DOI: 10.37863/umzh.v73i1.2371

УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

H^2-НОРМИ ЧАСТИННИХ СУМ РЯДІВ ФУР'Є ЗА БАЗИСОМ ЛАГЕРРА ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ*

We compute the upper bounds for H^2-norms of the partial sums of Fourier series with respect to the Laguerre basis on the unit ball in the space of bounded holomorphic functions on the unit disk. We give an application of the main result to the solving of some extremal problems of the theory of approximation of holomorphic functions.

Обчислено значення точної верхньої межі H^2-норм частинних сум ряду Фур'є за базисом Лагерра на одиничній кулі простору обмежених голоморфних функцій в одиничному крузі. Наведено застосування основного результату до розв'язання певних екстремальних задач теорії наближення голоморфних функцій.

1. Вступ. Основний результат. Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} \colon |t| = 1\}$ і $d\sigma$ — нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$.

Простір Гарді H^p, $1 \le p \le \infty$, складається з усіх голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$+\infty > \|f\|_p := \begin{cases} \sup\limits_{\rho\in[0,1)} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(\rho t)|^p d\sigma(t)\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Відомо, що функції з H^p мають майже скрізь на $\mathbb{T}$ недотичні граничні значення, які будемо позначати також через f, причому $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Система функцій

$$\varphi_k(z) := \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\overline{a}} w_a^k(z), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad |a| < 1, \tag{1}$$

де

$$w_a(z) := \frac{z-a}{1-z\overline{a}}, \quad |a| < 1,$$

називається базисом Лагерра в просторі H^2. Така назва закріпилася в сучасній літературі, мабуть, під впливом робіт [1, 2] (див. також історичні коментарі в [3, с. 163 – 165]), в яких було використано ідею, що аналог системи (1) для простору Гарді у правій півплощині

$$\widetilde{\varphi}_k(s) := \frac{\sqrt{2\alpha}}{s+\alpha}\left(\frac{s-\alpha}{s+\alpha}\right)^k, \qquad \alpha > 0, \quad s \in \mathbb{H}_+ := \{\zeta \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\zeta > 0\},$$

є перетворенням Лапласа ортонормованої на $\mathbb{R}_+$ системи функцій

$$\psi_k(x) := \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha x} L_k(2\alpha x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

де

* Виконано у рамках проекту Ф84/177-2019 (грант Президента України докторам наук для здійснення наукових досліджень на 2019 р.).

$$L_k(x) := \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(-1)^j}{j!} x^j \tag{2}$$

— многочлени Лагерра.

При $a = 0$ базис Лагерра збігається з базисом Тейлора, тобто $\varphi_k(z) = z^k$.

Скрізь далі ми будемо ототожнювати базис Лагерра φ з точкою a, яка його породжує за правилом (1), а під H^p розумітимемо одиничну кулю простору Гарді, тобто клас голоморфних функцій f, для яких $\|f\|_p \leq 1$.

Для подальшого викладу потрібно таке твердження.

Твердження 1. *Нехай функція f є голоморфною в $\mathbb{D}$ і $a \in \mathbb{D}$. Тоді*:

1) *у крузі $\mathbb{D}$ справджується рівність*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_a(k) \varphi_k, \tag{3}$$

в якій ряд збігається рівномірно і абсолютно в $\mathbb{D}$, а $\widehat{f}_a(k)$ — коефіцієнти Тейлора функції

$$F_a(z) := F_a(f)(z) := \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1+z\overline{a}} \left(f \circ w_{-a}\right)(z);$$

2) *для деякого цілого $n \geq 0$ рівності $\widehat{f}_a(k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n$, справджуються тоді і тільки тоді, коли f можна зобразити у вигляді $f = w_a^{n+1} g$, де g — функція, голоморфна в $\mathbb{D}$, до того ж $\widehat{f}_a(k) = 0$ для всіх цілих $k \geq 0$ тоді і тільки тоді, коли $f \equiv 0$;*

3) *для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$ справджується рівність*

$$\widehat{f}_a(k) = \sqrt{1-|a|^2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (1-|a|^2)^j (-\overline{a})^{k-j}; \tag{4}$$

