(+)}(t, t_0) = \det \|\widetilde{\alpha}_1^{+}, \widetilde{\alpha}_1^{-}, \ldots, \widetilde{K}, \widetilde{\alpha}_j^{-}, \ldots, \alpha_0, \widetilde{F}\|(t, t_0), \\
\widetilde{\xi}_j^{(-)}(t, t_0) = \det \|\widetilde{\alpha}_1^{+}, \widetilde{\alpha}_1^{-}, \ldots, \widetilde{\alpha}_j^{+}\widetilde{K}, \ldots, \alpha_0, \widetilde{F}\|(t, t_0), \\
\widetilde{\xi}_0^{(+)}(t, t_0) = \det \|\widetilde{\alpha}_1^{+}, \widetilde{\alpha}_1^{-}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{n-1}^{+}, \widetilde{\alpha}_{n-1}^{-}, \widetilde{\alpha}_0, \widetilde{F}\|(t, t_0), \\
\widetilde{\xi}_0^{(-)}(t, t_0) = \det \|\widetilde{\alpha}_1^{+}, \widetilde{\alpha}_1^{-}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{n-1}^{+}, \widetilde{\alpha}_{n-1}^{-}, \widetilde{K}, \widetilde{F}\|(t, t_0),
\end{gathered} \tag{69}$$

одержуємо $\widetilde{\mu}(t_0, t_0); \widetilde{s}) = \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{\mu}_j^{\pm}(t_0)\,\widetilde{s}_j^{\pm}$, ...ому

$$\begin{gathered}
\widetilde{\mu}_j^{\pm}(t_0) = \int_{\mathbb{R}} dt \exp\Big(\int_{t_0}^{t} d\tau \operatorname{tr} \widetilde{K}'\Big)\,\widetilde{\xi}_j^{(\pm)}(t, t_0) + \Delta\widetilde{\mu}_j^{\pm}(t_0), \\
\Delta\widetilde{\mu}_j^{\pm}(t_0) = \lim_{t \to -\infty} \frac{\partial\widetilde{\mu}^{-}(t, t_0; 0)}{\partial\widetilde{s}_j^{\pm}} - \lim_{t \to +\infty} \frac{\partial\widetilde{\mu}^{+}(t, t_0; 0)}{\partial\widetilde{s}_j^{\pm}}
\end{gathered} \tag{70}$$

для всіх $j = \overline{0, n-1}$. Отже, якщо $t = \overline{t}_0 \in \mathbb{R}$, то для всіх $j = \overline{0, n-1}$ повинні виконуватись рівності $\widetilde{\mu}_j^{\pm}(\bar{t}_0) = 0$.

Нехай тепер вихідна динамічна система (42) при $\varepsilon = 0$ гамільтонова, тобто $\operatorname{tr} \widetilde{K}'[\widetilde{\sigma}_0] = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді в силу інваріантності величини $\widetilde{q}(t_0) = \det|\widetilde{\widetilde{\sigma}}(t, t_0)|$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ випливає, зокрема, що $\Delta\widetilde{\mu}_j^{-}(t_0) \equiv 0$ для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, n-1}$, тобто співвідношення (70) значно спрощується. Для величин $\Delta\widetilde{\mu}_j^{+}(t_0)$, $j = \overline{0, n-1}$, в (70) їх розрахунок теж суттєво спрощується, якщо врахувати, що

$$\lim_{t \to \pm\infty} \widetilde{\sigma}_{0,1}^{\pm}(\pi)(t, t_0) = \widetilde{\delta}(\pi), \tag{71}$$

де за визначенням точка $\widetilde{u}_0 + \varepsilon\widetilde{\delta}(\pi) + O(\varepsilon^2) \in \widetilde{M}$ — особлива гіперболічна точка динамічної системи (42) при $\varepsilon \to 0$. Тим самим, ми сформулювали необхідні і достатні умови (70) існування в заданій динамічній системі (42) явища трансверсального розщеплення її гомоклінічної сепаратриси. Аналогічний підхід може бути розвинутий і у випадку явища розщеплення гетероклінічної сепаратриси динамічної системи (42) при $\varepsilon \to 0$, на чому тут не зупиняємось.

