DOI: 10.37863/umzh.v73i11.2323

УДК 517.988.5+517.988.63

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

УМОВИ ОБОРОТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ НА ОСІ ФУНКЦІЙ

For nonlinear autonomous differential operators defined in the space of functions bounded and continuous on the axis, necessary and sufficient conditions of being C^1-diffeomorphisms are obtained.

Отримано необхідні й достатні умови, за яких нелінійні автономні диференціальні оператори, що визначені у просторі обмежених і неперервних на осі функцій зі значеннями в банаховому просторі, є C^1-дифеоморфізмами.

Статтю присвячено встановленню необхідних та достатніх умов, при виконанні яких нелінійні автономні диференціальні оператори, що діють у просторі обмежених і неперервно диференційовних на осі функцій зі значеннями в нескінченновимірному банаховому просторі, є дифеоморфізмами класу C^1. Такі оператори можна використовувати, наприклад, при вивченні властивостей розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь та дослідженні оборотності нелінійних операторів, що є композиціями диференціальних операторів.

1. Загальні умови оборотності диференційовних відображень. Будемо використовувати потрібні для подальшого загальноприйняті позначення та означення, запозичені з [1–4].

Важливим для подальшого є таке твердження.

Твердження 1 [5]. *Нехай X і Y — банахові простори і $F : X \to Y$ — C^1-відображення. Відображення $F : X \to Y$ є C^1-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) *відображення F сюр'єктивне*;

2) *відображення F ін'єктивне*;

3) *відображення F є локальним C^1-дифеоморфізмом у кожній точці $x \in X$ або похідна $(DF)_x : X \to Y$ є неперервно оборотним оператором для кожної точки $x \in X$.*

Це твердження отримано з використанням необхідних і достатніх умов існування оберненої функції [1–4, 6].

Зазначимо, що в твердженні 1 X і Y — довільні банахові простори над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно і при використанні твердження 1 потрібно перевіряти виконання для відображення F перших двох умов твердження.

2. Необхідні й достатні умови ін'єктивності відображення F. Важливою для подальшого є така умова ін'єктивності C^1-відображення $F : X \to Y$. Кожній точці (x_1, x_2) множини

$$\mathcal{K}(X) = \{(y_1, y_2) \in X \times X : y_1 \neq y_2\}$$

співставимо диференційовну на відрізку $[0,1]$ функцію $F(x_1 + \tau(x_2 - x_1))$ зі значеннями в Y. Очевидно, що

$$\frac{dF(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{d\tau} = (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)}(x_2 - x_1), \quad \tau \in [0,1],$$

і

$$\left(\int\limits_0^1 (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)}\, d\tau\right)(x_2-x_1) = F(x_2) - F(x_1). \tag{1}$$

Розглянемо оператор $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F} : X \to Y$, що визначається рівністю

$$\mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \int\limits_0^1 (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)}\, d\tau, \tag{2}$$

і ядро $\ker\ \mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \{x \in X : \mathcal{I}_{x_1,x_2,F}x = 0\}$ цього оператора.

На підставі (1) і (2) справджується таке твердження.

Твердження 2. *C^1-відображення $F : X \to Y$ ін'єктивне тоді і тільки тоді, коли*

$$\ker\ \mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \{0\} \quad \textit{для всіх} \quad (x_1,x_2) \in \mathcal{K}(X). \tag{3}$$

***Зауваження* 1.** Виконання співвідношення (3) аналогічне виконанню співвідношення $\ker A = \{0\}$ для лінійного неперервного оператора $A\colon X \to Y$ (у теоремі Банаха про обернений оператор [7]). Якщо $F(x) = Ax$, то $(DF)_x = A$ для всіх $x \in X$ (оператор $A\colon X \to Y$ є C^1-відображенням), і тому $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}(x_2-x_1) = A(x_2-x_1)$. Отже, якщо $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}(x_2-x_1) \neq 0$ для всіх $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, то $\ker A = \{0\}$, і навпаки.

***Зауваження* 2.** Перевірка в твердженні 1 виконання для відображення F умови сюр'єктивності є складною задачею навіть у випадку лінійного F (див., наприклад, задачі про обмежені розв'язки лінійних диференціальних або різницевих рівнянь [8 – 12]). Вимога виконання цієї умови в твердженні 1 є природною вимогою (вона міститься і в формулюванні теореми Банаха про обернений оператор [7]). Для деяких класів відображень F твердження 1 є правильним і без умови 1. Простим прикладом такого відображення є лінійний автономний диференціальний оператор L, що діє в просторі визначених і обмежених на $\mathbb{R}$ неперервно диференційовних функцій зі значеннями в $\mathbb{C}$. Також твердження 1 є узагальненням теореми Банаха про обернений оператор.

