DOI: 10.37863/umzh.v72i7.2321

УДК 517.98

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

We establish the solvability of a nonlocal multipoint time problem (which is treated as a generalization of the Cauchy problem) for an evolution equation with a pseudodifferential operator (a differentiation operator of infinite order) with initial conditions in the space of generalized functions having type of ultra distributions.

Встановлено розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі (яка трактується як певне узагальнення задачі Коші) для еволюційного рівняння з псевдодиференціальним оператором (оператором диференціювання нескінченного порядку) з початковою умовою у просторі узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

Вступ. Досить широкий клас диференціальних рівнянь з частинними похідними охоплюють лінійні параболічні та B-параболічні рівняння, теорія яких бере свій початок із дослідження рівняння теплопровідності. Класичну теорію задачі Коші та крайових задач для таких рівнянь і систем рівнянь побудовано у працях І. Г. Петровського, С. Д. Ейдельмана, С. Д. Івасишена, М. І. Матійчука, М. В. Житарашу, А. Фрідмана, С. Теклінда, В. О. Солонникова, В. В. Крехівського та ін. Задача Коші з початковими даними з просторів узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів вивчалася Г. Є. Шиловим, Б. Л. Гуревичем, М. Л. Горбачуком, В. І. Горбачук, Я. І. Житомирським, С. Д. Івасишеним, В. В. Городецьким, В. А. Літовченком та ін.

Формальним розширенням класу рівнянь параболічного типу є еволюційні рівняння з псевдодиференціальними операторами (ПДО), які можна записати у вигляді $A = J^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)J_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a — функція (символ), що задовольняє певні умови, J, J^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є або Бесселя. До ПДО належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки, оператор Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, який у своїй структурі містить вираз $1/x$ і формально зображується у вигляді $B_\nu = F^{-1}_{B_\nu}\left[-\sigma^2 F_{B_\nu}\right]$, де F_{B_ν} — інтегральне перетворення Бесселя, та ін.

На сьогодні у теорії задачі Коші для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь у питаннях коректної розв'язності задачі Коші, зображення розв'язку у випадку, коли початкові умови є елементами різних функціональних просторів (зокрема, і просторів узагальнених функцій), досягнуто значних результатів, які є надбанням вітчизняних та зарубіжних математиків.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними частково використовуються простори типу S, введені І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим в [1]. Функції з таких просторів на дійсні осі разом з усіма своїми похідними при $|x|\to\infty$ спадають швидше, ніж $\exp\left\{-a|x|^{1/\alpha}\right\}$, $a>0$, $\alpha>0$, $x\in\mathbb{R}$. У працях [2–8] встановлено, що простори типу S та S', топологічно спряжені до просторів типу S, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними. Наприклад, для рівняння теплопровідності $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ фундаментальний розв'язок задачі Коші — функція $G(t,x) = \left(2\sqrt{\pi t}\,\right)^{-1} \exp\left\{-x^2/4t\right\}$ — при кожному $t > 0$, як функція x, є елементом простору $S_{1/2}^{1/2}$ [7, с. 46], який відноситься до просторів типу S.

Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача з умовою $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k B_k u(t,\cdot)\big|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа, $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — певні псевдодиференціальні оператори (зокрема, оператори диференціювання нескінченного порядку). Якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, $B_0 \equiv I$ — одиничний оператор, то маємо, очевидно, задачу Коші. При цьому вказана умова трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція. Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (див., наприклад, [9, 10]).

У даній роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння $\partial u(t,x)/\partial t = A_\varphi u(t,x)$, $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}$, у просторах типу S з умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k B_k u(t,\cdot)\big|_{t=t_k} = f,$$

де f — узагальнена функція типу ультрарозподілів, A_φ, $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — псевдодиференціальні оператори з аналітичними символами, які можна розуміти як оператори диференціювання „нескінченного порядку":

$$A_\varphi = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (id/dx)^k,$$

$$B_k = F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\varphi_k(\sigma)F^{-1}_{x\to\sigma}\right] = \sum_{j=0}^{\infty} b_{jk}(id/dx)^j, \quad k \in \{0,1,\ldots,m\},$$

функції $\varphi, \varphi_0, \ldots, \varphi_m$ — символи операторів $A_\varphi, B_0, B_1, \ldots, B_m$ — задовольняють певні умови, які узагальнюють відому умову „параболічності" для параболічних псевдодиференціальних рівнянь, F і F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. Введено поняття оператора диференціювання нескінченного порядку в просторах типу S і обґрунтовано його коректність, встановлено: 1) властивості фундаментального розв'язку зазначеної нелокальної багатоточкової за часом задачі; 2) розв'язність вказаної задачі, а також знайдено аналітичне зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою узагальненою функцією.

1. Простори типу S та S'. Для довільних α, $\beta > 0$ покладемо (див. [1])

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\Big|\, \exists c > 0\ \ \exists A > 0\ \ \exists B > 0\ \ \forall\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \left|x^k \varphi^{(m)}(x)\right| \le c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\Big\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще й так [1]: S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$\left|\varphi^{(m)}(x)\right| \le c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\{-c_2|x|^{1/\alpha}\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, c_2, B_1, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1-\beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \leq c_3 \exp\left\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\right\}, \quad c_3, a, b > 0, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha + \beta \geq 1$; для довільних α, β правильною є рівність $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ [2].