4) *якщо функція f належить H^1, то*

$$\widehat{f}_a(k) = \int_{\mathbb{T}} f \overline{\varphi_k} d\sigma, \quad k = 0, 1, \ldots; \tag{5}$$

5) *функція f належить H^2, якщо і тільки якщо*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\widehat{f}_0(k)\right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\widehat{f}_a(k)\right|^2 \leq 1; \tag{6}$$

6) *для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$ справджується рівність*

$$\max \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left|\widehat{f}_a(k)\right|^2 : f \in H^2 \right\} = 1. \tag{7}$$

Максимум у (7) при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ досягається лише для функцій вигляду

$$f^*(z) = \omega \varphi_0(z) = \omega \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\overline{a}}, \quad |\omega| = 1.$$

Усі пункти цього твердження у такому чи іншому вигляді є відомими, але задля зручності та цілісності викладу матеріалу ми наведемо його доведення в п. 3.

Розглянемо приклад розкладу голоморфної функції в ряд за базисом Лагерра, яким ще раз аргументуємо, чому система (1) асоціюється з системою многочленів Лагерра (2).

***Приклад* 1.** Нехай $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ і $x \in \mathbb{C}$. Тоді

$$\frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}} \exp\left(\frac{\overline{a}x(z-a)}{1-|a|^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\overline{a})^k L_k\left(x\right) \varphi_k(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{D} \tag{8}$$

і

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{(-\overline{a})^k \sqrt{1-|a|^2}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-\frac{1-z\overline{a}}{1-|a|^2} x\right) L_k(x) dx \quad \forall\, z \in \mathbb{D}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

Справді, рівність (8) випливає з формули для твірної функції системи многочленів Лагерра (див., наприклад, [4, с. 41])

$$\frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(x) t^k, \quad |t| < 1,$$

при $t = -\overline{a} w_a(z)$, а (9) одержуємо почленним інтегруванням (8) відносно x з вагою $e^{-x} L_k(x)$ уздовж півосі $\mathbb{R}_+$.

Твердження 1, зокрема, показує, що будь-яку голоморфну функцію у крузі $\mathbb{D}$ можна відтворити за значеннями функції та всіх її похідних у фіксованій точці $a \in \mathbb{D}$ за допомогою ряду (3). При цьому ряд (3) є рядом Фур'є за системою φ для функції $f \in H^1$. Він має схожі, або навіть такі ж властивості, як і відповідний ряд Тейлора – Маклорена. Але примітною відмінністю є те, що у рівності (7) при $a \neq 0$ екстремальна функція не є сталою на відміну від випадку, коли $a = 0$, і явно залежить від системи φ.

У зв'язку з цим природно виникає питання: *як впливає вибір точки $a \in \mathbb{D}$ на величину суми $\sum_{k=0}^{n} \left|\widehat{f}_a(k)\right|^2$ для індивідуальної функції $f \in H^2$?*
В контексті цього питання основним результатом статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $a \in \mathbb{D}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ і*

$$H^{\infty,m,a} := \left\{ f \in H^\infty : f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, \ldots, m-1 \right\}, \quad H^{\infty,0,a} = H^\infty.$$

Тоді для будь-якого цілого $n \geq m$

$$\max\left\{ \sum_{k=m}^{n} \left|\widehat{f}_a(k)\right|^2 : f \in H^{\infty,m,a} \right\} = 1 - |a|^{2(n-m+1)}. \tag{10}$$

Максимум для всіх $n \geq m$ досягається для функції

$$f_* = e^{i\theta} w_a^m, \qquad \mathbb{R} \ni \theta = \mathrm{const}.$$

Теорема 1 є корисною в екстремальних задачах про наближення голоморфних функцій у крузі $\mathbb{D}$. В п. 2 ми наведемо кілька наслідків у цьому напрямку, а в п. 3 — доведення основного результату.

2. Наслідки. Насамперед зазначимо, що з теореми 1 безпосередньо випливає часткова відповідь на поставлене вище питання. А саме, має місце таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Для будь-якої обмеженої голоморфної в* $\mathbb{D}$ *функції* f *при даному* $n \in \mathbb{Z}_+$ *і як завгодно малому* $\varepsilon > 0$ *можна вибрати (нескінченною кількістю способів) точку* $a \in \mathbb{D}$ *так, щоб*

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\widehat{f}_a(k)\right|^2 \le \varepsilon.$$

Інший важливий наслідок теореми 1 стосується збіжності рядів (3) в метриці простору H^p при $2 \le p \le \infty$ для внутрішніх функцій.