3. Достатні умови сюр'єктивності відображення $\boldsymbol{F}$. Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх відображень $A \in L(X,Y)$, кожне з яких має неперервне обернене A^{-1}.

Нехай $B_X[0,r]$, де $r \in (0,+\infty)$, — замкнена куля $\{x \in X : \|x\|_X \leq r\}$ в X.

Справджується твердження, що дає достатні умови сюр'єктивності відображення F.

Твердження 3. *Нехай для кожного числа $H \geq 0$ існують такі число $r > 0$ і відображення $A \in \mathcal{E}$, що*:

1) $F - A\colon B_X[0,r] \to Y$ — *цілком неперервне відображення*;

2) *виконується співвідношення*

$$\sup_{x \in B_X[0,r]} \|Fx - Ax\|_Y \leq \frac{r}{\|A^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H. \tag{4}$$

Тоді для кожного $y \in Y$ рівняння $Fx = y$ має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Це твердження отримано автором у [13]. У випадку лінійного відображення F виконання співвідношення (4) є необхідним для сюр'єктивності цього відображення [13].

Інші умови сюр'єктивності відображення F наведено в [5].

4. Умови оборотності автономних диференціальних операторів. Спочатку наведемо деякі означення і позначення, потрібні для дослідження диференціальних операторів.

Нехай E — банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, E)$ банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями у просторі E з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через $C^n(\mathbb{R}, E)$, де $n \in \mathbb{N}$, банаховий простір усіх функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, для кожної з яких $dx/dt, \ldots, d^n x/dt^n \in C^0(\mathbb{R}, E)$, з нормою

$$\|x\|_{C^n(\mathbb{R},E)} = \max\left\{\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \ldots, \left\|\frac{d^n x}{dt^n}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\right\}.$$

Аналогічно визначається банаховий простір $C^k(\mathbb{R}, E)$ при $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ і $n \geq 2$.

У просторі $C^0(\mathbb{R}, E)$ визначимо оператор зсуву $S_h,\ h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Елемент $y \in C^k(\mathbb{R}, E)$ називається *майже періодичним* [14], якщо замикання множини $\{S_h y \colon h \in \mathbb{R}\}$ у просторі $C^k(\mathbb{R}, E)$ є компактною підмножиною цього простору.

Множини $B^k(\mathbb{R}, E),\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, майже періодичних елементів просторів $C^k(\mathbb{R}, E)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, відповідно є підпросторами цих просторів із нормами

$$\|x\|_{B^k(\mathbb{R},E)} = \|x\|_{C^k(\mathbb{R},E)}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Оператор $A \in L\big(C^i(\mathbb{R}, E), C^j(\mathbb{R}, E)\big)$, де $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, називається *майже періодичним*, якщо замикання множини $\{S_\tau A S_{-\tau} \colon \tau \in \mathbb{R}\}$ у просторі $L\big(C^i(\mathbb{R}, E), C^j(\mathbb{R}, E)\big)$ є компактним у цьому просторі [15, 16].

Позначимо через $\mathfrak{G}$ множину всіх C^1-відображень $g \colon E \to E$, для кожного з яких похідна Фреше $(Dg)_x$ є рівномірно неперервною на кожній обмеженій множині $M \subset E$.

Розглянемо автономний диференціальний оператор $\mathfrak{D} \colon C^n(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається формулою

$$(\mathfrak{D}x)(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} g_k\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

де $x \in C^n(\mathbb{R}, E),\ g_k \in \mathfrak{G},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ і $d^0 x(t)/dx^0 = x(t)$.