Топологічна структура у просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначатимемо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють таку умову:

$$\forall \overline{A} > A \quad \forall \overline{B} > B: \ \left|x^k \varphi^{(m)}(x)\right| \leq c\overline{A}^k\, \overline{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{\left|x^k \varphi^{(m)}(x)\right|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \quad \{\delta, \rho\} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отже, в S_α^β можна ввести топологію індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ [1].

У просторах S_α^β операція зсуву аргумента $T_x: \varphi(\xi) \to \varphi(\xi+x)$ є визначеною і неперервною. Ця операція є диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [1]) у тому розумінні, що граничні співвідношення $\big(\varphi(x+h) - \varphi(x)\big)/h \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджуються для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ у сенсі збіжності за топологією простору S_α^β.

У просторах S_α^β операція диференціювання є визначеною і неперервною. Простори типу S досконалі (тобто це простори, всі обмежені множини яких компактні); вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F\left[S_\alpha^\beta\right] = S_\beta^\alpha$, де

$$F\left[S_\alpha^\beta\right] := \left\{\psi : \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \varphi \in S_\alpha^\beta\right\}.$$

Символом $\left(S_\alpha^\beta\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на відповідному просторі основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями типу ультрарозподілів. Якщо $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ (тобто елементи простору $\left(S_\alpha^\beta\right)'$ є нескінченно диференційовними), зсув $f(ay+b)$, $a \neq 0$, добуток αf, де α — мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі S_α^β визначено операцію зсуву аргумента $T_x: \varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \left\langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\right\rangle \equiv \left\langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\right\rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi)$$

$\Big($тут запис $\left\langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\right\rangle$ означає дію функціонала f на основу функцію φ, як функцію змінної ξ при фіксованому $x\Big)$.

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента у просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ — це звичайна нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція.

Нехай $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta$ $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і зі співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі S_α^β.

Оскільки $F^{-1}\left[S_\beta^\alpha\right] = S_\alpha^\beta$ (F^{-1} — обернене перетворення Фур'є), а також і $F\left[S_\beta^\alpha\right] = S_\alpha^\beta$, бо кожний простір типу S разом із функцією $\varphi(x)$ містить і функцію $\varphi(-x)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle, \quad \varphi \in S_\beta^\alpha.$$

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій із простору S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta \geq$ ≥ 1, в $\mathbb{C}$, позначимо через $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$. Із результатів, наведених в [11], випливає, що $S_\alpha^\beta(\mathbb{C}) =$ $= W_M^\Omega$, де W_M^Ω — один із просторів типу W, введених Б. Л. Гуревичем [12] (див. також [11]), побудований за функціями $M(x) = x^{1/\alpha}$, $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $\{x, y\} \subset (0, \infty)$. У просторах W_M^Ω вводиться топологія індуктивної границі зліченно-нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, $a,\ b > 0$; система норм у просторах $W_{M,a}^{\Omega,b}$ визначається формулами

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(|\varphi(z)| \exp\left\{ a(1-\delta)|x|^{1/\alpha} + (b+\rho)|y|^{1/(1-\beta)} \right\} \right),$$

$$\varphi \in S_\alpha^\beta(\mathbb{C}) \equiv W_M^\Omega, \quad z = x + iy, \quad \delta \in \{1/2, 1/3, \ldots\}, \quad \rho \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає (див. [1]), що послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\alpha, \beta\} \subset$ $\subset (0,1)$, $\alpha + \beta \geq 1$, збігається до нуля в S_α^β тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}$, $z \in \mathbb{C}$, збігається до нуля в $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$, тобто [11] рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій множині, при цьому виконується нерівність

$$|\varphi_\nu(z)| \leq c \exp\left\{ -a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)} \right\}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими $c,\ a,\ b > 0$, не залежними від ν. Мультиплікатором у просторі $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$ є кожна ціла функція $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову [13]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c_\varepsilon \exp\left\{ \varepsilon|x|^{1/\alpha} + \varepsilon|y|^{1/(1-\beta)} \right\}.$$

2. Оператори диференціювання нескінченного порядку в просторах типу S. Нехай $g(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, — деяка ціла функція. Говоритимемо, що у просторі S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset$ $\subset (0,1)$, задано оператор диференціювання нескінченного порядку

$$g(D) := \sum_{n=0}^\infty c_n (iD)^n, \quad D = \frac{d}{dx},$$

якщо для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ ряд

$$\psi(x) \equiv g(D)\varphi(x) := \sum_{n=0}^\infty c_n (iD)^n \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

зображує основну функцію з простору S_α^β.