П р и к л а д 3. Розглянемо більш детально випадок $\dim M = 2$. Функція типу Мельникова $\tilde{\mu}(t_0) = \tilde{\mu}(t_0, t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, визначається таким виразом:

$$\tilde{\mu}(t, t_0; \tilde{s}) = \det \| \tilde{\alpha}_0 + \tilde{s}_0 \tilde{K}, \tilde{\sigma}^-(\pi) - \tilde{\sigma}^+(\pi) \|, \tag{72}$$

де $\tilde{s}_0 \in \mathbb{R}$ — довільний параметр. Із (72) і рівняння типу (68) знаходимо, що коли $\operatorname{tr} \tilde{K}' [\tilde{\sigma}_0] = 0$, $t \in \mathbb{R}$, то

$$\tilde{\mu}(t_0; \tilde{s}) = \int_{\mathbb{R}} dt \det \| \tilde{\alpha}_0, \tilde{F} \| (t, t_0) + \tilde{s} \int_{\mathbb{R}} dt \det \| \tilde{K}, \tilde{F} \| (t, t_0) + \Delta \tilde{\mu}_0^- (t_0). \tag{73}$$

У випадку явища трансверсального розщеплення сепаратриси $\tilde{u}[g; 0](t - t_0)$ із (73) одержуємо модифіковане співвідношення Мельникова [4] $\tilde{\mu}(t_0, \tilde{s}) = 0$, $t_0 = \bar{t}_0 \in R$, або

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}} dt \det \| \tilde{\alpha}_0, F \| (t, \bar{t}_0) = - \Delta \tilde{\mu}_0^- (\bar{t}_0), \\ \int_{\mathbb{R}} dt \det \| \tilde{K}, \tilde{F} \| (t, \bar{t}_0) = 0. \end{gathered} \tag{74}$$

Звідси випливає, що у випадку планарної нелінійної динамічної системи (42) В. К. Мельников [4] встановив ефективну необхідну умову трансверсальності розщеплення її гомоклінічної сепаратриси, що є значним вкладом в розробку задачі А. Пуанкаре.

З а у в а ж е н н я 1. Розвинуту вище методику вивчення явища розщеплення гомоклінічної сепаратриси динамічної системи (42) можна застосувати [4, 23] і до вивчення явища розщеплення апріорі періодичних або квазіперіодичних орбіт. А саме, введемо узагальнену субгармонічну μ-функцію типу Мельникова, визначену в околі періодичної траєкторії $\tilde{u}_0[g; 0] \times \times (t - t_0) \subset \tilde{M}$ динамічної системи (42) (при $\varepsilon = 0$ $\tilde{\mu}(t_0; \tilde{s}) = \tilde{\mu}(t_0, t_0; \tilde{s})$, t_0, $t \in \mathbb{R}$):

$$\tilde{\mu}_{m/n}(t, t_0; \tilde{s}) = \det \| \tilde{\alpha}_1^+ + \tilde{s}_1^+ \tilde{K}, \tilde{\alpha}_1^- + \tilde{s}_1^- \tilde{K}, \ldots, \tilde{\alpha}_0 + \tilde{s}_0 \tilde{K}, \tilde{\sigma}_{0,1}(t + mT, t_0) - \\ - \tilde{\sigma}_{0,1}(t, t_0) \|, \tag{75}$$