При виконанні таких вимог до відображень $g_k,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, *диференціальний оператор* $\mathfrak{D}$ *є* C^1*-відображенням.*

Справді, з урахуванням (1), (2) для довільних $x, u \in C^n(\mathbb{R}, E)$ і $t \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$(\mathfrak{D}(x+u))(t) - (\mathfrak{D}x)(t) = \left(\frac{d^n(x(t)+u(t))}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} g_k\left(\frac{d^k(x(t)+u(t))}{dt^k}\right)\right) -$$

$$- \left(\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} g_k\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right)\right) = \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(g_k\left(\frac{d^k(x(t)+u(t))}{dt^k}\right) - g_k\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(g_k \left(\frac{d^k (x(t) + u(t))}{dt^k} \right) - g_k \left(\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right) \right) - \sum_{k=0}^{n-1} (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \frac{d^k u(t)}{dt^k} =$$

$$= \left(\frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^1 (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k} + \tau \frac{d^k u(t)}{dt^k}} \, d\tau \, \frac{d^k u(t)}{dt^k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \frac{d^k u(t)}{dt^k} = \left(\frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^1 \left((Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k} + \tau \frac{d^k u(t)}{dt^k}} - (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \right) d\tau \, \frac{d^k u(t)}{dt^k}.$$

Оскільки на підставі рівномірної неперервності похідних $(Dg_k)_x,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, на кожній обмеженій множині $M \subset E$ виконується співвідношення

$$\lim_{\|u\|_{C^n(\mathbb{R},E)} \to 0} \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left((Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k} + \tau \frac{d^k u(t)}{dt^k}} - (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \right) d\tau \, \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right\|_E}{\|u\|_{C^n(\mathbb{R},E)}} = 0,$$

то згідно з означенням похідної Фреше (див. [17, с. 196]) похідну $(D\mathfrak{D})_x$ диференціального оператора $\mathfrak{D}$ в точці $x = x(t)$ записуємо у вигляді

$$((D\mathfrak{D})_x u)(t) = \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} (Dg_k)_{\frac{d^k x(t)}{dt^k}} \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \qquad u \in C^n(\mathbb{R}, E), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Завдяки включенням $g_k \in \mathfrak{S},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, ця похідна є неперервною по x на $C^n(\mathbb{R}, E)$. Тому оператор $\mathfrak{D}$ є C^1-відображенням.

Для подальшого нам також потрібен оператор

$$\mathcal{I}_{x_1, x_2, \mathfrak{D}} = \int\limits_0^1 (D\mathfrak{D})_{x_1 + \tau(x_2 - x_1)} \, d\tau, \tag{7}$$

де $x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R}, E)$, аналогічний оператору $\mathcal{I}_{x_1, x_2, F}$, що визначається рівністю (2).

Завдяки (6), (7) для всіх $x_1, x_2, u \in C^n(\mathbb{R}, E)$

$$(\mathcal{I}_{x_1, x_2, \mathfrak{D}} u)(t) = \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^1 (Dg_k)_{\frac{d^k x_1(t)}{dt^k} + \tau \left(\frac{d^k x_2(t)}{dt^k} - \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} \right)} d\tau \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Після проведеної підготовчої роботи наведемо умови оборотності оператора $\mathfrak{D}$.

Згідно з твердженнями 1, 2 справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $g_k \in \mathfrak{S},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

C^1*-відображення* $\mathfrak{D} : C^n(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, *що визначається співвідношенням* (5), *є* C^1*-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) $\mathfrak{D}C^n(\mathbb{R}, E) = C^0(\mathbb{R}, E)$;

2) $\ker \mathcal{I}_{x_1, x_2, \mathfrak{D}} = \{0\}$ *для всіх* $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}(C^n(\mathbb{R}, E))$;

3) *для кожної точки* $x \in C^n(\mathbb{R}, E)$ *відображення* $(D\mathfrak{D})_x$, *що визначається співвідношенням* (6), *має обернений неперервний оператор* $\left((D\mathfrak{D})_x\right)^{-1} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^n(\mathbb{R}, E)$.

Зауваження **3.** Для нелінійного автономного оператора $\mathfrak{D} : C^n(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ лінійні диференціальні оператори $(D\mathfrak{D})_x : C^n(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E),\ x \in C^n(\mathbb{R}, E)$, у випадку $x(t) \not\equiv c$, $c \in E$, є неавтономними операторами. Для перевірки виконання умови 3 теореми 1 можна використовувати результати, викладені, наприклад, у [8 – 11].

Зауваження **4.** Завдяки включенням $g_k \in \mathfrak{S},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, і автономності оператора $\mathfrak{D}$ виконується співвідношення $\mathfrak{D}B^n(\mathbb{R}, E) \subset B^0(\mathbb{R}, E)$. Також для кожного $x \in B^n(\mathbb{R}, E)$ лінійний оператор $(D\mathfrak{D})_x : C^n(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ є майже періодичним і $(D\mathfrak{D})_x B^n(\mathbb{R}, E) \subset$ $\subset B^0(\mathbb{R}, E)$.

