DOI: 10.37863/umzh.v72i5.2378

УДК 512.643, 517.98

В. І. Рабанович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗОБРАЖЕННЯ ЕРМІТОВОЇ МАТРИЦІ СУМОЮ ФІКСОВАНОГО ЧИСЛА ОРТОПРОЕКТОРІВ

We prove that any Hermitian matrix, whose trace is integer and all eigenvalues lie in $[1+1/(k-3), k-1-1/(k-3)]$, is a sum of k orthoprojections. For sums of k orthoprojections, it is shown that the ratio of the number of eigenvalues not exceeding 1 to the number of eigenvalues not less than 1, taking into account the multiplicity, is not greater than $k-1$. Examples of Hermitian matrices that satisfy the ratio for eigenvalues and, at the same time, can not be decomposed into a sum of k orthoprojections are also suggested.

Доведено, що ермітова матриця з цілим слідом і власними значеннями між $1+1/(k-3)$ і $k-1-1/(k-3)$ є сумою k ортопроекторів. Показано, що у суми k ортопроекторів відношення кількості власних значень, що менші або дорівнюють одиниці, з урахуванням кратності до кількості власних значень, які більші або дорівнюють одиниці, не перевищує $k-1$. Наведено приклади ермітових матриць, які задовольняють вказане співвідношення щодо кількості власних значень, але не є сумою k ортопроекторів.

У цій статті розглядаються суми ортопроекторів, тобто ермітових матриць $P_i^* = P_i,\ P_i^2 = P_i$. Оскільки ортопроектори — це невід'ємні оператори, то суми проекторів є невід'ємновизначеними матрицями. Зокрема, при виконанні розкладу

$$A = P_1 + P_2 + \ldots + P_k \tag{1}$$

справедливою є рівність слідів

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} P_1 + \operatorname{tr} P_2 + \ldots + \operatorname{tr} P_k = \operatorname{rank} P_1 + \operatorname{rank} P_2 + \ldots + \operatorname{rank} P_k,$$

тому $\operatorname{tr} A \geq \operatorname{rank} A$. В роботі [9] було доведено таку теорему.

Теорема 1. *Матриця* A *є сумою ортопроекторів тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{tr} A \in \mathbb{Z}$, $A^* = A$ *і* $\operatorname{tr} A \geq \operatorname{rank} A$.

Для такого розкладу достатньо $\operatorname{tr} A$ ортопроекторів. Зокрема, довільна невід'ємновизначена $(n \times n)$-матриця зі слідом n є сумою n ортопроекторів. Звичайно, число $\operatorname{tr} A$ не завжди є найменшою кількістю ортопроекторів, необхідних для справедливості розкладу (1), і цікавою є задача знаходження розкладу матриці в суму якомога найменшого числа ортопроекторів. З такими задачами пов'язані, наприклад, ітераційні алгоритми Крилова для підпросторів, які можуть бути використані в паралельних процесах, кількість яких залежить від кількості ортопроекторів [5].

Останнім часом у зв'язку з різними застосуваннями збільшилась кількість робіт із теорії фреймів, оператори яких тісно пов'язані з сумами ортопроекторів [1, 4]. Зокрема, алгоритми спектрального тетрісу по набору власних значень матриці A з урахуванням їхньої кратності дають набір векторів $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_{\operatorname{tr} A}$, велика частина з яких є попарно ортогональними. Вибираючи з такого набору піднабори $W_j = \left\{\vec{f}_1^{\,j}, \ldots, \vec{f}_{m_j}^{\,j}\right\}$ взаємно ортогональних між собою векторів, отримують підпростори H_j, які породжені векторами з W_j і такі, що сума ортопроекторів на ці підпростори унітарно еквівалентна A, тобто

$$P_{H_1} + P_{H_2} + \ldots + P_{H_k} = \tilde{A},$$

де $\tilde{A} = U^*AU$, U — унітарна матриця. Зазначений алгоритм дає спосіб знаходження розкладу ермітової матриці A з цілим слідом у суму деякої кількості ортопроекторів, яка залежить, взагалі кажучи, як від впорядкування власних чисел матриці перед застосуванням алгоритму спектрального тетрісу, так і від способу вибору піднаборів. Так, в роботі [2] наведено алгоритм побудови розкладу (1) для ермітової матриці A, всі власні числа якої лежать між 2 і $k-2$, а нецілі власні числа ще й не перевищують $k-3$. Зв'язок між фреймами і сумою ортопроекторів розглянуто в [4].

Основною метою роботи є знаходження більш широких умов на власні числа матриці A, щоб існував розклад (1) в залежності від $\operatorname{tr} A$ і k. У випадку, коли A — скалярна матриця, повну відповідь щодо існування розкладу отримано в [10]. Крім того, що скалярна матриця αI повинна мати цілий слід, сам скаляр α повинен лежати на відрізку $[\beta_k, k-\beta_k]$, $\beta_k = \left(k - \sqrt{k^2-4k}\right)/2$, або бути точкою в одній із чотирьох орбіт динамічних систем, породжених відображенням $f(x) = 1 + 1/(k-1-x)$ на $[0,k]$, які стартують із точок 0, 1, і відображенням $g(x) = k - x/(x-1)$ на $[0,k]$, які стартують із точок $k-1$ і k. Для розкладу скалярної матриці в суму ортопроекторів однакового рангу аналогічну задачу розв'язано в [3] (див. також [7]).

Ми покажемо, що матриця A з умовою $(1+1/(k-3))I \le A \le (k-1-1/(k-3))I$ є сумою k ортопроекторів, наведемо кілька необхідних умов на кількість власних чисел матриці A, що не перевищують одиниці, для того щоб A була сумою k ортопроекторів.

Необхідні і достатні умови існування розкладу матриці в суму ортопроекторів можна отримати в термінах виконання нерівностей Хорна для наборів ермітових матриць [11]. А саме, нехай ермітова матриця A унітарно еквівалентна діагональній матриці $\operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, де $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \ldots \ge \gamma_n$. Спектр $\alpha_1^{(i)} \ge \ldots \ge \alpha_n^{(i)}$ кожного ортопроектора P_i задається його рангом або слідом, $n_i = \operatorname{rank} A = \operatorname{tr} A$, який дорівнює кратності власного значення 1. Матриця A є сумою ортопроекторів із вказаними спектрами тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} P_1 + \ldots + \operatorname{tr} P_n$ і набори чисел γ_i, $\alpha_j^{(m)}$ задовольняють нерівності Хорна вигляду

$$\sum_{s\in\Gamma} \gamma_s \le \sum_{i\in I(1)} \alpha_i^{(1)} + \sum_{j\in I(2)} \alpha_j^{(2)} + \ldots + \sum_{l\in I(k)} \alpha_l^{(k)}, \tag{2}$$

де множини індексів мають однакову кількість від 1 до $k-1$ елемента [11]. Проте кількість нерівностей Хорна збільшується експоненційно з розміром матриці, і хоча ці нерівності є залежними, вибір мінімальної незалежної множини нерівностей є непростою, взагалі кажучи, задачею [12].

Далі ми будемо використовувати позначення 0_n і I_n для нульової і одиничної матриць з $M_n(\mathbb{C})$ та $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ для діагональної матриці з числами або блоками $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на головній діагоналі. Запис E_{ij} буде означати матричну одиницю з елементом, що дорівнює одиниці на позиції (i,j) в матриці і нулю на інших позиціях. Цілу частину дійсного числа x ми позначаємо через $[x]$, а дробову — через $\{x\}$, $\{x\} = x - [x]$.

1. Достатні умови розкладу матриці в суму ортопроекторів. Нагадаємо властивості спектра суми двох ортопроекторів, які ми використаємо далі [6].