Теорема 1. *Якщо функція g — мультиплікатор у просторі S_{β}^{α}, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$, то у просторі S_{α}^{β} оператор $g(D) \equiv A_g$ є визначеним і неперервним, при цьому*

$$A_g \varphi(x) = F^{-1}[g(\sigma) F[\varphi]].$$

Доведення. Нехай $\varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$, тоді

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iD)^n \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(F^{-1}[\sigma F[\varphi]]\right)^n (x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{-1}[\sigma^n F[\varphi]]\,(x).$$

Доведемо, що $\psi \in S_{\alpha}^{\beta}$. Із властивостей перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження достатньо встановити, що $F[\psi] \in S_{\beta}^{\alpha}$. Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$F[\psi](x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sigma^n F[\varphi](x) = g(\sigma) F[\varphi](\sigma). \tag{1}$$

Оскільки $F[\varphi] \in S_{\beta}^{\alpha}$, а g — мультиплікатор у просторі S_{β}^{α}, то $gF[\varphi] \in S_{\beta}^{\alpha}$. Отже, залишилося довести коректність проведених перетворень і обґрунтувати правильність формули (1). Функція $gF[\varphi]$ допускає аналітичне продовження в усю комплексну площину, при цьому $(gF[\varphi])(z) \in \in S_{\beta}^{\alpha}(\mathbb{C})$, $z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$. Отже, для доведення твердження достатньо встановити, що

$$r_n(z) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k F[\varphi](z) \to 0, \quad n \to \infty,$$

у просторі $S_{\beta}^{\alpha}(\mathbb{C})$. Іншими словами, потрібно показати, що: 1) $\{r_n, n \geq 1\} \subset S_{\beta}^{\alpha}(\mathbb{C})$; 2) послідовність $\{r_n, n \geq 1\}$ рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини, і при цьому виконуються нерівності

$$|r_n(z)| \leq c \exp\left\{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

з деякими сталими a, b, $c > 0$, не залежними від n.

Коефіцієнти Тейлора c_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, функції g обчислюються за формулою Коші

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{z^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з умови теореми (g — мультиплікатор в S_{β}^{α}) випливає, що

$$|c_n| \leq c_{\varepsilon} \inf_R \left(R^{-n/2} \exp\left\{\varepsilon R^{1/\beta}\right\}\right) \inf_R \left(R^{-n/2} \exp\left\{\varepsilon R^{1/(1-\alpha)}\right\}\right).$$

Оцінимо окремо коефіцієнти c_{2k} і c_{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$|c_{2k}| \leq c_{\varepsilon} \inf_R \left(R^{-k} \exp\left\{\varepsilon R^{1/\beta}\right\}\right) \inf_R \left(R^{-k} \exp\left\{\varepsilon R^{1/(1-\alpha)}\right\}\right).$$

Безпосередньо отримуємо

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} k^{-(1-\alpha+\beta)k}, \quad L = \left(\frac{e}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{e}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{2}$$

Аналогічно,

$$|c_{2k+1}| \leq \tilde{c}_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} k^{-(1-\alpha+\beta)k}. \tag{3}$$

Далі встановимо оцінку функції $\alpha_n(z) := |c_n z^n F[\varphi](z)|$, $z \in \mathbb{C}$, при фіксованому $n \in \mathbb{N}$, якщо $n = 2k$ і $n = 2k+1$, врахувавши при цьому нерівності (2) та (3) відповідно.

Нехай $n = 2k$. Оскільки $F[\varphi] \in S_\beta^\alpha$, то

$$\exists c, a, b > 0 \quad \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \colon |F[\varphi](z)| \leq c \exp\left\{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}.$$

Крім того,

$$|z|^{2k} = \left(\sigma^2 + \tau^2\right)^k \leq \left(2\max\{\sigma^2, \tau^2\}\right)^k \leq 2^k \left(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}\right).$$

Отже,

$$\alpha_{2k}(z) \leq c c_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} k^{-(1-\alpha+\beta)k} \left(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}\right) e^{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}} =$$

$$= c c_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} \Big(k^{-(1-\alpha+\beta)k} |\sigma|^{2k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta} + b|\tau|^{1/(1-\alpha)}} +$$

$$+ k^{-(1-\alpha+\beta)k} |\tau|^{2k} e^{-a|\sigma|^{1/\beta}} e^{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}}\Big) \equiv$$

$$\equiv c c_\varepsilon L^k \varepsilon^{(1-\alpha+\beta)k} \left(\Delta_k'(z) + \Delta_k''(z)\right).$$

Далі врахуємо нерівність

$$|\sigma|^{2k} e^{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}} \leq L_1^k k^{2k\beta}, \quad L_1 = \left(\frac{4}{ae}\right)^{2\beta},$$

застосувавши яку, знайдемо

$$\Delta_k'(z) = k^{-(1-\alpha+\beta)k} |\sigma|^{2k} \exp\left\{-a|\sigma|^{1/\beta}\right\} \exp\left\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_1 L_1^k k^{2k\beta} k^{-(1-\alpha+\beta)k} \exp\left\{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}\right\} \exp\left\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}.$$

Оскільки $\alpha + \beta = 1$, то $2\beta - (1 - \alpha + \beta) = 0$, а тому

$$\Delta_k'(z) \leq \tilde{c}_1 L_1^k \exp\left\{-\frac{a}{2}|\sigma|^{1/\beta}\right\} \exp\left\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}.$$

Оцінимо $\Delta_k''(z)$. Маємо

$$|\tau|^{2k} \exp\left\{b|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\} = |\tau|^{2k} \exp\left\{-|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\} \exp\left\{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\} \leq$$

$$\leq L_2^k k^{2(1-\alpha)k} \exp\left\{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad L_2 = \left(\frac{2(1-\alpha)}{e}\right)^{2/(1-\alpha)}.$$