Отже, з урахуванням зауваження 4 і тверджень 1, 2 за допомогою заміни в теоремі 1 просторів $C^n(\mathbb{R}, E)$ і $C^0(\mathbb{R}, E)$ на $B^n(\mathbb{R}, E)$ і $B^0(\mathbb{R}, E)$ відповідно отримуємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай* $g_k \in \mathfrak{S},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

C^1*-відображення* $\mathfrak{D} : B^n(\mathbb{R}, E) \to B^0(\mathbb{R}, E)$, *що визначається співвідношенням* (5), *є* C^1*-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) $\mathfrak{D}B^n(\mathbb{R}, E) = B^0(\mathbb{R}, E)$;

2) $\ker \mathcal{I}_{x_1, x_2, \mathfrak{D}} = \{0\}$*для всіх* $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}(B^n(\mathbb{R}, E))$;

3) *для кожної точки* $x \in B^n(\mathbb{R}, E)$ *відображення* $(D\mathfrak{D})_x$, *що визначається співвідношенням* (6), *має обернений неперервний оператор* $\left((D\mathfrak{D})_x\right)^{-1} : B^0(\mathbb{R}, E) \to B^n(\mathbb{R}, E)$.

5. Приклад C^1-відображення, що не є елементом множини $\mathfrak{S}$. Важливою вимогою в теоремах 1, 2 є рівномірна неперервність похідних Фреше $(Dg_k)_x,\ k = \overline{0, n-1}$, на обмежених підмножинах банахового простору E.

У випадку скінченновимірного банахового простору E ця вимога для C^1-відображень $g_k :$ $E \to E,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, виконується завдяки теоремі Кантора [18, с. 179].

Покажемо, що *у випадку нескінченновимірного простору* E *відображення* $g : E \to E$ *класу* C^1 *може не бути елементом множини* $\mathfrak{S}$.

Вважатимемо, що простір E збігається з банаховим простором l_1 послідовностей дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ з нормою

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Будемо використовувати елементи

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots \in l_1.$$

Візьмемо довільне C^1-відображення $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови:

а) $g_0(x) = 0$ для всіх x з деякого околу U нуля;

б) $g_0'(1) = 1$.

Визначимо відображення $g\colon l_1 \to l_1$ рівністю

$$g(x) = \sum_{1 \le n} n g_0(x_n) e_n. \tag{8}$$

Покажемо, що:

1) $g\colon l_1 \to l_1$ — диференційовне в кожній точці $x \in l_1$ відображення;
2) похідна Фреше $(Dg)_x$ неперервна по x на l_1;
3) похідна Фреше $(Dg)_x$ є необмеженою на одиничній сфері.

Спочатку приділимо увагу першій властивості.

Розглянемо довільний елемент $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in l_1$. Згідно з (8) і вимогами до відображення $g_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$g(x+u) - g(x) = \sum_{1 \le n} n g_0(x_n + u_n) e_n - \sum_{1 \le n} n g_0(x_n) e_n = \sum_{1 \le n} n \big(g_0(x_n + u_n) - g_0(x_n)\big) e_n =$$

$$= \sum_{1 \le n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n + \sum_{1 \le n} n \big(g_0(x_n + u_n) - g_0(x_n)\big) e_n - \sum_{1 \le n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n =$$

$$= \sum_{1 \le n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n + \sum_{1 \le n} n \Big(\big(g_0(x_n + u_n) - g_0(x_n)\big) - g_0'(x_n) u_n\Big) e_n =$$

$$= \sum_{1 \le n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n + \sum_{1 \le n} n \left(\int\limits_0^1 \big(g_0'(x_n + \tau u_n) - g_0'(x_n)\big)\, d\tau\right) u_n\, e_n. \tag{9}$$

Оскільки на підставі умови a) і рівномірної неперервності похідної $g_0'(x)$ на кожному відрізку $[a,b]$ виконується співвідношення

$$\lim_{\|u\|_{l_1} \to 0} \frac{\sum_{1 \le n} n \left| \left(\int_0^1 \big(g_0'(x_n + \tau u_n) - g_0'(x_n)\big)\, d\tau\right) u_n \right|}{\|u\|_{l_1}} = 0,$$

то з урахуванням рівностей (9) на підставі означення похідної Фреше [17, с. 196] похідну $(Dg)_x$ відображення $g\colon l_1 \to l_1$ в точці x записуємо у вигляді

$$((Dg)_x u)_n = \sum_{1 \le n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n, \quad n \ge 1. \tag{10}$$

Отже, відображення $g\colon l_1 \to l_1$ диференційовне в кожній точці $x \in l_1$.