Нагадаємо, що функція f називається внутрішньою, якщо $f \in H^\infty$ і $|f| = 1$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Позначимо через I множину всіх внутрішніх функцій в $\mathbb{D}$ і нехай

$$S_{n,a}(f) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}_a(k)\varphi_k, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

— частинна сума порядку $n+1$ ряду (3).

***Наслідок* 2.** *Нехай* $2 \le p \le \infty$, $a \in \mathbb{D}$ *і* $m \in \mathbb{Z}_+$. *Тоді для будь-якого цілого* $n \ge m$ *справджується рівність*

$$\min\left\{\|f - S_{n,a}(f)\|_p : f \in I \cap H^{\infty,m,a}\right\} = |a|^{n-m+1}, \tag{11}$$

де мінімум досягається для функції $f_* = e^{i\theta} w_a^m$, $\mathbb{R} \ni \theta = \mathrm{const}$. *Зокрема, для будь-якої функції* $f \in I$ *при* $k \to \infty$

$$\widehat{f}_a(k) \ne o\left(a^k\right).$$

Справді, за нерівністю Гельдера і рівністю Парсеваля (6) з теореми 1 випливає, що для будь-якої функції $f \in I$

$$\begin{aligned} \|f - S_{n,a}(f)\|_p^2 &\ge \|f - S_{n,a}(f)\|_2^2 = \\ &= \|f\|_2^2 - \|S_{n,a}(f)\|_2^2 \ge \\ &\ge 1 - \left(1 - |a|^{2(n-m+1)}\right) = |a|^{2(n-m+1)}. \end{aligned} \tag{12}$$

З іншого боку, для функції $f_* = e^{i\theta} w_a^m$, $\mathbb{R} \ni \theta = \mathrm{const}$, згідно з твердженням 1

$$\widehat{f}_a(k) = e^{i\theta}\sqrt{1-|a|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{t-a}{1-t\overline{a}}\right)^{m-k} \frac{1}{1-\overline{t}a} d\sigma(t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le k \le m-1, \quad m \in \mathbb{N}, \\ e^{i\theta}\sqrt{1-|a|^2}(-\overline{a})^{k-m}, & k \ge m, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \end{cases} \tag{13}$$

Отже, справедливою є формула

$$\left(f_* - S_{n,a}(f_*)\right)(z) = e^{i\theta}\sqrt{1-|a|^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (-\overline{a})^{k-m}\varphi_k(z) =$$

$$= e^{i\theta}\frac{1-|a|^2}{1-z\overline{a}}\sum_{k=n+1}^{\infty}(-\overline{a})^{k-m}w_a^k(z) =$$

$$= e^{i\theta}(-\overline{a})^{-m}\frac{1-|a|^2}{1-z\overline{a}}\frac{(-\overline{a}w_a(z))^{n+1}}{1+\overline{a}w_a(z)} = e^{i\theta}(-\overline{a})^{n-m+1}w_a^{n+1}(z),$$

за якою для функції f_* у (12) виконуються рівності.

Наслідок 2 цікаво зіставити з одним результатом із [5] про те, що для внутрішніх функцій таких, що $f \not\equiv \mathrm{const}$ і $|f| > 0$ в $\mathbb{D}$, H^2-норми залишків рядів Тейлора – Маклорена мають оцінку

$$\|f - S_{n,0}(f)\|_2 \geq \frac{C_f}{n^{\frac{1}{4}}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де C_f — додатна стала, що залежить лише від $f(0)$.

З результатів робіт [6 – 9] можна зробити висновок про те, що базис Лагерра, як частинний випадок системи Такенаки – Мальмквіста, є оптимальним у розв'язанні певних екстремальних задач наближення голоморфних функцій на компактних множинах в одиничному крузі чи у верхній півплощині.

За допомогою наслідку 2 ми з'ясуємо наскільки „погані” апроксимативні властивості має базис Лагерра у випадку наближення голоморфних функцій на всьому крузі $\mathbb{D}$.