Тоді

$$\Delta_k''(z) \le \tilde{c}_2 L_2^k k^{2(1-\alpha)k} k^{-(1-\alpha+\beta)k} \exp\left\{-a|\sigma|^{1/\beta}\right\} \exp\left\{(b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\} =$$

$$= \tilde{c}_2 L_2^k \exp\left\{-a|\sigma|^{1/\beta} + (b+1)|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}$$

(тут знову враховано умову $\alpha+\beta=1$). Урахувавши ці нерівності, отримаємо

$$\alpha_{2k}(z) \le \tilde{c}_\varepsilon \tilde{L}_2^{2k} \big(\sqrt{\varepsilon}\big)^{2\gamma k} \exp\left\{-a_1|\sigma|^{1/\beta} + b_1|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\},$$

$\gamma = 1-\alpha+\beta = 2(1-\alpha) = 2\beta$, $a_1 = a/2$, $b_1 = b+1$. Аналогічно оцінюємо $\alpha_{2k+1}(z)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}$. В результаті приходимо до нерівності

$$\alpha_n(z) \le \tilde{\beta} \tilde{A}^n \big(\sqrt{\varepsilon}\,\big)^{\gamma n} \exp\left\{-a_2|\sigma|^{1/\beta} + b_2|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad z \in \mathbb{C},$$

причому всі сталі не залежать від n.

Візьмемо $\varepsilon = (2\tilde{A})^{-2/\gamma}$. Тоді $\sum_{k=n+1}^{\infty} A^k (\sqrt{\varepsilon})^{\gamma k} = 2^{-n}$, тобто

$$|r_n(z)| \le \frac{\tilde{\beta}}{2^n} \exp\left\{-a_2|\sigma|^{1/\beta} + b_2|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

З (4) випливає, що $r_n \in S_\beta^\alpha(\mathbb{C})$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ (тобто умова 1 виконується). Із (4) випливає також, що послідовність $\{r_n, n \ge 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в будь-якій обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, при цьому

$$|r_n(z)| \le \tilde{\beta} \exp\left\{-a_2|\sigma|^{1/\beta} + b_2|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C},$$

де сталі $\tilde{\beta}$, a_2, $b_2 > 0$ не залежать від n. Цим доведено, що оператор $g(D) \equiv A_g$ визначено у просторі S_α^β, кожну обмежену множину цього простору він переводить в обмежену множину цього ж простору. Отже, вказаний оператор є неперервним у просторі S_α^β (зазначимо, що у просторах S_α^β клас обмежених операторів збігається з класом неперервних операторів [1]), при цьому із співвідношення (1) випливає, що $A_g\varphi(x) = F^{-1}\big[g(\sigma)F[\varphi]\big]$. Отже, A_g можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за аналітичним (цілим) символом — функцією g, яка задовольняє відповідні умови.

3. Нелокальна багатоточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_g u, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{5}$$

де A_g — псевдодиференціальний оператор (див. п. 2), побудований за функцією g, яка є мультиплікатором у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, і такою, що $e^g \in S_\alpha^{1-\alpha}$. Символом $P_\alpha^{1-\alpha}$ позначатимемо клас функцій g, які задовольняють вказані умови. Наприклад, нехай $g(z) = N(z)$, $z = x+iy$, — поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє таку умову:

$$\exists c > 0 \quad \forall x \in R\colon \operatorname{Re} N(x) \le -c|x|^{2b}.$$

Очевидно, що N — мультиплікатор у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$, де $\alpha = 1/(2b)$. Крім того,

$$\left|e^{N(x)}\right| = e^{\mathrm{Re}N(x)} \le e^{-c|x|^{2b}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\exists c_1 > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\colon \left|e^{N(z)}\right| \le e^{|N(z)|} \le e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді, використовуючи теореми з [1], які є узагальненнями теореми Фрагмена – Ліндельофа, переконуємося, що ціла функція $e^{N(z)}$ задовольняє нерівність

$$\left|e^{N(z)}\right| \le c_0 \exp\left(-c_2|x|^{2b} + c_3|y|^{2b}\right), \quad c_0, c_2, c_3 > 0. \tag{6}$$

З нерівності (6) та характеристики просторів S_α^β випливає, що $e^N \in S_\alpha^{1-\alpha}$, $\alpha = 1/(2b)$.

Оскільки $g \in P_\alpha^{1-\alpha}$, то $e^g \in S_\alpha^{1-\alpha}$. Отже, існують такі c_0, a, $b > 0$, що

$$\left|e^{g(z)}\right| \le c_0 e^{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}}, \quad z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$\left|e^{tg(z)}\right| \le \left[c_0 e^{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}}\right]^t, \quad z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Далі вважаємо, що стала $c_0 > 0$ задовольняє умову $c_0 \le 1$. Тоді

$$\left|e^{tg(z)}\right| \le e^{-at|\sigma|^{1/\alpha} + bt|\tau|^{1/\alpha}}. \tag{7}$$

Для (5) задамо умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f, \quad f \in S_\alpha^{1-\alpha}, \tag{8}$$

де $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$ — фіксовані числа, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $B_1, \ldots, B_m$ — псевдодиференціальні оператори у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$, побудовані за функціями (символами) $g_1, \ldots, g_m$ відповідно, які задовольняють такі умови:

$$\forall \varepsilon > 0\colon 0 \le g_k(\sigma) \le \exp\left\{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \ldots, m\},$$

$$\exists L_k > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\colon |D_\sigma^s g_k(\sigma)| \le L_k^s s^{s(1-\alpha)} \exp\left\{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \tag{9}$$

$$s \in \mathbb{N}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Задачу (5), (8) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (5).