Далі покажемо неперервність похідної Фреше $(Dg)_x$ по x на l_1, тобто що для кожного $x \in l_1$

$$\lim_{\tilde{x} \to x} \|(Dg)_{\tilde{x}} - (Dg)_x\|_{L(l_1, l_1)} = 0. \tag{11}$$

Згідно з (10) та означенням норми в l_1

$$\|(Dg)_{\tilde{x}} - (Dg)_x\|_{L(l_1, l_1)} = \sup_{\|u\|_{l_1} = 1} \left\| \sum_{1 \le n} n g_0'(\tilde{x}_n) u_n\, e_n - \sum_{1 \le n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n \right\|_{l_1} =$$

$$= \sup_{\|u\|_{l_1}=1} \left\| \sum_{1\le n} n\big(g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big) u_n\, e_n \right\|_{l_1} \le \sum_{1\le n} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big|. \tag{12}$$

Завдяки умові а) для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n(\varepsilon)$, що

$$\sum_{1\le n} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big| = \sum_{n=1}^{n(\varepsilon)} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big|,$$

якщо

$$\|\tilde{x} - x\|_{l_1} < \varepsilon.$$

Тому на підставі рівномірної неперервності похідної $g_0'(x)$ на кожному відрізку $[a,b]$

$$\lim_{\tilde{x}\to x} \sum_{1\le n} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big| = 0,$$

і, отже, з урахуванням (12) співвідношення (11) справджується.

Таким чином, друга властивість також виконується.

Оскільки на підставі (10) та умови б) для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $u \in l_1$

$$((Dg)_{e_n} u)_n = n g_0'(1) u_n e_n = n u_n e_n,$$

то

$$\|(Dg)_{e_n}\|_{L(l_1,l_1)} \ge n.$$

Отже, третя властивість також виконується, тобто похідна Фреше $(Dg)_x$ є необмеженою на одиничній сфері.

Звідси випливає, що похідна Фреше $(Dg)_x$ не може бути рівномірно неперервним по x відображенням на одиничній сфері.

Таким чином, C^1-відображення $g\colon l_1 \to l_1$, що визначається рівністю (8), не є елементом множини $\mathfrak{S}$.

6. Умови сюр'єктивності диференціального оператора $\mathfrak{D}$. Будемо вважати, що банаховий простір E є скінченновимірним.

Позначимо через $\mathcal{G}$ множину всіх упорядкованих n-множин $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}\}$, де $B_k \in L(E,E)$, $k = \overline{0, n-1}$, кожній з яких відповідає лінійний неперервний оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}\colon C^n(\mathbb{R},E) \to C^0(\mathbb{R},E)$, що має неперервний обернений $(\mathcal{L}_{\mathcal{B}})^{-1}$ і визначається формулою

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{B}} x)(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Наведемо твердження, аналогічне твердженню 3, що дає достатні умови виконання рівності

$$\mathfrak{D} C^n(\mathbb{R},E) = C^0(\mathbb{R},E).$$

Теорема 3. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і множина $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}\} \in \mathcal{G}$, що*

$$\sup_{\|x\|_{C^{n-1}(\mathbb{R},E)} \le r} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} g_k\left(\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} B_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\|_E \le \frac{r}{\|(\mathcal{L}_B)^{-1}\|_{L(C^0(\mathbb{R},E), C^{n-1}(\mathbb{R},E))}} - H.$$

Тоді оператор $\mathfrak{D}\colon C^n(\mathbb{R},E) \to C^0(\mathbb{R},E)$, що визначається рівністю (5), *є сюр'єктивним.*

Теорема 3 є окремим випадком загальних тверджень, отриманих автором у [19].

7. Приклад диференціального оператора, що є C^1-дифеоморфізмом. Розглянемо диференціальний оператор $\mathcal{L}: C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція.

У статті [20] встановлено таке твердження.