де $\{\tilde{\alpha}_j^\pm, \quad j = \overline{1, n-1}; \quad \tilde{\alpha}_0, \tilde{K}\} \in T(\tilde{M})$, $\tilde{s}_j^\pm \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, n-1}$, $\tilde{s}_0^- = \tilde{s}_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{s}_0^+ = 1$, і виконана умова $mT = nT_h$, де $m, n \in \mathbb{N}$, $T_h \subset \mathbb{R}_+$ — період орбіти $\tilde{u}[g; 0](t - t_0) \subset \tilde{M}$ із значенням функції Гамільтона $H(u) = h \in \mathbb{R}$ і $T \in \mathbb{R}_+$ — період зовнішнього збурення $\tilde{F}[u; t]$, $t \in \mathbb{R}$, при $\varepsilon \to 0$. Використовуючи рівняння типу (68) для функції (75), знаходимо

$$\tilde{\mu}_{m/n}(t_0; \tilde{s}) = \int_{t_0}^{t_0+mT} dt \det \| \tilde{\alpha}_1^+ + \tilde{s}_1^+ \tilde{K}, \tilde{\alpha}_1^- + \tilde{s}_1^- \tilde{K}, \ldots, \tilde{\alpha}_0 + \tilde{s}_0 \tilde{K}, F \| (t, t_0) \tag{76}$$

для всіх $\tilde{s}_j^\pm \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, n-1}$, причому величини $\Delta \tilde{\mu}_{m/n}(t_0; \tilde{s})$, що наявні в (70), тотожно рівні нулю. Як наслідок (76) отримуємо, що критерієм трансверсального розщеплення періодичної орбіти динамічної системи (42) при $\varepsilon \to 0$ є простота нульового розв'язку (76) при $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$ таких співвідношень:

$$\tilde{\mu}_j^\pm(\bar{t}_0) = \int_{t_0}^{t_0+mT} dt \exp\Big(\int_{t_0}^{t} d\tau \operatorname{tr} \tilde{K}' \Big) \tilde{\xi}_j^\pm (t, t_0) = 0, \; j = \overline{0, n-1}. \tag{77}$$

З а у в а ж е н н я 2. В роботах [8, 19, 20] зроблена спроба перенести методи дослідження робіт [4, 23, 25] на абстрактну схему, застосовну до нелінійних динамічних систем типу (42) в банахових нескінченновимірних просторах. Зокрема, в (25) будується у спеціальному випадку аналог функції Мельникова (73) $\tilde{\mu}_M(t_0) = \tilde{\mu}_M(t_0, t_0)$, де при $\varepsilon \to 0$ для всіх $t, t_0 \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\mu}_M(t, t_0) = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\omega}^{(2)}(0)(\tilde{K}[\tilde{\sigma}_0[g](t - t_0)], \tilde{\sigma}_\varepsilon^+[g](t, t_0) - \tilde{\sigma}_\varepsilon^-[g](t, t_0) + O(\varepsilon), \quad (78)$$

$\tilde{\omega}^{(2)}(0) \in \Lambda^2(\tilde{M})$ — симплектична структура вихідної нелінійної динамічної системи (42) при $\varepsilon = 0$. Беручи похідну Лі вздовж векторного поля $\tilde{K}: \tilde{M} \to T\tilde{M})$ від виразу (78), аналогічно формулам (68) знаходимо при $\varepsilon \to 0$:

$$\tilde{\mu}_M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \tilde{\omega}^{(2)}(0)(\tilde{K}[\tilde{\sigma}_0[g](t - t_0)], \tilde{F}[\tilde{\sigma}_0[g](t, t_0)]) \quad (79)$$

для всіх $t_0 \in \mathbb{R}$. В [25] стверджується, що формула (79) дає критерій трансверсальності гомоклінічних орбіт в точці $\tilde{\sigma}_0[g](0) \in \tilde{M}$ фазового простору при значенні параметра $t_0 = \bar{t}_0 \in \mathbb{R}$, при якому $\tilde{\mu}_M(\bar{t}_0) = 0$ — простий нуль функції Мельникова. Аналогічно, як і в зауваженні 1, можна показати, що введена в [25] функція Мельникова (78) не забезпечує достатньої умови трансверсальності гомоклінічних орбіт $\tilde{u}^{\pm}[g; 0](t - t_0)$, так як січна площина $\tilde{\Sigma}^{t_0} \subset\to \tilde{M}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, яка у відображенні Пуанкаре $\tilde{P}_\varepsilon: \tilde{\Sigma}^{t_0} \to \tilde{\Sigma}^{t_0}$ вибирається довільним, трансверсальним при $\varepsilon \to 0$ до заданого векторного поля (43) чином, у випадку оцінки величини узагальненої функції Мельникова (73) повинна вибиратись в узгодженні з (53), тобто так, щоб $\tilde{\sigma}_{0,1}^{\pm}[g](t, t_0) \in T(\tilde{\Sigma}^{t_0})$ в точці $\tilde{u}[g; 0](0] \in \tilde{M}$ для всіх значень параметра $t_0 \in \mathbb{R}$.