Класичний розв'язок задачі (5), (8) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F[v(t,\sigma)](x)$. Для функцій $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ отримуємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} = g(\sigma)v(t,\sigma), \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{10}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F^{-1}[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{tg(\sigma)\}, \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{12}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (11). Підставивши (12) в (11), одержимо

$$c = \tilde{f}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k g_k(\sigma)\exp\left\{t_k g(\sigma)\right\}\right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення $G(t,x) = F^{-1}\big[Q(t,\sigma)\big](x)$, де

$$Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma), \quad Q_1(t,\sigma) = \exp\{tg(\sigma)\},$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k g_k(\sigma)\exp\{t_k g(\sigma)\}\right)^{-1} = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k g_k(\sigma)Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, знаходимо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x)*f(x), \quad (t,x)\in\Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\right)e^{i\sigma x}\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{i\sigma(x-\xi)}\,d\sigma f(\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi =$$

$$= G(t,x)*f(x), \quad (t,x)\in\Omega. \tag{13}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а отже, правильність формули (13) випливають з властивостей функції G, які наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргумента σ.

Лема 1. *Для функції* $Q_1(t,\sigma) = \exp\{tg(\sigma)\}$, $g \in P_\alpha^{1-\alpha}$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, *та її похідних* (*за змінною* σ) *правильними є оцінки*

$$D_\sigma^s Q_1(t,\sigma) \le A^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)}\exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

де сталі A, $a_1 > 0$ *не залежать від* t.

Доведення. За інтегральною формулою Коші

$$D_\sigma^s Q_1(t,\sigma) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{Q_1(t,z)}{(z-\sigma)^{s+1}}\,dz, \quad z \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Використовуючи (7), отримуємо нерівності

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le \frac{s!}{R^s}\max_{z\in\Gamma_R}|Q_1(t,z)| \le \frac{s!}{R^s}\exp\left\{-at|\sigma_0|^{1/\alpha} + btR^{1/\alpha}\right\},$$

де σ_0 — точка максимуму функції $\exp\left\{-at|\xi|^{1/\alpha}\right\}$, $\xi \in [\sigma - R, \sigma + R]$.

Зауважимо, що

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad |\sigma| \le R, \\ \sigma + R, & \text{якщо} \quad \sigma \le -R, \\ \sigma - R, & \text{якщо} \quad \sigma \ge R. \end{cases}$$

Оскільки $\alpha \in (0,1)$, то $1/\alpha - 1 > 0$, тому $\xi^{1/\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\xi \tau^{1/\alpha-1}d\tau$. Отже, $M(\xi) = \xi^{1/\alpha}$ є опуклою донизу на проміжку $(0,\infty)$ функцією, яка задовольняє нерівність

$$M(\xi_1) + M(\xi_2) \le M(\xi_1 + \xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$$

(див. [11, с. 8]), або нерівність $M(\xi_1) - M(\xi_1 + \xi_2) \le -M(\xi_2)$. Звідси випливає існування таких сталих $\tilde{a} > 0$, $\tilde{\tilde{a}} > 0$, що

$$\exp\{-M(\sigma_0)\} \le \exp\left\{-M(\tilde{a}\sigma) + M(\tilde{\tilde{a}}R)\right\} \quad \forall R > 0, \quad \sigma \ge 0.$$

Отже, виконується нерівність

$$\exp\left\{-at|\sigma_0|^{1/\alpha}\right\} \le \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha} + a_2 t R^{1/\alpha}\right\}, \quad a_1, a_2 > 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le \frac{s!}{R^s}\exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha} + b_1 t R^{1/\alpha}\right\}, \quad b_1 = b + a_2, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_{s,t}(R) = R^{-s}\exp\{b_1 t R^{1/\alpha}\}$ є диференційовною на $(0,\infty)$, до того ж

$$\lim_{R\to+\infty} g_{s,t}(R) = +\infty, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad \lim_{R\to+0} g_{s,t}(R) = \begin{cases} +\infty, & s \in \mathbb{N}, \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_{s,t}(R) > 0$, $R \in (0,+\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму, який знаходимо за допомогою методів диференціального числення:

$$\inf_{R>0} g_{s,t}(R) = \omega^s t^{\alpha s} s^{-\alpha s}, \quad \omega = \left(\frac{b_1 e}{\alpha}\right)^\alpha.$$

Таким чином,

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le s! \inf g_{s,t}(R)\exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} = s!\omega^s t^{\alpha s} s^{-\alpha s}\exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+.$$

На підставі формули Стірлінга переконуємося, що при фіксованому $s \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le A^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)}\exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

де сталі $A, a_1 > 0$ не залежать від t.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Функція Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_\alpha^{2-\alpha}$.*