Твердження 4. *Диференціальний оператор* $\mathcal{L}: C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *є ін'єктивним і сюр'єктивним оператором тоді і тільки тоді, коли*:

1) *функція* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є строго монотонною*;

2) $g\,\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Згідно з цим твердженням і твердженням 1 справджується така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *неперервно диференційовна функція.*

Диференціальний оператор $\mathcal{L}: C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *є* C^1*-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) *функція* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є строго монотонною*;

2) $g\,\mathbb{R} = \mathbb{R}$;

3) $g'(x) \neq 0$ *для всіх* $x \in \mathbb{R}$.

8. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Оборотності нелінійних відображень у банаховому просторі та її застосуванням приділено значну увагу (див., наприклад, [21 – 24]).

Твердження 1 є окремим випадком отриманих автором у [5] тверджень про умови, коли C^k-відображення $F: X \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, є C^k-дифеоморфізмом.

Основні теореми 1 і 2 про оборотність автономного диференціального оператора $\mathfrak{D}$ є новими. Для перевірки в цих теоремах виконання умови 3 щодо оборотності $(D\mathfrak{D})_x$ можна використовувати результати робіт [8 – 11, 16, 25 – 27].

Приклад C^1-відображення в п. 5, що не є елементом множини $\mathfrak{S}$, наведено вперше й отримано з використанням ідеї побудови неперервних монотонних і необмежених на одиничній сфері сепарабельного гільбертового простору H відображень [28, с. 41].

Теорему 4 про необхідні і достатні умови, при виконанні яких диференціальний оператор $\mathcal{L}: C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ є дифеоморфізмом класу C^1, наведено вперше.

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з'ясовувались у [28 – 30].

Література

1. С. Ленг, *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, Мир, Москва (1967).
2. Дж. Милнор, А. Уоллес, *Дифференциальная топология*, Мир, Москва (1972).
3. М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности*, Мир, Москва (1977).
4. В. А. Зорич, *Математический анализ*, ч. II, Наука, Москва (1984).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних диференційовних відображень*, Укр. мат. журн., **68**, № 4, 563 – 576 (2016).
6. В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність теореми про обернену функцію для диференційовних функцій*, Буков. мат. журн., **2**, № 4, 112 – 113 (2014).
7. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища шк., Київ (1974).
8. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).

9. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, Москва (1970).
10. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
11. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
12. В. Е. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).
13. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь*, Наук. вісн. Чернів. ун-ту, **2**, № 2 – 3, 157 – 163 (2012).
14. S. Bochner, *Beiträge zur Theorie der Fastperiodischen*, I Teil. Funktionen einer Variablen; II Teil. Funktionen mehrerer Variablen, Math. Ann., **96**, 119 – 147, 383 – 409 (1927).
15. Э. Мухамадиев, *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций*, Мат. заметки, **11**, № 3, 269 – 274 (1972).
16. В. Е. Слюсарчук, *Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов*, Мат. сб., **116**(158), № 4(12), 483 – 501 (1981).
17. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высш. шк., Москва (1982).
18. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, в 3-х т., т. 2, Наука, Москва (1966).
19. В. Е. Слюсарчук, *Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений*, Мат. сб., **203**, № 5, 135 – 160 (2012).
20. V. E. Slyusarchuk, *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations*, Acta Appl. Math., **65**, № 1 – 3, 333 – 341 (2001).
21. В. А. Зорич, *Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства*, Мат. сб., **74 (116)**, № 3, 417 – 433 (1967).
22. M. Radulescu, S. Radulescu, *Global inversion theorems and applications to differential equations*, Nonlinear Anal., **4**, № 4, 951 – 965 (1980).
23. В. А. Треногин, *Глобальная обратимость нелинейных операторов и метод продолжения по параметру*, Докл. РАН, **350**, № 4, 455 – 457 (1996).
24. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь*, Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, Рівне (2011).
25. В. Е. Слюсарчук, *Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов*, Мат. сб., **130 (172)**, № 1(5), 86 – 104 (1986).
26. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов*, Мат. заметки, **42**, № 2, 262 – 267 (1987).
27. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов*, Укр. мат. журн., **41**, № 2, 201 – 205 (1989).
28. Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск (1986).
29. L. Amerio, *Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati*, Ann. Mat. Pura ed Appl., **39**, № 2, 97 – 119 (1955).
30. Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти, *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1974).

Одержано 23.01.20