DOI: 10.37863/umzh.v73i8.2380

УДК 519.114; 512.622

Л. П. Бедратюк (Хмельниц. нац. ун-т),
Н. Б. Луньо (Донец. нац. ун-т ім. В. Стуса, Вінниця)

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНІВ ЧЕБИШОВА

We introduce the notion of Chebyshev derivations of the first and second kinds based on the polynomial algebra and corresponding specific differential operators, derive the elements of their kernels, and prove that any element of the kernel of the derivations defines a polynomial identity for Chebyshev polynomials of both kinds. We obtain several polynomial identities involving the Chebyshev polynomials of both kinds, a partial case of the Jacobi polynomials, and the generalized hypergeometric function.

Введено поняття диференціювань Чебишова першого та другого роду, знайдено елементи ядер обох диференціювань і доведено, що довільний елемент ядра кожного з диференціювань визначає деяку поліноміальну тотожність для многочленів Чебишова першого та другого роду. Отримано набір тотожностей для многочленів Чебишова обох родів, часткового випадку многочленів Якобі та узагальненої гіпергеометричної функції.

1. Вступ. Многочлени Чебишова першого $T_n(x)$ і другого $U_n(x)$ роду визначаються за допомогою звичайної породжуючої функції таким чином:

$$\mathcal{G}(T_n(x),t)=\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n,$$

$$\mathcal{G}(U_n(x),t)=\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n.$$

Похідні обох сімей многочленів визначаються через самі многочлени за формулою (див. [1, 9])

$$\frac{d}{dx}T_n(x)=n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-(-1)^k\right)T_{n-k}(x)+\frac{1-(-1)^n}{2}T_0(x)\right),$$

$$\frac{d}{dx}U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(1-(-1)^{n-k}\right)(n-k+1)U_{n-k}(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n-2k)U_{n-2k-1}(x).$$

Метою даної роботи є пошук поліноміальних тотожностей для вказаних сімей многочленів, тобто тотожностей вигляду

$$P(T_0(x),T_1(x),\ldots,T_n(x))=0 \qquad \text{або} \qquad P(U_0(x),U_1(x),\ldots,U_n(x))=0,$$

де $P(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ — многочлен від $(n+1)$-ї змінної.

Будемо застосовувати підхід, запропонований першим із авторів у роботі [3]. Вказаний метод пошуку поліноміальних тотожностей базується на простому спостереженні: якщо має місце рівність

$$\frac{d}{dx}P(T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)) = 0,$$

то многочлен $P(T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x))$ є константою. Іншими словами, многочлен $P(T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x))$ визначає тотожність для многочленів Чебишова першого роду.

Запишемо похідну многочленів Чебишова першого роду у вигляді

$$\frac{d}{dx}P(T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_0}P(x_0, x_1, \ldots, x_n)\Big|_{\{x_i = T_i(x)\}}\frac{d}{dx}T_0(x) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}P(x_0, x_1, \ldots, x_n)\Big|_{\{x_i = T_i(x)\}}\frac{d}{dx}T_n(x).$$

Тоді

$$\frac{d}{dx}P(T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x)) =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_0}P(x_0, x_1, \ldots, x_n)\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(x_0) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}T(x_0, x_1, \ldots, x_n)\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(x_n)\right)\Bigg|_{\{x_i = T_i(x)\}} =$$
$$= \mathcal{D}_{\mathcal{T}}(P(x_0, x_1, \ldots, x_n))\Big|_{\{x_i = T_i(x)\}},$$

де диференціальний оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ визначається за формулою

$$\mathcal{D}_{\mathcal{T}} = n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - (-1)^k\right)x_{n-k} + \frac{1 - (-1)^n}{2}x_0\right).$$

Зрозуміло, що якщо $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}(P(x_0, x_1, \ldots, x_n)) = 0$, то похідна $\dfrac{d}{dx}P(T_0(x), T_1(x), \ldots, T_n(x))$ є сталою.

Таким чином, будь-який нетривіальний многочлен $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, який належить до ядра диференціювання $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, визначає поліноміальну тотожність для многочленів Чебишова першого роду.