З а у в а ж е н н я 3. Розвинутий в цьому розділі метод дослідження явища розщеплення сепаратрис для гіперболічних особливих точок ε-деформацій гамільтонових динамічних систем на многовиді M^{2n}, $n \in \mathbb{Z}_+$, повністю застосовний для дослідження цієї ж задачі і для випадку довільної нелінійної динамічної системи на многовиді M^m, $m \in Z_+$, довільної вимірності.

1. *Бакай А. С., Степановский Ю. П.* Адиабатические инварианты.— Киев : Наук. думка, 1981.— 284 с.
2. *Крускал М.* Адиабатические инварианты: Пер. с англ.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 92 с.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1984.— 432 с.
4. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических во времени возмущениях// Тр. Моск. мат. о-ва.— 1963.— 12, № 1.— С. 3—52.
5. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, № 1.— С. 3—67.
6. *Митропольский Ю. А.* К вопросу об адиабатическом инварианте // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1990.— Вып. 14.— С. 1—30.
7. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях.— Киев : Наук. думка, 1991.— 287 с.
8. *Marsden J. E.* Four applications of nonlinear analysis to physics and Engineering // New directions in Appl. Math.— 1982.— 10.— P. 85—107.
9. *Holmes Ph. J., Marsden J. E.* Horsephoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups // Indiana Univ. Math. J.— 1983.— 32, N 2.— P. 273—309.
10. *Интегрируемые* динамические системы / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.). А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
11. *Митропольский Ю. А., Антонишин И. О., Прикарпатский А. К.* Адиабатические инварианты нелинейных динамических систем с малым параметром // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1991.— С. 90—93.
12. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М. : Мир, 1975.— 304 с.
13. *Палис Ж., Димелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение.— М. : Мир, 1986.— 304 с.