Для цього нагадаємо необхідні поняття.

Нехай $\mathcal{L}$ — множина всіх нижньотрикутних матриць $(\lambda_{k,n})_{0\leq k\leq n}$ над полем комплексних чисел і $\mathfrak{A}$ — клас функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$, $\mathfrak{A} \subset H^p$.

Величина

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, a)_p := \inf\left\{\sup\left\{\left\|f - \sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\widehat{f}_a(k)\varphi_k\right\|_p : f \in \mathfrak{A}\right\} : (\lambda_{k,n}) \in \mathcal{L}\right\}$$

називається найкращим лінійним наближенням класу $\mathfrak{A}$ за базисом Лагерра. Якщо вказано матрицю $(\lambda_{k,n})_{0\leq k\leq n}$, яка реалізує інфімум у величині $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, a)_p$, то кажуть, що побудовано найкращий лінійний метод наближення класу за базисом Лагерра.

Колмогоровським поперечником класу $\mathfrak{A} \subset H^p$ у просторі H^p називається величина

$$d_n(\mathfrak{A})_p := \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-u\|_p : u \in U_n\right\} : f \in \mathfrak{A}\right\} : U_n\right\},$$

де інфімум береться за всіма n-вимірними підпросторами U_n простору H^p (див., наприклад, [10]). Підпростір U_n, для якого досягається інфімум, називається оптимальним підпростором для колмогоровського поперечника класу $\mathfrak{A}$.

Зрозуміло, що $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, a)_2 = \sup\left\{\|f - S_{n,a}(f)\|_2 : f \in \mathfrak{A}\right\}$ і для будь-якого $a \in \mathbb{D}$ завжди $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, a)_p \geq d_n(\mathfrak{A})_p$. Таким чином, справджується таке твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $2 \leq p \leq \infty$, $a \in \mathbb{D}$ *і* $\mathfrak{A} \subset H^p$. *Якщо* $\mathfrak{A} \cap I \neq \varnothing$, *то для будь-якого* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{A}, a)_p \geq \max\left(|a|^{n+1}, d_{n+1}(\mathfrak{A})_p\right).$$

Це твердження, зокрема, показує, що для тих функціональних класів $\mathfrak{A}$, для яких $\mathfrak{A} \cap I \neq \varnothing$ і $d_{n+1}(\mathfrak{A})_p < |a|^{n+1}$, лінійна оболонка $U_{n+1} = \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ не є оптимальним підпростором для поперечника. Навіть більше, як видно з наступного прикладу, для таких класів

$\mathfrak{A}$ апроксимативні можливості найкращого лінійного методу наближення за базисом Лагерра можуть бути гірші, ніж можливості найкращого лінійного методу наближення за базисом Тейлора.

***Приклад* 2.** Нехай $2 \le p \le \infty$, $\rho > 1$ і H^p_ρ — клас функцій f, голоморфних у крузі $\mathbb{D}_\rho := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \rho\}$, для яких $f(\rho\,\cdot) \in H^p$. Тоді для будь-якого $a \in \mathbb{D}$ такого, що $\rho^{-1} < |a| < 1$, справджуються співвідношення

$$\mathcal{E}_n(H^p_\rho, a) \ge |a|^{n+1} > \rho^{-(n+1)} = \mathcal{E}_n(H^p_\rho, 0), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Зокрема, для будь-якої функції $f \in H^p_\rho$ при $k \to \infty$

$$\left|\widehat{f}_a(k)\right| \gtrapprox \left|\widehat{f}_0(k)\right|. \tag{14}$$

Справді, 1 належить H^p_ρ. Тому згідно з (13) і наслідком 2

$$\mathcal{E}_n\left(H^p_\rho, a\right)_p \ge \inf\left\{\left\|1 - \sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,n}\sqrt{1-|a|^2}(-\overline{a})^k \varphi_k\right\|_p : (\lambda_{k,n})_{0\le k\le n} \in \mathcal{L}\right\} \ge$$

$$\ge \left\|1 - \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1-|a|^2}(-\overline{a})^k \varphi_k\right\|_2 = |a|^{n+1}.$$

З іншого боку (див., наприклад, [10, с. 250]), справджуються співвідношення

$$d_{n+1}\big(H^p_\rho\big)_p = \mathcal{E}_n\big(H^p_\rho, 0\big)_p = \rho^{-(n+1)}.$$

Для перевірки (14) припустимо супротивне. Тоді при достатньо великих n

$$|a|^{n+1} \le \|f - S_{n,a}(f)\|_2 = O\left(1\right)\|f - S_{n,0}(f)\|_2 = O\left(\rho^{-(n+1)}\right),$$

що суперечить умові $\rho^{-1} < |a| < 1$.