Пропозиція 1. *Нехай P_1, P_2 — ортопроектори в гільбертовому просторі H. Тоді для кожного $x \notin \{0,1,2\}$ з того, що $x \in \sigma(P_1+P_2)$, випливає, що $2-x \in \sigma(P_1+P_2)$. При цьому x і $2-x$ мають однакову кратність як власні значення P_1+P_2.*

Для спрощення позначень введемо дві функції $\phi_+, \phi_- : [0,1] \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$:

$$\phi_+(x) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x-x^2} \\ \sqrt{x-x^2} & 1-x \end{pmatrix}, \qquad \phi_-(x) = \begin{pmatrix} x & -\sqrt{x-x^2} \\ -\sqrt{x-x^2} & 1-x \end{pmatrix}.$$

Значення функції $\phi_+(x)$ так само, як і значення функції $\phi_-(x)$, є ортопроекторною матрицею при кожному $x \in [0,1]$. Зазначимо, що $\phi_+(x) + \phi_-(x) = \operatorname{diag}(2x, 2-2x)$.

При доведенні теореми 2 суттєво використовуються конструкції сум ортопроекторів в $\mathbb{C}^2$, які описані в такій лемі (детальніше див. [6]).

Лема 1. *Нехай $0 < \alpha \leq 1$. Для кожного $0 \leq \gamma \leq \alpha$ існує таке $x \in [0,1]$, що власні значення матриці $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \phi_+(x)$ будуть числа γ й $\alpha + 1 - \gamma$.*

Доведення. Справді, визначимо матрицю B за формулою

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \phi_+(x) = \begin{pmatrix} \alpha + x & \sqrt{x-x^2} \\ \sqrt{x-x^2} & 1-x \end{pmatrix}.$$

Визначник $\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha(1-x)$. Звідси при $x = (1-\gamma)(\alpha-\gamma)/\alpha$ отримуємо пару коренів характеристичного многочлена матриці B: γ й $1 + \alpha - \gamma$.

Наслідок 1. *Нехай $0 < \alpha \leq \beta$. Для кожного $\gamma \in [0, \alpha]$ існує таке $x \in [0,1]$, що власними значення матриці $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\phi_+(x)$ будуть числа γ й $\alpha + \beta - \gamma$.*

В наступній лемі розглядається частковий випадок теореми 2 про розклад матриці з власними числами між 1 та 2 в суму k ортопроекторів з $k \geq 5$.

Лема 2. *Нехай $a_i \in \mathbb{R}$, $1 + 1/(k-3) \leq a_i < 2$, $i = 1, \ldots, n-1$, $k \geq 5$. Тоді матриця $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \{-a_1 - \ldots - a_{n-1}\})$ має цілий слід і розкладається в суму k ортопроекторів $P_1, \ldots, P_k$. До того ж можна вибрати ортопроектори так, щоб два ортопроектори з наперед заданими значеннями індексів i_* та j_* задовольняли умову ортогональності $P_{i_*} E_{nn} = 0_n = P_{j_*} E_{nn}$.*

Доведення. При $n = 2$ матриця має два власних значення, $A = \operatorname{diag}(a_1, 2 - a_1)$ і є сумою навіть двох ортопроекторів. Тому далі вважаємо $n \geq 3$. Підрахуємо слід матриці A:

$$\operatorname{tr} A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \{-a_1 - \ldots - a_{n-1}\} =$$
$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + (-a_1 - \ldots - a_{n-1} - [-a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}]) =$$
$$= -[-a_1 - \ldots - a_{n-1}].$$

Отже, $\operatorname{tr} A \in \mathbb{Z}$ за умовою леми $\operatorname{tr} A \geq n$.

За послідовністю значень a_i індуктивно визначаємо два набори чисел $m_i \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$, $r_i \in \mathbb{R}$. Число m_1 є найменшим невід'ємним цілим числом, що задовольняє нерівності

$$1 \leq (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_{m_1} - 1) < 2,$$
$$r_1 = m_1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{m_1 - 1},$$

і при $m_{j-1} = n$ припиняється побудова послідовності, а при $m_{j-1} < n$ число m_j однозначно визначається як ціле число, що задовольняє нерівності

$$-1 \leq \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j} (a_i - 1) - r_{j-1} - 2 \leq 0, \tag{3}$$

в яких r_j обчислюємо за формулою

$$r_j = m_j - m_{j-1} + 1 + r_{j-1} - \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j - 1} a_i. \tag{4}$$

Кількість a_i обмежена і при якомусь значенні індексу j, наприклад при $j = p$, нерівність (3) не використовується навіть при $m_p = n$. Тоді покладемо $m_p = n$. Він буде останнім елементом послідовності m_j. При цьому r_p також обчислюється за формулою (4). Оскільки $1/(k-3) \leq$ $\leq a_i - 1$ і за побудовою $0 \leq a_{m_{j-1}} - 1 - r_{j-1} \leq 1$, то ліва частина нерівностей (3) виконується при $m_j - m_{j-1} \leq k - 3$.

Спосіб знаходження чисел r_i можна описати ще й таким чином. Розглядаються числа $w_1 = a_1$, $w_2 = a_1 + a_2$, $w_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$. Тоді $r_i = \{-w_{m_i - 1}\}$. Зауважимо, що w_{n-1} — це сума всіх a_i, а тому $r_p = \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}$.

Щоб побудувати ортопроектори P_i, в суму яких розкладається матриця A, ми використаємо p кроків для обчислення матриць $P_i^{(j)}$, а потім утворимо пряму суму:

$$P_i = P_i^{(1)} \oplus U_2^* P_i^{(2)} U_2 \oplus \ldots \oplus U_p^* P_i^{(p)} U_p. \tag{5}$$

Крок 1. За теоремою 1 існують ортопроектори $P_1^{(1)},\ P_2^{(1)}, \ldots, P_{k-2}^{(1)} \in M_{m_1}(\mathbb{C})$ такі, що

$$P_1^{(1)} + P_2^{(1)} + \ldots + P_{k-2}^{(1)} = \operatorname{diag}\left(a_1, \ldots, a_{m_1 - 1}, r_1\right).$$

Покладемо за означенням $P_{k-1}^{(1)} = \phi_+\big((a_{m_1} - r_1)/2\big),\ P_k^{(1)} = \phi_-\big((a_{m_1} - r_1)/2\big)$.

Крок 2. Знову за теоремою 1 існують ортопроектори $P_1^{(2)},\ P_2^{(2)}, \ldots, P_{k-4}^{(2)} \in M_{m_2 - m_1}(\mathbb{C})$ такі, що виконується еквівалентність

$$M_2 = P_1^{(2)} + P_2^{(2)} + \ldots + P_{k-4}^{(2)} \approx$$
$$\approx \operatorname{diag}\left(0, m_2 - m_1 - 1 - a_{m_1+2} - \ldots - a_{m_2-1}, a_{m_1+2}, \ldots, a_{m_2-1}\right).$$

Без обмеження загальності можна вважати, що

$$M_2 = \operatorname{diag}\left((m_2 - m_1 - 1 - a_{m_1+2} - \ldots - a_{m_2-1})\phi_+(x), a_{m_1+2}, \ldots, a_{m_2-1}\right)$$

при деякому $x \in [0,1]$. За наслідком 1 існує число x_2 таке, що сума $E_{11}(2 + r_1 - a_{m_1}) + (m_2 -$ $- m_1 - 1 - a_{m_1+2} - \ldots - a_{m_2-1})\phi_+(x)$ має власні числа r_2 та a_{m_1+1}. Отже, існує така унітарна матриця $U_2 \in M_{m_2 - m_1}(\mathbb{C})$, що

$$U_2^*(M_2 + E_{11}(2 + r_1 - a_{m_1}))U_2 = \operatorname{diag}\left(a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \ldots, a_{m_2-1}, r_2\right)$$

при $x = x_2$. Зафіксуємо U_2 і ортопроектори $P_i^{(2)}$ при $x = x_2$. Покладемо за означенням $P_{k-3}^{(2)} = \phi_+\big((a_{m_2} - r_2)/2\big),\ P_{k-2}^{(2)} = \phi_-\big((a_{m_2} - r_2)/2\big)$.