Аналогічна конструкція має місце для многочленів Чебишова другого роду. Введемо диференціальний оператор

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}(x_n) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + (-1)^{n-k+1}\right)(k+1)U_k(x).$$

Тоді умова

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}\big(P(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big) = 0$$

визначає поліноміальну тотожність для многочленів другого роду.

В даній роботі, застосовуючи вказаний підхід, ми вводимо поняття диференціювань Чебишова першого та другого роду. Для кожного із вказаних диференціювань отримано опис елементів ядра, крім того, знайдено набір поліноміальних тотожностей для многочленів Чебишова обох родів вигляду

$$T_n(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)^k n}{k!}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}T_{n-k-2i}(x)T_1(x)^k-\right.$$

$$\left.-(1+(-1)^{n-k})\frac{1}{4}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}T_1(x)^k\right)=\cos\frac{\pi n}{2},$$

$$U_n(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-2i-k+1)(n-i)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}U_{n-k-2i}(x)U_1(x)^k=\cos\frac{\pi n}{2}.$$

2. Диференціювання Чебишова. Нехай $\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]$ — алгебра многочленів від $(n+1)$-ї змінної $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ над полем $\mathbb{C}$. Нагадаємо, що *диференціюванням* алгебри многочленів $\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]$ називається лінійне відображення D, яке задовольняє правило Лейбніца:

$$D(fg)=D(f)g+fD(g)\quad \text{для всіх}\quad f,g\in\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n].$$

За допомогою правила диференціювання частки будь-яке диференціювання можна розширити до поля дробів $\mathbb{C}(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Диференціювання D називається *локально нільпотентним* (див. [7]), якщо для кожного $f\in\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]$ існує таке $n\in\mathbb{N}$, що $D^{n+1}(f)=0$, але $D^n(f)\neq 0$. Довільне диференціювання D повністю визначається елементами $D(x_i)$. Диференціювання D називається *лінійним*, якщо $D(x_i)$ є лінійною формою. Лінійне локально нільпотентне диференціювання називається *диференціюванням Вейтценбека*. Диференціювання D називається триангульованим, якщо $D(x_i)\in\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_{i-1}]$ для довільного $i\le n$. Будь-яке триангульоване диференціювання є локально нільпотентним.

Підалгебра

$$\ker D:=\big\{f\in\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]\mid D(f)=0\big\}$$

алгебри многочленів називається *ядром* диференціювання D.

Відомо [8], що для довільного локального диференціювання D існують многочлени h такі, що $D(h)\neq 0$, але $D^2(h)=0$, тоді

$$\ker D=\mathbb{C}\big[\sigma(x_0),\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n)\big]\big[D(h)^{-1}\big]\cap\mathbb{C}[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

і елемент

$$\sigma_D(x_n)=\sum_{k=0}^{\infty}D^k(x_n)\frac{\lambda^k}{k!},\quad \text{де}\quad \lambda=-\frac{h}{D(h)},\quad D(\lambda)=-1, \tag{3}$$

належить ядру диференціювання $\ker D$.

Означення 1. *Елементи $x_0^{n-1}\sigma(x_n)$, які належать ядру $\ker\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$, будемо називати елементами Келі локально нільпотентного диференціювання Чебишова першого роду $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$.*

Означення 2. *Диференціювання алгебри многочленів $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, які визначаються за формулами*

$$D_{\mathcal{T}}(x_0) = 0, D_{\mathcal{T}}(x_n) = n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-(-1)^k\right)x_{n-k} + \frac{1-(-1)^n}{2}x_0\right),$$

$$D_{\mathcal{U}}(x_0) = 0, D_{\mathcal{U}}(x_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1+(-1)^{n-k+1}\right)(k+1)x_k,$$

будемо називати диференціюваннями Чебишова першого та другого роду відповідно.