Наступний наслідок теореми 1 є цікавим з точки зору екстремальної задачі про значення величини [11]

$$\mathcal{G}_n(z, \Gamma, \mathfrak{A}) := \sup\left\{\left|\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(z)}{j!}\gamma_{j,n}(z)\right| : f \in \mathfrak{A}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{15}$$

де $\Gamma = (\gamma_{j,n})_{0\le j\le n}$ — нижньотрикутна матриця, елементами якої є обмежені функції $\gamma_{j,n}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, і $\mathfrak{A}$ — деякий клас функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$.

Вперше таку екстремальну задачу розв'язав Е. Ландау [12] при $\gamma_{j,n}(z) = (1-z)^j$ і $z = 0$:

$$\mathcal{G}_n(0, \Gamma, H^\infty) = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}\right)^2,$$

зокрема $\mathcal{G}_n(0, \Gamma, H^\infty) \simeq \dfrac{1}{\pi}\ln n$ при $n \to \infty$.

Для таких самих $\gamma_{j,n}$ і довільного $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ в [13] знайдено асимптотику при $n \to \infty$:

$$\mathcal{G}_n(z,\Gamma,H^\infty)\simeq\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln n, & 0<z<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi|z|}}\left|\dfrac{1-z}{1-e^{i\arg z}}\right|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{|1-z|}{1-|z|}\right)^n, & z\in\mathbb{D}\setminus[0,1).\end{cases}$$

За допомогою теореми 1 і формули (4) легко знайти величину (15) при

$$\gamma_{j,n}(z)=(-z)^j(1-|z|^2)^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{k+j}{j}|z|^{2k},\quad j=0,1,\ldots,n,\ z\in\mathbb{D}. \tag{16}$$

***Наслідок* 4.** *Нехай $n\in\mathbb{Z}_+$ і $\gamma_{j,n}$ такі, як у* (16). *Тоді для будь-якого $z\in\mathbb{D}$*

$$\mathcal{G}_n(z,\Gamma,H^\infty)=\frac{1-|z|^{2(n+1)}}{1-|z|^2}.$$

Функція $f_*=e^{i\theta}=\mathrm{const}$, $\theta\in\mathbb{R}$, є екстремальною.

Справді, за нерівністю Коші – Буняковського і теоремою 1, перепозначаючи в ній $a=z$, для будь-якої функції $f\in H^\infty$ одержуємо співвідношення

$$\left|\sum_{k=0}^n(-z)^k\widehat{f}_z(k)\right|\le\left(\sum_{k=0}^n|z|^{2k}\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=0}^n\left|\widehat{f}_z(k)\right|^2\right)^{\frac12}\le$$
$$\le\frac{1-|z|^{2(n+1)}}{\sqrt{1-|z|^2}},$$

в яких рівності досягаються для функції f_* (див. (13)).

З іншого боку, за формулою (4) після зміни порядку підсумовування одержуємо

$$\sum_{k=0}^n(-z)^k\widehat{f}_z(k)=\sqrt{1-|z|^2}\sum_{k=0}^n z^k\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\frac{f^{(j)}(z)}{j!}(-1)^j(1-|z|^2)^j\overline{z}^{k-j}=$$
$$=\sqrt{1-|z|^2}\sum_{j=0}^n\frac{f^{(j)}(z)}{j!}(-z)^j(1-|z|^2)^j\sum_{k=j}^n\binom{k}{j}|z|^{2(k-j)},$$

що й потрібно було показати.