Крок 3. На непарному кроці ми повторюємо парний крок з однією відмінністю: окремо визначаються ортопроектори $P_{k-1}^{(3)}$ і $P_k^{(3)}$. За теоремою 1 існують ортопроектори $P_1^{(3)}$, $P_2^{(3)}, \ldots, P_{k-4}^{(3)} \in M_{m_2-m_1}(\mathbb{C})$ такі, що виконується еквівалентність

$$M_3 = P_1^{(3)} + P_2^{(3)} + \ldots + P_{k-4}^{(3)} \approx$$
$$\approx \operatorname{diag}\left(0, m_3 - m_2 - 1 - a_{m_2+2} - \ldots - a_{m_3-1}, a_{m_2+2}, \ldots, a_{m_3-1}\right).$$

Без обмеження загальності можна вважати, що

$$M_3 = \operatorname{diag}\left((m_3 - m_2 - 1 - a_{m_2+2} - \ldots - a_{m_3-1})\phi_+(x), a_{m_2+2}, \ldots, a_{m_3-1}\right)$$

при деякому $x \in [0,1]$. За наслідком 1 існує таке число x_3, що сума $E_{11}(2 + r_2 - a_{m_2}) + (m_3 - m_2 - 1 - a_{m_2+2} - \ldots - a_{m_3-1})\phi_+(x)$ має власні числа r_3 та a_{m_2+1}. Отже, існує така унітарна матриця $U_3 \in M_{m_3-m_2}(\mathbb{C})$, що

$$U_3^*\big(M_3 + E_{11}(2 + r_2 - a_{m_2})\big)U_3 = \operatorname{diag}\left(a_{m_2+1}, a_{m_2+2}, \ldots, a_{m_3-1}, r_3\right)$$

при $x = x_3$. Зафіксуємо U_3 і ортопроектори $P_i^{(3)}$ при $x = x_3$. Покладемо за означенням $P_{k-1}^{(3)} = \phi_+\big((a_{m_3} - r_3)/2\big)$, $P_k^{(3)} = \phi_-\big((a_{m_3} - r_3)/2\big)$.

І так далі.

Крок p. Як і в попередніх кроках, отримуємо набори ортопроекторів $P_1^{(p)}$, $P_2^{(p)}, \ldots,$ $P_{k-4}^{(p)}$ з $M_{m_p-m_{p-1}}(\mathbb{C})$, число $x_p \in [0,1]$, матрицю

$$M_p = \operatorname{diag}\big((m_p - m_{p-1} - 1 - a_{m_{p-1}+2} - \ldots - a_{m_p-1})\phi_+(x_p), a_{m_{p-1}+2}, \ldots, a_{m_p-1}\big)$$

і унітарну матрицю U_p такі, що

$$U_p^*\big(M_p + E_{11}(2 + r_{p-1} - a_{m_{p-1}})\big)U_p = \operatorname{diag}\big(a_{m_{p-1}+1}, a_{m_{p-1}+2}, \ldots, a_{m_p-1}, r_p\big).$$

Тепер ортопроектори P_i визначаються за формулою (5) для $i = 1, 2, \ldots, k-4$, і в залежності від парності p набори P_{k-3}, P_{k-2}, P_{k-1}, P_k будуть визначені по-різному. А саме, при непарному p

$$P_j = V_1^*(P_j^{(1)} \oplus 0_{m_2-m_1-1} \oplus P_j^{(2)} \oplus 0_{m_4-m_2-2} \oplus P_j^{(4)} \oplus 0_{m_6-m_4-2} \oplus$$
$$\oplus P_j^{(6)} \oplus \ldots \oplus 0_{m_{p-1}-m_{p-3}-2} \oplus P_j^{(p-1)} \oplus 0_{m_p-m_{p-1}-1})V_1 \quad \text{при} \quad j = k-3,\ k-2$$

і

$$V_1 = I_{m_2} \oplus U_3 \oplus I_{m_4-m_3} \oplus U_5 \oplus I_{m_6-m_5} \oplus \ldots \oplus U_{p-2} \oplus I_{m_{p-1}-m_{p-2}} \oplus U_p,$$

а

$$P_l = V_2^*(0_{m_1-1} \oplus P_l^{(1)} \oplus 0_{m_3-m_1-2} \oplus P_l^{(3)} \oplus 0_{m_5-m_3-2} \oplus P_l^{(5)} \oplus$$
$$\oplus 0_{m_7-m_5-2} \oplus P_l^{(7)} \oplus \ldots \oplus P_l^{(p-2)} \oplus 0_{m_p-m_{p-2}-1})V_2 \quad \text{при} \quad l = k-1,\ k$$

і

$$V_2 = I_{m_1} \oplus U_2 \oplus I_{m_3-m_2} \oplus U_4 \oplus I_{m_5-m_4} \oplus \ldots \oplus U_{p-1} \oplus I_{m_p-m_{p-1}}.$$

Аналогічно, при парному p останній прямий доданок ортопроекторів P_j і P_l дещо зміниться:

$$P_j = V_1^*(P_j^{(1)} \oplus 0_{m_2-m_1-1} \oplus P_j^{(2)} \oplus 0_{m_4-m_2-2} \oplus P_j^{(4)} \oplus 0_{m_6-m_4-2} \oplus$$

$$\oplus P_j^{(6)} \oplus \ldots \oplus 0_{m_{p-2}-m_{p-4}-2} \oplus P_j^{(p-2)} \oplus 0_{m_p-m_{p-2}-1})V_1 \quad \text{при} \quad j = k-3,\ k-2$$

і

$$V_1 = I_{m_2} \oplus U_3 \oplus I_{m_4-m_3} \oplus U_5 \oplus I_{m_6-m_5} \oplus \ldots \oplus U_{p-1} \oplus I_{m_p-m_{p-1}},$$

а

$$P_l = V_2^*(0_{m_1-1} \oplus P_l^{(1)} \oplus 0_{m_3-m_1-2} \oplus P_l^{(3)} \oplus 0_{m_5-m_3-2} \oplus P_l^{(5)} \oplus$$

$$\oplus 0_{m_7-m_5-2} \oplus P_l^{(7)} \oplus \ldots \oplus P_l^{(p-1)} \oplus 0_{m_p-m_{p-1}-1})V_2 \quad \text{при} \quad l = k-1,\ k$$

і

$$V_2 = I_{m_1} \oplus U_2 \oplus I_{m_3-m_2} \oplus U_4 \oplus I_{m_5-m_4} \oplus \ldots \oplus U_{p-1} \oplus I_{m_{p-1}-m_{p-2}} \oplus U_p.$$

За побудовою

$$P_1 + \ldots + P_k = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_p), \tag{6}$$

і, як зазначено вище, $r_p = \{-a_1 - \ldots - a_{n-1}\}$. Тому сума ортопроекторів дорівнює A.