14. *Аносов Д. В.* Гладкие динамические системы.— М. : ВИНИТИ, 1985.— С. 152—203.— (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики; Т. 1).
15. *Wiggins S., Holmes Ph.* Homoclinic orbits in slowly varying oscillators // SIAM J. Math. Anal.— 1987.— 18, N 3.— P. 612—629.
16. *Holmes Ph. J., Marsden J. E.* Horseshoes in Perturbations of Hamiltonian systems with Degrees of Freedom // Communs. Math. Phys.— 1982.— **82**, N 3.— P. 523—544.
17. *Holmes Ph., Marsden J. E.* Melnicov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems // J. Math. Phys.— 1982.— **23**, N 4.— P. 669—675.
18. *Holmes Ph. J.* Averaging and Chaotic motions in forced oscillation // SIAM J. App. Math.— 1980.— **38**, N 1.— P. 65—80; — 1981.— **40**, N 1.— P. 167—168.
19. *Holmes Ph. J., Marsden J. E.* A partial differential equation with infinitely many Periodic orbits: Chaotic Oscillations of forced beam // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1981.— **76**, N 2.— P. 135—165.
20. *Holmes Ph. J., Marsden J. E.* Bifurcation to divergence and flutter in flow-induced Oscillations : An infinite dimensional analysis //Automatica.— 1978.— **14**, N 3.— P. 367—384.
21. *Chow S.-N.* An example of bifurcation to homoclinic orbits // J. Different. Equat.— 1980.— **37**, N 3.— P. 351—373.
22. *Chow S.-N., Hale J. K.* Method of bifurcation theory.— New York etc.: Springer, 1982.— 250 p.
23. *Guchenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillations dynamical systems and bifurcations of vector fields.— New York etc.: Springer, 1983. — 453 p.
24. *Hale J. K.* Asymptitic behavior of dissipative systems.— New York etc.: Springer, 1988.— **25**.— 200 p.
25. *Moser J.* Stable and Random motions in dynamical systems // Ann. Math. Stud.— 1973.— N 77.— 120 p.
26. *Chow S.-N., Hale J. K., Mallet-Paret J.* An example of bifurcation to homoclinic orbits // J. Different. Equat.— 1980.— **37**, N 2.— P. 351—373.
27. *Boutet de Monvel-Berthier A., Nenciu G.* On the theory of adiabatic invariants for linear hamiltonian systems // C. r. Acad. sci. A.— 1990.— **310**. — P. 807—812.
28. *Churchill R. C.* On proving the nonintegrability of a Hamiltonian system // Lect. Notes Math.— 1982.— **925**.— P. 103—122.
29. *Coullet P., Elphick C.* Topological defects dynamics and Melnicov theory // Phys. Lett. A.— 1987.— **121**, N 5.— P. 233—236.
30. *Salam F. M. A.* Melnicov technique for highly dissipative systems // SIAM J. Appl. Math.— 1987.— **47**, N 2.— P. 232—243.
31. *Ling F. H.* A numerical study of the applicability of Melnicov's method // Phys. Lett. A.— 1987.— **119**, N 9.— P. 447—452; **122**, N 1.— P. 413—417 (with Bao G. W.).
32. *Притула М. М., Прикарпатський А. К., Микитюк І. В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем.— К. : УМК ВО, 1988.— 86 с.
33. *Olver P.* Hamiltonian perturbation theory and water waves // Contemp. Math.— 1984.— **28**.— P. 231—249.
34. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем.— М. : Наука, 1984.— 272 с.
35. *Duarte J. T., Mendes R. V.* Deformation dynamics and constant of motion in dissipative systems // J. Math. Phys.— 1983.— **24**, N 7.— P. 1772—1778.
36. *Митропольський Ю. О., Прикарпатський А. К., Філь Б. М.* Деякі аспекти градієнтно-голономного алгоритму в теорії інтегровності нелінійних динамічних систем та проблеми комп'ютерної алгебри // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 1.— С. 78—91.
37. *Неустойчивости* в динамических системах / Под ред. В. Джесебехея.—М. : Мир, 1982.— 168 с.
38. *Varosi F., Grebogi C., Yorke J. A.* Simplicial appoximation of Poincare maps of differential equations // Phys. Lett. A.— 1987.— **124**, N 1, 2.— P. 59—67.
39. *Brown R., Ott E., Grebogi C.* Ergodic adiabatic invariants of chaotic systems // Phys. Rev. Lett.— 1987.— **59**, N 11.— P. 1173—1176.
40. *Longcope D. W., Sundan R. N.* Arnold diffusion in 3/2-dimension // Ibid.— N 14.—P. P. 1500—1503.
41. *Ito H.* Nonintegrability of Henon—Heiles systems and a theorem of Ziglin // Koddi Math J.— 1985.— **8**, N 2.— P. 120—138.
42. *Ito H.* A criterian for non-integrability of Hamiltonian systems with nonhomogeneous potential // J. Appl. Math. Phys.— 1987.— **38**, N 5.— P. 459—476.
43. *Yoshida H.* Nesessary condition for the existence of algebraic first integrals // Celest. Mech.— 1983.— **31**, N 3. P. 363—399.
44. *Yoshida H.* Existence of exponentially unstable periodic solutions and the non-integrability of homogeneous Hamiltonian systems // Physica D.— 1986.— **21**, N 2.— P. 163—170.
45. *Козлов В. В.* Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 5.— С. 177—178.
46. *Зиглин С. Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. мат. о-ва — 1980.— **41**, № 2.— С. 287—303.

Одержано 09.08.91