Наведемо кілька перших значень обох диференціювань Чебишова:

$$\begin{aligned}
&D_{\mathcal{T}}(x_0) = 0, && D_{\mathcal{U}}(x_0) = 0,\\
&D_{\mathcal{T}}(x_1) = x_0, && D_{\mathcal{U}}(x_1) = 2x_0,\\
&D_{\mathcal{T}}(x_2) = 4x_1, && D_{\mathcal{U}}(x_2) = 4x_1,\\
&D_{\mathcal{T}}(x_3) = 6\,x_2 + 3\,x_0, && D_{\mathcal{U}}(x_3) = 2(3\,x_2 + x_0),\\
&D_{\mathcal{T}}(x_4) = 8\,x_3 + 8\,x_1, && D_{\mathcal{U}}(x_4) = 2(4\,x_3 + 2\,x_1),\\
&D_{\mathcal{T}}(x_5) = 10\,x_4 + 10\,x_2 + 5\,x_0, && D_{\mathcal{U}}(x_5) = 2(5\,x_4 + 3\,x_2 + x_0),\\
&D_{\mathcal{T}}(x_6) = 12\,x_5 + 12\,x_3 + 12\,x_1, && D_{\mathcal{U}}(x_6) = 2(6\,x_5 + 4\,x_3 + 2x_1),\\
&D_{\mathcal{T}}(x_7) = 14\,x_6 + 14\,x_4 + 14\,x_2 + 7\,x_0, && D_{\mathcal{U}}(x_7) = 2(7\,x_6 + 5\,x_4 + 3\,x_2 + x_0),\\
&D_{\mathcal{T}}(x_8) = 16\,x_7 + 16\,x_5 + 16\,x_3 + 16x_1, && D_{\mathcal{U}}(x_8) = 2(8\,x_7 + 6\,x_5 + 4x_3 + 2\,x_1).
\end{aligned}$$

Зрозуміло, що дані диференціювання є триангульованими, а отже, локально нільпотентними.

3. Ядро диференціювання Чебишова першого роду. В роботі [4] доведено, що k-та похідна многочленів Чебишова першого роду виражається через многочлени Чебишова першого роду таким чином:

$$D_{\mathcal{T}}^k(x_n) = 2^k\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}x_{n-k-2i} -$$

$$-[[n-k\ \mathbf{even}]]2^{k-1}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}x_0,$$

де через $x^{\underline{n}} = x(x-1)\ldots(x-n+1)$ позначено спадний факторіал, а через $[[P]]$ — символ Айверсона, що дорівнює 1, якщо P істинне, і 0 — у протилежному випадку.

Після вилучення символу Айверсона та спадного факторіала з останньої рівності отримаємо

$$D_{\mathcal{T}}^k(x_n) = 2^k\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}x_{n-k-2i} -$$

$$-\frac{1}{2}(1+(-1)^{n-k})2^{k-1}n\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\left(\frac{n-k}{2}\right)!\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}x_0.$$

Оскільки $D_{\mathcal{T}}\left(-\dfrac{x_1}{x_0}\right) = -1$, покладемо $\lambda = -\dfrac{x_1}{x_0}$. Знайдемо відображення Діксм'є даного диференціювання:

$$\sigma(x_n) = \sum_{k=0}^{n} D_{\mathcal{T}}^k(x_n)\frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= x_n + \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}2^k\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}x_{n-k-2i} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(1+(-1)^{n-k})2^{k-1}n\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}x_0\right].$$

Замінивши λ на $-\dfrac{x_1}{x_0}$, після спрощення отримаємо

$$x_0^{n-1}\sigma(x_n) = x_n x_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)^k n}{k!}\left[\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}x_{n-k-2i}x_1^k x_0^{n-1-k} - \right.$$

$$\left. - n\frac{(1+(-1)^{n-k})}{4}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}x_1^k x_0^{n-k}\right].$$

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 1. *Ядро диференціювання Чебишова першого роду* $D_{\mathcal{T}}$ *породжується такими елементами Келі*:

$$C_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= x_n x_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)^k n}{k!}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}x_{n-k-2i}x_1^k x_0^{n-1-k} - \right.$$

$$\left. -(1+(-1)^{n-k})\frac{1}{4}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}x_1^k x_0^{n-k}\right).$$