Залишилося розглянути питання про ортогональність ортопроекторів P_i і матриці E_{nn}. Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — стандартний ортонормований базис у просторі стовпчиків $\mathbb{C}^n$, а матриці $P_i,\ V_1,\ V_2$ задають дію відповідних лінійних операторів у цьому просторі в даному базисі. Позначимо $W_p = \operatorname{span}\langle e_{m_{p-1}+1}, e_{m_{p-1}+2}, \ldots, e_n\rangle$. При непарному p останній прямий доданок у розкладі матриці V_2 дорівнює $I_{m_p-m_{p-1}}$, тому W_p інваріантний відносно дії V_2, а отже, W_p під дією і ортопроектора P_{k-1}, і ортопроектора P_k переходить у нульовий вектор, тому $P_{k-1}E_{nn} = P_kE_{nn} = 0$. Аналогічно, при парному p останній прямий доданок у розкладі матриці V_1 дорівнює $I_{m_p-m_{p-1}}$, тому W_p інваріантний відносно дії V_1, а отже, W_p під дією ортопроекторів P_{k-3} і P_{k-2} переходить у нульовий вектор, тому $P_{k-3}E_{nn} = P_{k-2}E_{nn} = 0$. Тепер, якщо потрібно отримати розклад матриці A в суму k ортопроекторів з умовою ортогональності двох ортопроекторів із заданими індексами i_* та j_*, ми безпосередньо в (6) виконуємо перенумерацію так, щоб знайдена пара ортопроекторів (остання чи передостання в залежності від парності p) стала на позиції i_* та j_*.

Лему 2 доведено.

Наслідок 2. *В умовах леми* 2 *матриця* $B = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1 + \{-a_1 - \ldots - a_{n-1}\})$ *є сумою ортопроекторів* $P_1, \ldots, P_k$ *з тією ж умовою ортогональності* $P_{i_*}E_{nn} = 0_n = P_{j_*}E_{nn}$.

Доведення. Достатньо довести наслідок для $i^* = k-1$ і $j^* = k$. При $n = 2$ матриця B має слід, що дорівнює 3, $B = \operatorname{diag}(a_1, 3 - a_1)$, а отже, за теоремою 1 матриця B є сумою трьох ортопроекторів $P_1,\ P_2$ і P_3. При $n = 3$ матриця B має слід, що дорівнює 4 або 5, $B = \operatorname{diag}(a_1, a_2, 1 + \{-a_1 - a_2\})$ і є сумою п'яти ортопроекторів $P_1, \ldots, P_5$, що задовольняють відповідну умову ортогональності,

$$P_1 = \operatorname{diag}\bigl(0, \phi_+\bigl((a_1+a_2)/2-1\bigr)\bigr), \qquad P_2 = \operatorname{diag}\bigl(0, \phi_-\bigl((a_1+a_2)/2-1\bigr)\bigr),$$
$$P_4 = \operatorname{diag}(\phi_+(a_1/2), 0), \qquad P_5 = \operatorname{diag}(\phi_-(a_1/2), 0),$$

і лише при $\operatorname{tr} B > 4$ ортопроектор P_3 буде ненульовим, що дорівнює $\operatorname{diag}(0,0,1)$.

Тому далі вважаємо $n \geq 4$. За лемою 2 матриця

$$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, \{-a_1 - \ldots - a_{n-2}\})$$

є сумою k ортопроекторів $Q_1, \ldots, Q_k$, причому можна вважати, що $Q_1 E_{n-1\, n-1} = 0_{n-1} = Q_2 E_{n-1\, n-1}$. Визначаємо дві величини: $t = a_{n-1} - \{-a_1 - \ldots - a_{n-2}\}$ і

$$\epsilon = \begin{cases} 0, & 2 - t \geq 1, \\ 1, & 2 - t < 1. \end{cases}$$

Покладаючи

$$P_1 = (Q_1 \oplus 0) + (0_{n-2} \oplus \phi_+(t/2)), \qquad P_2 = (Q_2 \oplus 0) + (0_{n-2} \oplus \phi_-(t/2)),$$
$$P_3 = \operatorname{diag}(Q_3, \epsilon), \qquad P_i = Q_i \oplus 0, \quad i = 4, \ldots, k,$$

отримуємо розклад $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{n-1}, \epsilon + 2 - t) = P_1 + \ldots + P_k$, де кожен P_i — ортопроектор. За побудовою $P_{k-1} E_{nn} = P_k E_{nn} = 0_n$, до того ж $0 < 2 - t < 2$ і

$$2 - t = 2 - a_{n-1} + \{-a_1 - \ldots - a_{n-2}\} = 2 - (-a_1 - \ldots - a_{n-1}) - [-a_1 - \ldots - a_{n-2}].$$

Тобто різниця $2 - t$ збігається з $\{-a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}\}$ або більша за неї рівно на одиницю. Тому $\epsilon + 2 - t = 1 + \{-a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1}\}$ і матриця B дійсно є сумою ортопроекторів $P_1, \ldots, P_k$ з відповідною умовою ортогональності.

Наслідок 2 доведено.

Доведення наступної леми повторює кроки алгоритму спектрального тетрісу [2]. Для скорочення позначень ми використовуємо матрицю I_0 як елемент діагональної матриці. Це означає, що на відповідному місці в діагональній матриці немає прямого доданка і його потрібно вилучити з множини діагональних елементів.

Лема 3. *Нехай* $0 \leq \alpha \leq 2$, $b_i \in \mathbb{R}$, $2 \leq b_i \leq k-2$, $i = 1, \ldots, s-1$, $1 < b_s < k-3$, $s \geq 2$ *і* $\sum_{i=1}^{s} b_i - \alpha$ *ціле. Тоді існують індекси* i_*, j_*, *ортопроектори* $R_1, \ldots, R_k$ *з умовою* $R_{n-1} E_{11} = 0_s = R_n E_{11}$, *для яких матриця* $\operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ *розкладається в суму* $\alpha E_{11} + R_1 + \ldots + R_k$, *і* $R_{i_*} E_{ss} = 0_s = R_{j_*} E_{ss}$. *Якщо при цьому відомо додатково, що* $1 < \alpha$, *то можна збільшити допустимі межі для* $b_s : 1 < b_s \leq k-2$.

Доведення. Побудуємо послідовність $n_1, \ldots, n_s \in \{0, 1, \ldots, k-4\}$ та числа $g_1, \ldots, g_s \in [0, 2]$ за правилом: n_1 таке, що виконуються нерівності

$$b_1 - \max(2, 1+\alpha) \leq n_1 \leq b_1 - \alpha, \tag{7}$$

причому n_1 вибирається найбільшим цілим із відрізка $[0, k-4]$, потім $g_1 = b_1 - \alpha - n_1$. Якщо вибрано n_{m-1} і g_{m-1}, то n_m вибирається найбільшим цілим із відрізка $[0, k-4]$, що задовольняє нерівності

$$b_m + g_{m-1} - 4 \leq n_m \leq b_m + g_{m-1} - 2, \tag{8}$$

а

$$g_m = b_m + g_{m-1} - n_m - 2, \quad m = 2, \ldots, s. \tag{9}$$

Це можливо, оскільки $b_1 \leq k-2$ і $b_1 - 2 \leq k-4$, а отже, нерівності (7) виконуються при деякому $n_1 \in [0, k-4]$. Крім того, з (7) випливає, що $0 \leq g_1 \leq 2$. А якщо накладено додаткову умову $1 < \alpha$, то $g_1 < 1$. Аналогічно, з того, що $0 \leq g_{m-1} \leq 2$ і $2 \leq b_{m-1} \leq k-2$ випливає, що нерівності (8) виконуються при деякому $n_m \in [0, k-4]$, а отже, $0 \leq g_m \leq 2$. Додаткова умова $g_{m-1} < 1$ приводить до нерівності $g_m < 1$. Зауважимо, що, використовуючи послідовно (9) для $m = s, s-1, \ldots, 2$, отримуємо співвідношення

$$g_s = (b_s - n_s - 2) + g_{s-1} = \sum_{i=1}^{s} b_i - \sum_{i=1}^{s} n_i - \alpha - 2(s-1),$$

а оскільки $\sum_{i=1}^{s} b_i - \alpha \in \mathbb{Z}$, то $g_s \in \mathbb{Z}$, тобто $g_s \in \{0, 1, 2\}$.