3. Доведення. ***Доведення твердження* 1.** 1. Зрозуміло, що функція F_a є голоморфною в $\mathbb{D}$. Нехай

$$F_a(z)=\sum_{k=0}^\infty c_kz^k \tag{17}$$

— її розклад в ряд Тейлора – Маклорена.

Тоді

$$f(z)=\frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\overline{a}}\left(F_a\circ w_a\right)(z)=$$

$$= \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\overline{a}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(w_a(z)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{D}, \tag{18}$$

причому рівномірна й абсолютна збіжність останнього ряду та єдиність його коефіцієнтів рівносильні такій самій збіжності та єдиності коефіцієнтів ряду в (17).

2. Якщо $\widehat{f}_a(k) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n$, то згідно з (17) $F_a(z) = z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_a(k+n+1) z^k$ і навпаки. Отже,

$$f(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-z\overline{a}} \left(F_a \circ w_a\right)(z) = w_a^{n+1}(z) g(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

де $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_a(k+n+1) \varphi_k(z)$.

3. Для обчислення коефіцієнта c_k у (18) (що рівносильно $\widehat{f}_a(k)$) візьмемо k-ту похідну функції $z \mapsto f(z)(1-z\overline{a})^k$ в точці $z = a$. Оскільки

$$f(z)(1-z\overline{a})^k = P_{k-1}(z) + \sqrt{1-|a|^2} \sum_{j=k}^{\infty} c_j (1-z\overline{a})^{k-1} w_a^j(z),$$

де $P_{k-1}(z) = \sqrt{1-|a|^2} \sum_{j=0}^{k-1} c_j (1-z\overline{a})^{k-j-1} (z-a)^j$ – алгебраїчний многочлен степеня $k-1$ ($P_{-1} = 0$), то

$$\frac{d^k}{dz^k} \left(f(z)(1-z\overline{a})^k \right) = \sqrt{1-|a|^2} \sum_{j=k}^{\infty} c_j \frac{d^k}{dz^k} \left((1-z\overline{a})^{k-1} w_a^j(z) \right). \tag{19}$$

Застосувавши до лівої частини (19) правило Лейбніца і врахувавши, що у правій частині за цим самим правилом

$$\frac{d^k}{dz^k} \left((1-z\overline{a})^{k-1} w_a^j(z) \right) \bigg|_{z=a} = \begin{cases} \dfrac{k!}{1-|a|^2}, & j = k, \\ 0, & j = k+1, \ldots, \end{cases}$$

одержимо (4).

4. Для доведення (5) достатньо скористатися формулою Коші

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{1-\overline{t}z} d\sigma(t), \quad z \in \mathbb{D},$$

і розкладом ядра Коші в рівномірно збіжний ряд:

$$\frac{1}{1-\overline{t}z} = \frac{1}{(1-\overline{t}a)(1-z\overline{a})} \frac{1-|a|^2}{1 - \dfrac{\overline{t}-\overline{a}}{1-\overline{t}a} \dfrac{z-a}{1-z\overline{a}}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\varphi_k(t)} \varphi_k(z), \quad t \in \mathbb{T},\ z \in \mathbb{D}.$$

5. Для доведення (6) зауважимо, що в наших позначеннях

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |F_a(\rho t)|^2 \, d\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \widehat{f}_a(k) \right|^2 \rho^{2k} \quad \forall \rho \in [0,1).$$

Тому співвідношення (6) рівносильне $F_a \in H^2$.

З іншого боку, якщо F_a належить H^2, то

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |F_a|^2 \, d\sigma = \int\limits_{\mathbb{T}} |(f \circ w_{-a})(t)|^2 \, \frac{1-|a|^2}{|1+t\overline{a}|^2} d\sigma(t) = \int\limits_{\mathbb{T}} |f|^2 \, d\sigma.$$

6. Якщо виконується (7) при деякому n, то для екстремальної функції f, для якої досягається максимум у (7), $\widehat{f}_a(k) = 0$ при $k \geq n+1$. Отже, виконання (7) при всіх цілих $n \geq 0$ можливе тільки якщо $\widehat{f}_a(k) = 0$ для всіх натуральних k.

Для доведення теореми 1 нам потрібна така лема, не позбавлена й самостійного інтересу.