Доведення. Оцінимо похідні функції Q_2. З цієї метою скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s(F(\varphi)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{d\varphi^m} F(\varphi) \sum \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} \varphi(\sigma) \right)^{m_1} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} \varphi(\sigma) \right)^{m_2} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} \varphi(\sigma) \right)^{m_l}, \quad s \in \mathbb{N}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $m_1 + 2m_2 + \ldots$ $\ldots + lm_l = s,\ m_1 + \ldots + m_l = m$). У цій формулі покладемо $F = \varphi^{-1},\ \varphi = R$, де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) \exp\{t_k g(\sigma)\}.$$

Тоді $Q_2(\sigma) = F(R) = R^{-1}$ і

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| = \left| \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{dR^m} R^{-1} \sum \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{m_1} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} R(\sigma) \right)^{m_2} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma) \right)^{m_l} \right|.$$

Враховуючи властивості функцій $g_1, \ldots, g_m$ (див. (9)) і нерівності (14), знаходимо

$$\left| D_\sigma^j R(\sigma) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \mu_k \sum_{i=0}^{j} C_j^i \left| D_\sigma^i g_k(\sigma) \right| \left| D_\sigma^{j-i} e^{t_k g(\sigma)} \right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{m} \mu_k \sum_{i=0}^{j} C_j^i L_k^i i^{i(1-\alpha)} A^{j-i} t_k^{(j-i)\alpha} (j-i)^{(j-i)(1-\alpha)} \exp\left\{ -a_1 t_k |\sigma|^{1/\alpha} + \varepsilon |\sigma|^{1/\alpha} \right\}.$$

Нехай $\tilde{L} = \max\{L_1, \ldots, L_m\},\ L_1 = \max\{1, T\}$. Тоді

$$\left| D_\sigma^j R(\sigma) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \mu_k \sum_{i=0}^{j} C_j^i \tilde{L}^i i^{i(1-\alpha)} A^{j-i} L_1^{(j-i)\alpha} (j-i)^{(j-i)(1-\alpha)} \exp\left\{ -a_1 t_1 |\sigma|^{1/\alpha} + \varepsilon |\sigma|^{1/\alpha} \right\}.$$

Поклавши далі $\varepsilon = a_1 t_1 / 2$, прийдемо до оцінки

$$\left| D_\sigma^j R(\sigma) \right| \leq c \tilde{A}^j j^{(j(1-\alpha))} \exp\left\{ -\frac{a_1 t_1}{2} |\sigma|^{1/\alpha} \right\}, \quad s \in \mathbb{N},$$

де $c = \sum_{k=1}^{m} \mu_k,\ \tilde{A} = 2\max\{L, AL_1^\alpha\}$. Крім того,

$$\frac{d^m}{dR^m} R^{-1} = (-1)^m m! R^{-(m+1)}$$

і

$$R^{-1}(\sigma) \equiv Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) \exp\{t_k g(\sigma)\}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\left\{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha} - \frac{a_1 t_1}{2}\,|\sigma|^{1/\alpha}\right\}\right)^{-1} \leq \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1} \equiv \beta_0 > 0,$$

оскільки, за умовою, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$. Пропускаючи далі технічні викладки, записуємо остаточний результат: похідні функції Q_2 задовольняють нерівності

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq c' L_0^s s^{s(2-\alpha)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

З нерівності (15) та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_\alpha^{2-\alpha}$.

Лему 2 доведено.

Зауваження. З лем 1 і 2 випливає, що $Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \in S_\alpha^{2-\alpha}$ при кожному $t \in (0,T]$. Отже, $G(t,\cdot) = F^{-1}[Q(t,\cdot)] \in S_{2-\alpha}^{\alpha}$ при кожному $t \in (0;T]$.

Оскільки $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, то (див. (7), (9))

$$g_k(\sigma)e^{t_k g(\sigma)} \leq g_k e^{-at_k|\sigma|^{1/\alpha}} \leq g_k e^{-at_1|\sigma|^{1/\alpha}}, \quad k \in \{1,\ldots,m\},$$

і

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{t_k g(\sigma)} = \mu\Big(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{t_k g(\sigma)}\Big).$$

Тоді

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{t_k g(\sigma)} \leq \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{-at_k g(\sigma)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{-at_1|\sigma|^{1/\alpha}} \leq \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k < 1, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Використовуючи цю нерівність і поліноміальну формулу, знаходимо

$$Q_2(x) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) e^{t_k} g(\sigma)\right)^{r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\Big(\mu_1 g_1(\sigma) e^{t_1 g(\sigma)}\Big)^{r_1} \ldots \Big(\mu_m g_m(\sigma) e^{t_m g(\sigma)}\Big)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\,\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m} g_1^{r_1}(\sigma)\ldots g_m^{r_m}(\sigma)\tilde{Q}_1(\lambda,\sigma),$$

де $\lambda = t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$, $\tilde{Q}_1(\lambda,\sigma) = e^{(t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m)g(\sigma)}$.