По послідовності n_j і g_j визначаємо функції δ_i та $\triangle_t$, $i = 1, 2, \ldots, k-4$, $t = 1, 2$, $j = 1, \ldots, s$:

$$\delta_i(n_j) = \begin{cases} 1, & i \leq n_j, \\ 0, & i > n_j, \end{cases} \qquad \triangle_t(g_s) = \begin{cases} 1, & t \leq g_s, \\ 0, & t > g_s, \end{cases}$$

і ортопроектори

$$R_i = \operatorname{diag}\left(\delta_i(n_1), \delta_i(n_2), \ldots, \delta_i(n_s)\right).$$

Крім того, задаємо чотири ортопроектори:

$$R_{k-3} = \operatorname{diag}\left(\phi_+(g_1/2), \phi_+(g_3/2), \ldots, \phi_+\left(\frac{1}{2} g_{2[s/2]-1}\right), \triangle_1(g_s) I_{2\{s/2\}}\right),$$

$$R_{k-2} = \operatorname{diag}\left(\phi_-(g_1/2), \phi_-(g_3/2), \ldots, \phi_-\left(\frac{1}{2} g_{2[s/2]-1}\right), \triangle_2(g_s) I_{2\{s/2\}}\right),$$

$$R_{k-1} = \operatorname{diag}\left(0, \phi_+(g_2/2), \phi_+(g_4/2), \ldots, \phi_+\left(\frac{1}{2} g_{2[(s-1)/2]}\right), \triangle_1(g_s) I_{2\{(s-1)/2\}}\right),$$

$$R_{k} = \operatorname{diag}\left(0, \phi_-(g_2/2), \phi_-(g_4/2), \ldots, \phi_-\left(\frac{1}{2} g_{2[(s-1)/2]}\right), \triangle_2(g_s) I_{2\{(s-1)/2\}}\right).$$

За побудовою, використовуючи формули (8), (9), отримуємо рівність

$$\sum_{i=1}^{k} R_i + \alpha E_{11} = \operatorname{diag}\left(g_1 + n_1 + \alpha,\ g_2 + 2 - g_1 + n_2, \ldots,\ g_s + 2 - g_{s-1} + n_s\right) =$$

$$= \operatorname{diag}\left(b_1, \ldots, b_s\right).$$

Властивість ортогональності $R_{n-1}E_{11} = 0_s = R_n E_{11}$ перевіряється безпосереднім множенням. Проаналізуємо тепер останні елементи на діагоналях матриць P_{k-3}, P_{k-2}, P_{k-1} і P_k. При непарному s $I_{2\{s/2\}} = I_1$, і тому останні елементи на діагоналях у P_{k-3} і P_{k-2} будуть нулями або одиницями в залежності від значень функцій $\triangle_1(g_s)$ і $\triangle_2(g_s)$. Аналогічно, при парному s $I_{2\{(s-1)/2\}} = I_1$, і тому останні елементи на діагоналях у P_{k-1} і P_k будуть нулями або одиницями в залежності від значень функцій $\triangle_1(g_s)$ і $\triangle_2(g_s)$. Зазначимо, що за побудовою n_s вибирається найбільшим з $[0, k-4]$ так, щоб $g_s \geq 0$. Оскільки $g_{s-1} - 2 \leq 0$ і при $b_s < k-3$ виконується $b_s - (k-4) < 1$, то $g_s < 1$, а отже, $g_s = 0$. При додаткових умовах $\alpha > 1$ і $b_s \leq k-2$ маємо $g_{s-1} - 2 < -1$ та

$$b_s - (k-4) + (g_{s-1} - 2) < 1.$$

Отже, і в цьому випадку $g_s = 0$. Оскільки $\triangle_1(0) = \triangle_2(0) = 0$, то у пари матриць P_{k-3} і P_{k-2} або P_{k-1} і P_k на останньому місці діагоналей стоять нулі. Щоб виконати умову ортогональності $R_{i_*}E_s = 0_s = R_{j_*}E_{ss}$, залишилося покласти індекси i_*, j_* рівними $k-3$, $k-2$ при непарному s і $k-1$ та k при парному s.

Лему 3 доведено.

Наслідок 3. *Якщо в умовах леми* 3 *не вимагати умови ортогональності* $R_{i_*}E_s = 0_s = R_{j_*}E_{ss}$, *то умову на* b_s *можна послабити до* $1 < b_s \leq k-2$.

Справді, ортопроектори $P_1, P_2, \ldots, P_k$ можна задати за формулами з доведення леми 3, але оскільки b_s може бути більшим за $k-3$, параметр g_s може набувати значень 1 і 2. Таким чином, ми отримуємо розклад $\mathrm{diag}\,(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ у зазначену суму матриць, але умову ортогональності забезпечити, взагалі кажучи, не можемо.

Теорема 2. *Нехай* A *є ермітовою* $(n \times n)$*-матрицею над* $\mathbb{C}$ *з цілим слідом. Якщо всі власні числа* A *лежать у множині* $\left[1 + 1/(k-3), k-1-1/(k-3)\right]$, *то* A *розкладається в суму* k *ортопроекторів,* $k \geq 5$.

Доведення достатньо провести для діагональної матриці, оскільки з існування розкладу для такої матриці буде випливати існування розкладу і для унітарно еквівалентної до неї матриці, тобто для довільної ермітової матриці, що задовольняє умови теореми. До того ж якщо ми знайдемо розклад у суму ортопроекторів діагональної матриці з конкретним порядком слідування елементів на діагоналі, то будемо мати й розклади діагональних матриць з довільним порядком слідування цих самих елементів на діагоналі. Отже, нехай $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_q)$, де $1 + \dfrac{1}{k-3} \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m < 2 \leq b_1 \leq$ $\leq b_2 \leq \ldots \leq b_s \leq k-2 < c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_q \leq k-1-\dfrac{1}{k-3}$. При $n = 1$ матриця A — це ціле число b_1 і є сумою b_1 ортопроекторів.

В залежності від значень чисел m, s і q будемо мати 7 принципових випадків побудови розкладу матриці A в суму ортопроекторів.

Випадок 1. При $s = q = 0$ теорема 2 безпосередньо випливає з леми 2. Справді, за лемою 2 для матриці $B = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \{-a_1 - \ldots - a_{n-1}\})$ існують ортопроектори P_1, $P_2, \ldots, P_k$, які в сумі дають B і $P_k \perp E_{nn}$. Покладемо Q_k рівним $P_k + E_{nn}$. Тоді Q_k — ортопроектор і

$$C = P_1 + \ldots + P_{k-1} + Q_k = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1 + \{-a_1 - \ldots - a_{n-1}\})\,.$$

З іншого боку, оскільки $\mathrm{tr}\,A$ є цілим, то $a_n + \{a_1 + \ldots + a_{n-1}\} \in \mathbb{Z}$, тобто $\{a_n\} = \{-a_1 - \ldots$ $\ldots - a_{n-1}\}$. Внаслідок того, що $1 + 1/(k-3) \leq a_n < 2$, маємо $a_n - 1 = \{-a_1 - \ldots - a_{n-1}\}$, а тому $C = A$.

Нехай далі $d_i = k - c_i,\ i = 1,\ldots,q$. Звичайно, кожне d_i задовольняє нерівності $1 + 1/(k-3) \leq d_i < 2$.

Випадок 2. При $m = s = 0$ матриця $D = \mathrm{diag}\,(d_1,\ldots,d_q)$ має цілий слід і є сумою k ортопроекторів. Наприклад, $D = Q_1 + \ldots + Q_k$, де кожна матриця Q_i є ортопроектором. Але тоді матриця A, для якої $kI_q - D = A$, теж є сумою k ортопроекторів вигляду $I_q - Q_1$, $I_q - Q_2,\ldots, I_q - Q_k$.

Випадок 3. При $m = q = 0$ і $s > 0$, покладаючи $\alpha = 0$, з огляду на лему 3 і наслідок 3 приходимо до висновку, що матриця A є сумою k ортопроекторів.