Лема 1. *Нехай функції f, g, h голоморфні в $\mathbb{D}$ і такі, що $f = gh$, і $a \in \mathbb{D}$. Тоді для будь-якого цілого $n \geq 0$ виконуються рівності*

$$S_{n,a}(f) = S_{n,a}\big(S_{n,a}(g)h\big) = S_{n,a}\big(gS_{n,a}(h)\big).$$

Доведення. Розглянемо функцію $R_n := hS_n(g) - S_n(f)$. Оскільки функція R_n голоморфна в $\mathbb{D}$ і $\varphi_{n+1}w_a^k = \varphi_{n+k+1}$, то згідно з твердженням 1 R_n розкладається в ряд

$$R_n = f - S_n(f) - h\big(g - S_n(g)\big) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{f}_a(k)\varphi_k - h \sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{g}_a(k)\varphi_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{f}_a(k)\varphi_k - w_a^{n+1}h \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{g}_a(k+n+1)\varphi_k.$$

Звідси згідно з п. 2 твердження 1 випливає рівність $S_{n,a}(R_n) = 0$, що й потрібно було довести.

***Доведення теореми* 1.** Згідно з твердженням 1, якщо $f \in H^{\infty,m,a}$, то $f = w_a^m h$, де $h = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_a(k+m)\varphi_k \in H^{\infty}$.

Отже, за лемою 1 і формулою (13) для будь-якої функції $f \in H^{\infty,m,a}$ маємо співвідношення

$$\sum_{k=m}^{n} \left| \widehat{f}_a(k) \right|^2 = \|S_{n,a}(S_{n,a}\left(w_a^m\right) h)\|_2^2 \leq$$

$$\leq \|S_{n,a}\left(w_a^m\right) h\|_2^2 \leq \sum_{k=m}^{n} \left| \widehat{(w_a^m)}_a(k) \right|^2 =$$

$$= (1-|a|^2) \sum_{k=m}^{n} |a|^{2(k-m)} =$$

$$= (1-|a|^2) \frac{1-|a|^{2(n-m+1)}}{1-|a|^2} = 1 - |a|^{2(n-m+!)},$$

в яких рівності досягаються для функції $f = e^{i\theta} w_a^m$.

Література

1. Y. W. Lee, *Synthesis of electric networks by means of the Fourier transforms of Laguerre functions*, J. Math. and Phys., **11**, № 1–4, 83–113 (1932).
2. E. Hille, *Bilinear formulas in the theory of the transformation of Laplace*, Compos. Math., **6**, 93–102 (1939).
3. P. R. Masani, *Norbert Wiener*, 1894–1964, Birkhäuser, Basel etc. (1990).
4. B. G. S. Doman, *The classical orthogonal polynomials*, World Sci., Singapore (2016).
5. D. J. Newman, H. S. Shapiro, *The Taylor coefficients of inner functions*, Michigan. Math. J., **9**, 249–255 (1962).
6. В. В. Савчук, *Найкращі лінійні методи наближення та оптимальні ортонормовані системи простору Гарді*, Укр. мат. журн., **60**, № 5, 661–671 (2008).
7. В. В. Савчук, *Найкращі лінійні методи наближення гармонічних функцій*, Нелінійні коливання, **11**, № 2, 242–251 (2008).
8. В. В. Савчук, С. О. Чайченко, *Найкращі наближення ядра Коші на дійсній осі*, Укр. мат. журн., **66**, № 1, 1540–1549 (2014).
9. В. В. Савчук, *Найкращі наближення ядра Коші–Сегьо в середньому на одиничному колі*, Укр. мат. журн., **70**, № 5, 708–714 (2018).
10. A. Pinkus, *n-Widths in approximation theory*, Springer-Verlag, Berlin (1985).
11. С. Я. Хавинсон, *Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области*, Успехи мат. наук., **18**, № 2, 25–98 (1963).
12. E. Landau, D. Gaier, *Darstellung und Bergundung eininger neurer Ergebnisse der Functionentheorie*, Springer-Verlag, Berlin (1986).
13. С. Я. Хавинсон, *Оценка сумм Тейлора ограниченных аналитических функций в круге*, Докл. АН СССР, **80**, № 3, 333–336 (1951).

Одержано 13.02.20