Отже,

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{-i\sigma x}\, d\sigma = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{tg(\sigma)} Q_2(\sigma) e^{-i\sigma x}\, d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \tilde{G}(\lambda+t,x), \tag{16}$$

де

$$\tilde{G}(\lambda+t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} g_1^{r_1}(\sigma)\ldots g_m^{r_m}(\sigma) e^{(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t)g(\sigma)} e^{-i\sigma x}\, d\sigma.$$

Лема 3. *Функція $G(t,x),\ t\in(0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $S_{2-\alpha}^{\alpha}$, диференційовна за змінною t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить показати, що функція $F[G(t,x)] = Q(t,\sigma)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $F[S_{2-\alpha}^{\alpha}] = S_{\alpha}^{2-\alpha}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)\right] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma), \quad \Delta t\to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} D_\sigma^s(g(\sigma)Q(t,\sigma)),\ s\in\mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$;

2) $\left|D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)\right| \le \bar{c}\bar{B}^s s^{s(2-\alpha)}\exp\left\{-\bar{a}|\sigma|^{1/\alpha}\right\},\ s\in\mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c},\bar{a},\bar{B}>0$ не залежать від Δt, якщо Δt є досить малим.

Функція $Q(t,\sigma),\ (t,\sigma)\in\Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = g(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), \quad 0<\theta<1.$$

Отже,

$$D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l g(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{17}$$

і

$$D_\sigma^s\left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right) = \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l g(\sigma)\Big[D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma)\Big].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{s-l}Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{s-l}Q(t,\sigma) = D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \quad 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з (14), (15) випливає, що $D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta\Delta t,\sigma)\theta\Delta t\to 0,\ \Delta t\to 0$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тоді і $D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)\to D_\sigma^s\left(\dfrac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right)$ при $\Delta t\to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Отже, умова 1 виконується.

Доведемо, що виконується умова 2. Оскільки, за умовою, функція g — мультиплікатор у просторі $S_{\alpha}^{1-\alpha}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_{\varepsilon} > 0 \quad \forall s \in \mathbb{Z}_{+} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}\colon \left| D_{\sigma}^{s} g(\sigma) \right| \leq c_{\varepsilon} \varepsilon^{s} s^{s(1-s)} e^{\varepsilon |\sigma|^{1/\alpha}}. \tag{18}$$

Враховуючи (17), (18), а також оцінки (14), (15), які задовольняють похідні функцій $Q_1(t,\sigma)$, $Q_2(\sigma)$, отримуємо

$$\left| D_{\sigma}^{s} \Phi_{\Delta t}(\sigma) \right| \leq \tilde{c} c_{\varepsilon} \sum_{l=0}^{s} C_{s}^{l} \varepsilon^{l} l^{l(1-\alpha)} \tilde{B}^{s-l} (s-l)^{(s-l)(2-\alpha)} e^{\varepsilon |\sigma|^{1/\alpha}} e^{-a_1 (t+\theta \Delta t) |\sigma|^{1/\alpha}} e^{\varepsilon |\sigma|^{1/\alpha}} t^{\alpha\omega}.$$

Покладемо $\varepsilon = \dfrac{a_1 t}{2}$. Тоді

$$\left| D_{\sigma}^{s} \Phi_{\Delta t}(\sigma) \right| \leq \tilde{\tilde{c}} \tilde{\tilde{B}}^{s} s^{s(2-\alpha)} t^{\alpha\omega} \exp\left\{ -\tilde{a} |\sigma|^{1/\alpha} \right\},$$

де $\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} c_{\varepsilon}$, $\tilde{\tilde{B}} = 2 \max\left\{ \varepsilon, \tilde{B} \right\}$, $\tilde{a} = a_1 t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt.

Лему 3 доведено.

***Наслідок* 1.** *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t} \big(f * G(t,\cdot) \big) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t} \quad \forall f \in \left(S_{2-\alpha}^{\alpha} \right)', \quad t \in (0,T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f * G(t,x) = \left\langle f_{\xi}, T_{-x} \check{G}(t,\xi) \right\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(f * G(t,x) \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \big[\left(f * G(t+\Delta t,\cdot) \right) - \left(f * G(t,\cdot) \right) \big] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle f_{\xi}, \frac{1}{\Delta t} \left[T_{-x} \check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x} \check{G}(t,\xi) \right] \right\rangle.$$

На підставі леми 3 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t} \left[T_{-x} \check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x} \check{G}(t,\cdot) \right] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S_{2-\alpha}^{\alpha}$, тому з урахуванням неперервності функціонала f

$$\frac{\partial}{\partial t} \big(f * G(t,x) \big) = \left\langle f_{\xi}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[T_{-x} \check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x} \check{G}(t,\xi) \right] \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_{\xi}, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t,\xi) \right\rangle = \left\langle f_{\xi}, T_{-x} \frac{\partial}{\partial t} \check{G}(t,\xi) \right\rangle = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

що й потрібно було довести.

Лема 4. *У просторі* $\left(S^{\alpha}_{2-\alpha}\right)'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} B_l G(t,\cdot) = \delta, \tag{19}$$

де δ *— дельта-функція Дірака.*

Доведення. Використавши властивість неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t зі значеннями у просторі $S^{\alpha}_{2-\alpha}$, співвідношення (19) замінимо граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} F[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} F[B_l G(t,\cdot)] = F[\delta] \tag{20}$$

у просторі $(S^{2-\alpha}_{\alpha})'$. Урахувавши зображення функції G та операторів B_l, $l \in \{1,\ldots,m\}$, співвідношення (20) запишемо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} g_l(\sigma) Q(t,\sigma) = 1. \tag{21}$$

Для доведення співвідношення (21) беремо довільну функцію $\psi \in S^{2-\alpha}_{\alpha}$ і, використовуючи теорему про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега та розуміючи $g_l(\cdot)Q(t,\cdot)$, $l \in \in \{1,\ldots,m\}$, як регулярну узагальнену функцію з простору $\left(S^{2-\alpha}_{\alpha}\right)'$, знаходимо

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \langle g_l(\cdot)Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\, d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \int\limits_{\mathbb{R}} g_l(\sigma) Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mu}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{g_l(\sigma) Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)} \right] \psi(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l g_l(\sigma) Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k g_k(\sigma) Q_1(t_k,\sigma)} \psi(\sigma)\, d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\sigma)\, d\sigma = \langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (21) виконується у просторі $\left(S^{2-\alpha}_{\alpha}\right)'$, а отже, правильним є співвідношення (19).