Випадок 4. При $q = 0$ і $m, s > 0$ ми використаємо лему 2 і наслідок 3. При $m = 1$ матриця $A_1 = \mathrm{diag}\,(b_1,\ldots,b_s,a_1)$ є сумою k ортопроекторів за наслідком 3 при $\alpha = 0$. Отже, нехай далі $m > 1$. За лемою 2 матриця $A_2 = \mathrm{diag}\,(a_1,a_2,\ldots,a_{m-1},\{-a_1-a_2-\ldots-a_{m-1}\})$ є сумою k ортопроекторів, наприклад ортопроекторів $Q_1,\ Q_2,\ldots,Q_k$, причому $Q_{k-1},Q_k \perp E_{mm}$. За наслідком 3 при $\alpha = 2 - a_m + \{-a_1-a_2-\ldots-a_{m-1}\}$ матриця $\mathrm{diag}\,(b_1,b_2,\ldots,b_s)$ є сумою $\alpha E_{11} + R_1 + \ldots + R_k$, , де R_i — ортопроектори з $M_s(\mathbb{C})$ та $R_{k-1}E_{11} = R_kE_{11} = 0_s$. Вибираючи ортопроектори P_i рівними $Q_i \oplus R_i$ при $i = 1,2,\ldots,k-2$ і

$$P_{k-1} = Q_{k-1} \oplus R_{k-1} + \mathrm{diag}\,(0_{m-1}, \phi_+((a_m - \{-a_1-a_2-\ldots-a_{m-1}\})/2), 0_{s-1})\,,$$
$$P_k = Q_k \oplus R_k + \mathrm{diag}\,(0_{m-1}, \phi_-((a_m - \{-a_1-a_2-\ldots-a_{m-1}\})/2), 0_{s-1})\,,$$

отримуємо $\sum_1^k P_i = A$.

Випадок 5. При $m = 0$ і $q, s > 0$ матриця $\hat{A} = kI_n - A$ має всі власні числа між $1+1/(k-3)$ і $k-2$, а отже, задовольняє умови випадку 4. Таким чином, $\hat{A}$ є сумою ортопроекторів, $\hat{A} = P_1 + \ldots + P_k$, і оскільки $I_n - P_i$ — ортопроектор, то і $A = (I_n - P_1) + \ldots + (I_n - P_k)$ є сумою k ортопроекторів.

Випадок 6. Нехай $s = 0$ і $m, q > 0$. Щоб коректно використати лему 2 для загального випадку, нам необхідно, щоб $m \geq 2$ і $q \geq 2$. Тому розглянемо часткові випадки окремо.

6.1) Нехай $m = q = 1$. Тоді $A = \mathrm{diag}\,(a,c)$, і оскільки $1 + 1/(k-3) \leq a < 2,\ k-2 < c \leq k - 1 - 1/(k-3)$, то $k - 1 + 1/(k-3) < a + c = \mathrm{tr}\,A < k + 1 - 1/(k-3)$. З іншого боку, $\mathrm{tr}\,A \in \mathbb{Z}$. Звідси $\mathrm{tr}\,A = k$. За теоремою 1 матриця A є сумою k ортопроекторів.

6.2) Нехай $m = 1$ і $q > 1$. Тоді $A = \mathrm{diag}\,(a,c_1,c_2,\ldots,c_q)$. Побудуємо нову матрицю $B = \mathrm{diag}\,(\{-d_1-d_2,\ldots,d_{q-1}\},d_1,d_2,\ldots,d_q)$. За лемою 2 матриця B є сумою ортопроекторів $Q_1,\ldots,Q_k$, причому $Q_{k-1}E_{11} = Q_kE_{11} = 0_q,\ Q_i \in M_q(\mathbb{C}),\ i = 1,\ldots,k$. Покладаючи $P = \mathrm{diag}\,(0,I_q)$, визначаємо ортопроектори P_i:

$$P_i = P - \mathrm{diag}\,(0,Q_i)\,, \quad i = 1,\ldots,k-3.$$

Введемо параметр $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon = a - 1$, якщо $a + \{c_1 + \ldots + c_{q-1}\} > 2$ і $\epsilon = a$ — в інших випадках. Тепер визначаємо P_{k-2}, P_{k-1} і P_k:

$$P_{k-2} = \mathrm{diag}\,(a-\epsilon, I_q) - \mathrm{diag}\,(0,Q_{k-2})\,, \qquad P_{k-1} = \mathrm{diag}\,(\phi_+(\epsilon/2), I_{q-1}) - \mathrm{diag}\,(0,Q_{k-1})\,,$$
$$P_k = \mathrm{diag}\,(\phi_-(\epsilon/2), I_{q-1}) - \mathrm{diag}\,(0,Q_k).$$

За побудовою

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = \mathrm{diag}\,(a, 2 - \epsilon + k - 2 - \{-d_1-d_2-\ldots-d_{q-1}\}, c_1,\ldots,c_{q-1})\,. \qquad (10)$$

Зауважимо, що $\operatorname{tr} A = a + c_1 + \ldots + c_q \in \mathbb{N}$ і $a - \epsilon \in \{0, 1\}$, звідки

$$2 - \epsilon + k - 2 - \{-d_1 - d_2 - \ldots - d_{q-1}\} = k - \epsilon - \left\{ -\sum_{i=1}^{q-1}(k - c_i) \right\} =$$

$$= k - \epsilon - \left\{ \sum_{i=1}^{q-1} c_i \right\} = k - \epsilon - \left(\sum_{i=1}^{q-1} c_i - \left[\sum_{i=1}^{q-1} c_i \right] \right) = c_q - N_q,$$

де $N_q \in \mathbb{Z}$. З іншого боку, за визначенням ϵ виконуються нерівності

$$k - 2 \leq k - \left(\epsilon + \left\{ \sum_{i=1}^{q-1} c_i \right\} \right) < k - 1.$$

Тому $N_q = 0$ і діагональна матриця з (10) буде унітарно еквівалентною матриці A, а отже, A є сумою k ортопроекторів.

6.3) Нехай $m > 1$ і $q = 1$. Тоді $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m, c)$. Зауважимо, що матриця $D = kI_{m+1} - A$ буде мати одне власне число, менше за 2, і більше ніж одне власне число, що більше за $k - 2$. Тобто D задовольняє умови пп. 6.2. Отже, як D, так і A є сумами k ортопроекторів.

6.4) Нехай $m > 1$ і $q > 1$. Визначимо два числа:

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 1, & a_m \geq 1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}, \\ 0, & a_m < 1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}, \end{cases} \qquad x = a_m - (\epsilon_1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}),$$

$$\epsilon_2 = \begin{cases} 0, & x + \{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\} < 1, \\ 1, & x + \{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\} \geq 1. \end{cases}$$

За лемою 2 і наслідком 3 існують такі ортопроектори $Q_1, \ldots, Q_k$, що

$$Q_1 + \ldots + Q_k = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}, \epsilon_1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}),$$

і такі ортопроектори $W_1, \ldots, W_k$, що

$$W_1 + \ldots + W_k = \operatorname{diag}(\{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\}, d_1, \ldots, d_{q-1}).$$

При цьому можна вважати, що $Q_{k-1}, Q_k \perp E_{mm}$, а $W_{k-1}, W_k \perp E_{11}$. Визначаємо ортопроектори $P_1, \ldots, P_k$ за формулами $P_i = Q_i \oplus (I_q - W_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, k-3$,

$$P_{k-2} = Q_{k-2} \oplus (\operatorname{diag}(\epsilon_2, I_{q-1}) - W_{k-2}),$$

$$P_{k-1} = Q_{k-1} \oplus (\operatorname{diag}(0, I_{q-1}) - W_{k-1}) + \operatorname{diag}(0_{m-1}, \phi_+(x/2), 0_{q-1}),$$

$$P_k = Q_k \oplus (\operatorname{diag}(0, I_{q-1}) - W_k) + \operatorname{diag}(0_{m-1}, \phi_-(x/2).0_{q-1}).$$

З отриманих формул маємо

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_m, t, c_1, c_2, \ldots, c_{q-1}), \tag{11}$$

де $t = 2 - x + k - 3 + \epsilon_2 - \{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\}$. Зауважимо, що $k - 2 < t \leq k - 1$. З іншого боку, $\{t\} = \{c_q\}$. Тому $t = c_q$, а отже, з розкладу (11) випливає, що A також є сумою k ортопроекторів.

Випадок 7. Нехай $s, m, q > 0$. Зауважимо, що коли $\sum_1^m a_i \in \mathbb{Z}$, то $\mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ є сумою k ортопроекторів за випадком 1, а $\mathrm{diag}\,(b_1, b_2, \ldots, c_q)$ — сумою k ортопроекторів за випадком 5. Отже, будемо далі вважати, що $\sum_{i=1}^m a_i \notin \mathbb{Z}$. Як і в попередньому пункті, введемо дві величини:

$$\epsilon_1 = \begin{cases} 1, & a_m \geq 1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}, \\ 0, & a_m < 1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} 2 - a_m + (\epsilon_1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\}), & m > 1, \\ 3 - a_1, & m = 1. \end{cases}$$

Спочатку покажемо, що

$$\hat{A} = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{s-1}, [b_s] - \epsilon_2 + \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\})$$

є сумою k ортопроекторів при деякому цілому ϵ_2.

При $m = 1$ візьмемо $Q_i = 0,\ i = 1, \ldots, k-3, k-1, k,\ Q_{k-2} = 1$, а при $m > 1$ за лемою 2 і наслідком 3 для матриці $\mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \epsilon_1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1})$ існують ортопроектори $Q_1, \ldots, Q_k$ такі, що

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \epsilon_1 + \{-a_1 - \ldots - a_{m-1}\})$$

з умовою $Q_{k-1}E_{mm} = Q_k E_{mm} = 0_m$. Покладемо

$$\epsilon_2 = \begin{cases} 1, & [b_s] + \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\} > b_s, \\ 0, & [b_s] + \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\} \leq b_s, \end{cases} \qquad \beta = 2 - \epsilon_2 - \{b_s\} + \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\}.$$

За побудовою $\alpha > 1$. Використовуючи лему 3, отримуємо ортопроектори $R_1, \ldots, R_k$ такі, що

$$\alpha E_{11} + R_1 + R_2 + \ldots + R_k = \mathrm{diag}\,(b_1, \ldots, b_{s-1}, [b_s] - \epsilon_2 + \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\}),$$

причому $R_{i_*}E_{ss} = R_{j_*}E_{ss} = 0_s$. Без обмеження загальності можна вважати, що $i_*, j_* \neq 1$. Звідси, визначаючи $\hat{Q}_i = Q_i \oplus R_i,\ i = 1, \ldots, k-2$,

$$\hat{Q}_{k-1} = Q_{k-1} \oplus R_{k-1} + \mathrm{diag}\,(0_{m-1}, \phi_+(1 - \alpha/2), 0_{s-1}),$$

$$\hat{Q}_k = Q_k \oplus R_k + \mathrm{diag}\,(0_{m-1}, \phi_-(1 - \alpha/2), 0_{s-1}),$$

отримуємо $\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 + \ldots + \hat{Q}_k = \hat{A}$. Покладемо

$$\epsilon_3 = \begin{cases} 1, & k - 2 + \beta - \{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\} \geq k - 1, \\ 0, & k - 2 + \beta - \{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\} < k - 1. \end{cases}$$

Тепер, як і у випадку 6, при $q > 1$ для матриці $D = \mathrm{diag}\,(\epsilon_3 + \{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\}, d_1, \ldots, d_{q-1})$ знаходимо розклад у суму ортопроекторів $D = W_1 + \ldots + W_k$, причому внаслідок довільності початкової нумерації W_i можна вважати, що $W_{i_*}E_{11} = 0_q$ і $W_{j_*}E_{11} = 0_q$. При $q = 1$ будемо вважати, що $W_1 = \epsilon_3$, а всі інші W_i є нульовими. Залишилося визначити ортопроектори, сума яких унітарно еквівалентна матриці A. Нехай, за визначенням, $P_i = \hat{Q}_i \oplus (I_q - W_i)$, $i \neq i_*$, $i \neq j_*$,

$$P_{i_*} = \hat{Q}_{i_*} \oplus (-W_{i_*}) + 0_{m+s-1} \oplus \phi_+\big((\{b_s\} + \epsilon_2 - \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\})/2\big) \oplus I_{q-1},$$

$$P_{j_*} = \hat{Q}_{j_*} \oplus (-W_{j_*}) + 0_{m+s-1} \oplus \phi_-\big((\{b_s\} + \epsilon_2 - \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\})/2\big) \oplus I_{q-1}.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = \operatorname{diag}\left(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_s, t, c_1, \ldots, c_{q-1}\right), \tag{12}$$

де $t = 2 - \{b_s\} - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \{\alpha - b_1 - \ldots - b_{s-1}\} + k - 2 - \{-d_1 - \ldots - d_{q-1}\}$. За формулами для α, β, ϵ_2 і ϵ_3 маємо $k - 2 \leq t < k - 1$. З іншого боку, $\{t\} = \{c_q\}$, оскільки матриця в (12) має цілий слід, що разом із попередньою нерівністю дає $t = c_q$. Таким чином, побудована сума ортопроекторів унітарно еквівалентна A, а отже, A також є сумою k ортопроекторів.

Теорему 2 доведено.

2. Приклади сум ортопроекторів і залежність між їхніми власними числами. Як доведено в [15] (твердження 3.3) довільну $(n \times n)$-матрицю зі слідом $n+m$, яка є прямою сумою m матриць із простим спектром (розміру не меншого за 2), можна розкласти в суму трьох ідемпотентів. Кожна матриця з простим спектром є прямою сумою матриць із простим спектром. Звідси, як наслідок, маємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай A є $(n \times n)$-матрицею з цілим слідом і простим спектром над $\mathbb{C}$. Якщо $n + 1 \leq \operatorname{tr} A \leq 3n/2$, то A є сумою трьох ідемпотентних матриць.*

Аналогічне твердження не є справедливим для сум ортопроекторів, навіть якщо припустити додатновизначеність і обмеженість матриці. Є проста оцінка для необхідного числа ортопроекторів у розкладі (1). Для ермітової матриці введемо дві величини — числові характеристики кількості її власних значень: $NV(A)$ — *кількість* власних значень матриці A, які не менші за одиницю, і $Nv(A)$ — *кількість* власних значень матриці A, які не перевищують одиниці.

Теорема 3. *Нехай ненульова матриця A задовольняє розклад $A = P_1 + P_2 + \ldots + P_k$, де P_i, $i = 1, \ldots, k$, — ортопроектор. Тоді виконується нерівність $Nv(A)/NV(A) \leq k - 1$.*

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що $\operatorname{tr} P_1 \geq \operatorname{tr} P_2 \geq \ldots \geq \operatorname{tr} P_k$. Нехай $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)$ — матриці $P_1 + P_2$ з урахуванням кратності. Розглянемо число $1 < \lambda_i < 2$. За твердженням 1 число λ_i належить $\sigma(P_1 + P_2)$ тоді і тільки тоді, коли $2 - \lambda_i \in \sigma(P_1 + P_2)$. Отже, кількість власних значень $P_1 + P_2$, що більші за одиницю, збігається з кількістю власних значень $P_1 + P_2$, що менші за одиницю. Крім того, власне значення $\lambda = 1$ вважають як функцією Nv, так і функцією NV. Залишилось власне значення $\lambda = 2$, наявність якого збільшує лише значення NV. Тому $NV(P_1 + P_2) \geq Nv(P_1 + P_2)$. Зазначимо, що P_1 — невід'ємна матриця і має власне значення 1 кратності $\operatorname{tr} P_1$. Тому внаслідок монотонності і матриця $P_1 + P_2$, для якої $P_1 + P_2 \geq P_1$, має як мінімум $\operatorname{tr} P_1$ власних значень, не менших за 1, якщо рахувати й їхні кратності. Таким чином, $NV(P_1 + P_2) \geq \operatorname{tr} P_1$.