Лему 4 доведено.

Символом $\left(S^{\alpha}_{2-\alpha,*}\right)'$ позначатимемо сукупність усіх функціоналів із простору $\left(S^{\alpha}_{2-\alpha}\right)'$, які є згортувачами у просторі $S^{\alpha}_{2-\alpha}$.

Наслідок 2. *Нехай* $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in \left(S^{\alpha}_{2-\alpha,*}\right)'$, $(t,x) \in \Omega$. *Тоді у просторі* $\left(S^{\alpha}_{2-\alpha}\right)'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} B_k \omega(t,\cdot) = f. \tag{22}$$

Доведення. Оскільки

$$\omega(t,x) = f * G(t,x) = \left\langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right\rangle, \quad f \in \left(S^{\alpha}_{2-\alpha,*}\right)',$$

то з властивостей неперервності $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі $S^{\alpha}_{2-\alpha}$, випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t зі значеннями в цьому ж просторі. Тоді, враховуючи властивість неперервності перетворення Фур'є та формулу $F[f*G] = F[f]F[G] = F[f]Q$, яка є правильною для довільної узагальненої функції f із класу $\left(S^{\alpha}_{2-\alpha,*}\right)'$, від (22) переходимо до співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} F[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F\big[B_k\omega(t,\cdot)\big] = F[f]$$

у просторі $\left(S^{2-\alpha}_{\alpha}\right)'$ або

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} g_k(\cdot)Q(t,\cdot) = 1,$$

яке, як доведено раніше (див. (21)), справджується в цьому просторі. Це доводить, що у просторі $\left(S^{\alpha}_{2-\alpha}\right)'$ співвідношення (22) виконується.

Наслідок 2 доведено.

Функція G є розв'язком рівняння (5). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}\big[Q(t,\sigma)\big] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

З іншого боку,

$$A_g G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\big[g(\sigma)F_{x\to\sigma}[G(t,x)]\big] = F^{-1}\big[g(\sigma)Q(t,\sigma)\big] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

Звідси випливає, що функція G задовольняє рівняння (5).

Далі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі для рівняння (5).

З наслідку 2 випливає, що для рівняння (5) багатоточкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти розв'язок рівняння (5), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} B_k u(t,\cdot) = f, \quad f \in \left(S^{\alpha}_{2-\alpha,*}\right)', \tag{23}$$

де граничне співвідношення розглядається у просторі $\left(S^{\alpha}_{2-\alpha}\right)'$ (обмеження на параметри μ, $\mu_1,\ldots,\mu_m,t_1,\ldots,t_m$ такі ж, як у випадку задачі (5), (8)).

Теорема 2. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (5), (23) *є розв'язною, розв'язок дається формулою* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* G *— фундаментальний розв'язок задачі* (5), (23).

Доведення. Переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (5). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big(f * G(t,x)\big) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$
$$A_g u(t,x) = F^{-1}\big[g(\sigma)F[f*G]\big](t,x).$$

Оскільки f — згортувач у просторі $S^{\alpha}_{2-\alpha}$, то

$$F[f*G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma)F[G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma)Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$A_g u(t,x) = F^{-1}\big[g(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\big](x) = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\,Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\right](x) =$$
$$= F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right]F[f](\sigma)\right](x) = F^{-1}\left[F\left[f*\frac{\partial G}{\partial t}\right]\right](x) = f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (5). З наслідку 2 випливає, що u задовольняє умову (23) в указаному сенсі.

Теорему 2 доведено.

Література

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
2. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наук. думка, Киев (1984).
3. M. L. Gorbachuk, V. I. Gorbachuk, *Boundary-value problems for operator differential equations*, Kluwer, Dordrecht etc. (1991).
4. А. И. Кашпировский, *Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук*, Киев (1981).
5. М. Л. Горбачук, П. И. Дудников, *О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы*, Докл. АН УССР, Сер. А, № 4, 9 – 11 (1981).
6. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
7. В. В. Городецький, *Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
8. В. В. Городецький, *Еволюційні рівняння в зліченно нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій*, Рута, Чернівці (2008).
9. А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высш., шк., Москва (1995).
10. И. А. Белавин, С. П. Капица, С. П. Курдюмов, *Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **38**, № 6, 885 – 902 (1988).
11. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).
12. Б. Л. Гуревич, *Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем*, Докл. АН СССР, **99**, № 6, 893 – 896 (1954).
13. В. А. Літовченко, *Цілковита розв'язність задачі Коші у просторах типу S для рівнянь, параболічних за Петровським*, Укр. мат. журн., **54**, № 11, 1467 – 1479 (2002).

Одержано 21.01.20