Тепер ми використаємо теорему Вейля про одновимірне збурення ермітової матриці [13]. Нагадаємо, що власні числа $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ ермітової матриці B та власні числа $c_1 \geq \ldots \geq c_n$ матриці $C = B + P$, де P — ортопроектор рангу один, перемежовуються, тобто $c_1 \geq b_1 \geq c_2 \geq \geq b_2 \geq c_3 \geq \ldots \geq b_{n-1} \geq cn \geq b_1$. Це означає, що при одновимірному збуренні значення функції $NV(P_1 + P_2)$ не зменшиться, а значення функції $Nv(P_1 + P_2)$ може збільшитися як максимум на одиницю, оскільки лише одне нульове власне значення може перетворитися на ненульове. Матриця A є послідовним збуренням матриці $P_1 + P_2$ одноранговими ортопроекторами. Кількість однорангових збурень дорівнює $\operatorname{tr} P_3 + \operatorname{tr} P_4 + \ldots + \operatorname{tr} P_k$. Звідси отримуємо нерівності

$$\begin{aligned} Nv(P_1 + P_2 + \ldots + P_k) &\leq Nv(P_1 + P_2) + \operatorname{tr} P_3 + \operatorname{tr} P_4 + \ldots + \operatorname{tr} P_k \leq \\ &\leq NV(P_1 + P_2) + \operatorname{tr} P_3 + \operatorname{tr} P_4 + \ldots + \operatorname{tr} P_k. \end{aligned} \tag{13}$$

Враховуючи нерівності $NV(P_1 + P_2 + \ldots + P_k) \geq NV(P_1 + P_2) \geq \operatorname{tr} P_1$, ділимо (13) на $NV(A)$ й отримуємо

$$\frac{Nv(A)}{NV(A)} \leq 1 + \frac{\operatorname{tr} P_3 + \operatorname{tr} P_4 + \ldots + \operatorname{tr} P_k}{\operatorname{tr} P_1} \leq k - 1.$$

Теорему 3 доведено.

Розглянемо різні приклади застосування цієї теореми.

***Приклад* 1.** Нехай $a_1, \ldots, a_n$ попарно різні, $0 < a_i < 1, i = 1, \ldots, n - 1,\ 1 < a_n < 2$, $a_1 + \ldots + a_n = n + 1$. Матриця $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ має слід $n + 1$, її спектр простий і при $n > k$ нерівність з теореми 3 не виконується. Отже, A є сумою не менш ніж n ортопроекторів.

Як показує наступний приклад, умови теореми 3 не є достатніми.

***Приклад* 2.** Матриця $(1 + 1/(k - 1))I_{k-1}$ не є сумою менш ніж k ортопроекторів (див. [10]). Але й матриці з простим спектром, що задовольняють нерівність щодо кількості власних значень з теореми 3, можуть не бути сумою k ортопроекторів.

***Приклад* 3.** Нехай $a_1, \ldots, a_n$ попарно різні, $\epsilon > 0,\ 1 < a_i < 1 + \epsilon,\ i = 1, \ldots, n,\ a_1 + \ldots \ldots + a_n = n + m$. Матриця $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ має слід $n + m$, її спектр простий і при $(k - 1)\epsilon < 1$ не є сумою k ортопроекторів.

Твердження з прикладу 3 базується на лемі 2 з [14], яка постулює таку властивість сум ортопроекторів: при малих ϵ з того, що сума проекторів $P_1 + \ldots + P_k$ менша за $(1 + \epsilon)I$, випливає, що сума $P_1 + \ldots + P_k$ не менша за $(1 - (k - 1)\epsilon)P_{\mathcal{H}}$, де $P_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор на замикання суми підпросторів $\operatorname{Im} P_1 + \ldots + \operatorname{Im} P_k$. Тому при $k - 1 < 1/\epsilon$ така сума з k ортопроекторів повинна мати власне значення в інтервалі $(0, 1)$. А в матриці A всі власні значення більші за одиницю.

Зауважимо, що в прикладі 3 можна взяти всі a_i не меншими за $1 + 1/(k - 3)$. Тоді з теореми 2 випливає, що A є сумою k ортопроекторів. З іншого боку, як показує приклад 3, при $\epsilon < 1/(k - 4)$ матриця A не є сумою $k - 3$ ортопроекторів. Якою буде найменша кількість ортопроекторів — число $k - 2,\ k - 1$ або k, в суму яких можна розкласти A, вже залежить від конкретних значень a_i.

Автор вдячний В. Л. Островському і Ю. С. Самойленку за корисні зауваження і поради при обговоренні цієї тематики.

Література

1. P. G. Casazza, G. Kutyniok, *Finite frames theory and applications*, Appl. and Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, New York (2013), p. 437 – 478.
2. R. Calderbank, P. G. Casazza, A. Heinecke, G. Kutyniok, A. Pezeshki, *Sparse fusion frames: existence and construction*, Adv. Comput. Math., **35**, 1 – 31 (2011).
3. P. G. Casazza, M. Fickus, D. G. Mixon, Y. Wang, Z. Zhou, *Constructing tight fusion frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **30**, 175 – 187 (2011).

4. J. Leng, D. Han, *Orthogonal projection decomposition of matrices and construction of fusion frames*, Adv. Comput. Math., **38**, № 2, 369 – 381 (2013).
5. P. E. Björstad, J. Mandel, *On the spectra of sums of orthogonal projections with applications to parallel computing*, BIT Numer. Math., **31**, № 1, 76 – 88 (1991).
6. K. Nishio, *The structure of real linear combination of two projections*, Linear Algebra and Appl., **66**, 169 – 176 (1985).
7. В. Л. Островський, Д. Ю. Якименко, *Про існування та побудову ортоскалярних наборів підпросторів*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, № 1, 154 – 165 (2015).
8. A. Böttcher, I. M. Spitkovsky, *A gentle guide to the basics of two projections theory*, Linear Algebra and Appl., **432**, 1412 – 1459 (2010).
9. P. A. Fillmore, *On sums of projections*, J. Funct. Anal., **4**, 146 – 152 (1969).
10. S. A. Kruglyak, V. I. Rabanovich, Yu. S. Samoĭlenko, *Decomposition of a scalar matrix into a sum of orthogonal projections*, Linear Algebra and Appl., **370**, 217 – 225 (2003).
11. W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc., **37**, № 3, 209 – 249 (2000).
12. W. Fulton, *Eigenvalues of majorized Hermitian matrices and Littlewood – Richardson coefficients*, Linear Algebra and Appl., **319**, 23 – 36 (2000).
13. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2013).
14. S. A. Kruglyak, V. I. Rabanovich, Yu. S. Samoĭlenko, *On sums of projections*, Funct. Anal. and Appl., **36**, № 3, 182 – 195 (2002).
15. J.-H. Wang, *The length problem for a sums of idempotents*, Linear Algebra and Appl., **215**, 135 – 159 (1995).
16. P. Y. Wu, *Additive combinations of special operators*, Funct. Anal. and Oper. Theory, Banach Center Publ., Warszawa, **30**, 337 – 361 (1994).

Одержано 18.02.20