Наведемо кілька перших елементів Келі диференціювання Чебишова першого роду:

$$C_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, x_2) = -2{x_1}^2 + x_2 x_0,$$

$$C_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 8\,{x_1}^3 - 6\,x_1 x_2 x_0 - 3\,{x_0}^2 x_1 + x_3 {x_0}^2,$$

$$C_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = -24\,{x_1}^4 + 24\,{x_1}^2 x_2 x_0 + 8{x_0}^2{x_1}^2 - 8\,x_1 x_3 {x_0}^2 + x_4 {x_0}^3,$$

$$C_{\mathcal{T}}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 64\,{x_1}^5 - 80\,{x_1}^3 x_2 x_0 + 40\,{x_1}^2 x_3 {x_0}^2 -$$

$$-10\,x_1 x_4 {x_0}^3 - 10\,{x_0}^3 x_1 x_2 - 5\,{x_0}^4 x_1 + x_5 {x_0}^4.$$

Повертаючись до многочленів Чебишова першого роду, отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце такі тотожності*:

(i) $$T_n(x) + n\sum_{k=1}^{n}(-2T_1(x))^k \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{1}{n-i}\binom{n-i}{k}\binom{k+i-1}{k-1}T_{n-k-2i}(x)\right) =$$
$$= n\sum_{k=1}^{n}\left((1+(-1)^{n-k})\frac{1}{4}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}T_1(x)^k\right) + \cos\frac{\pi n}{2},$$

(ii) $$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(-2)^{n-(k+2i)}\frac{1}{n-i}\binom{n-i}{k+i}\binom{n-k-i-1}{i}T_1(x)^{n-(k+2i)}\right)T_k(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^{n-k})\frac{k(-2)^k}{(n+k)^2}\binom{\frac{n+k}{2}}{k}^2 T_1(x)^k + \frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2},$$

(iii) $$P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k(n+k-1)!}{k!2^k(n-1)!}P_{n-k}^{\left(k-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}\right)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)_n\frac{1}{n!}\cos\frac{\pi n}{2},$$

де $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *є многочленами Якобі такими, що* $\deg P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n$.

Доведення. (i) За теоремою 1 маємо

$$T_n(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)^k n}{k!}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}T_{n-k-2i}(x)T_1(x)^k -\right.$$
$$\left.-(1+(-1)^{n-k})\frac{1}{4}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}T_1(x)^k\right) = t,$$

де t — деяка стала.

Оскільки ліва частина останньої тотожності не залежить від x, для того, щоб знайти невідому сталу t, покладемо $x=0$. Тоді

$$T_n(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)^k n}{k!}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(n-i-1)^{\underline{k-1}}\binom{k+i-1}{k-1}T_{n-k-2i}(0)T_1(0)^k -\right.$$
$$\left.-(1+(-1)^{n-k})\frac{1}{4}\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}}\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1}T_1(0)^k\right) = t.$$

Враховуючи, що $T_1(x) = x$, маємо $T_1(0) = 0$, звідки $t = T_n(0)$. Використовуючи формулу явного вигляду многочленів Чебишова першого роду

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(x^2-1)^k x^{n-2k},$$

переконуємося, що $T_n(0) = 0$ для непарних n і $T_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$ для парних n. Поєднуючи обидва випадки, отримуємо

$$t = T_n(0) = \cos\frac{\pi n}{2}.$$

(ii) Використовуючи властивості дробових біноміальних коефіцієнтів та їхній зв'язок із спадним факторіалом, одержуємо

$$\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+1\right)(k-1)!} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+1\right)(k-1)!k}\frac{k}{\frac{n+k}{2}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+1\right)k!}\frac{k}{\frac{n+k}{2}} = \frac{2k}{n+k}\binom{\frac{n+k}{2}}{k},$$

$$\left(\frac{n+k}{2}-1\right)^{\underline{k-1}} = (k-1)!\binom{\frac{n+k}{2}-1}{k-1} = \frac{2k!}{n+k}\binom{\frac{n+k}{2}}{k}.$$

За формулою заміни індексів у кратних рядах [10]

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} a_{k,i}x_{n-k-2i} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} a_{n-(k+2i),i}\right)x_k,$$

враховуючи симетричність біноміальних коефіцієнтів, тотожність (i) перетворюємо таким чином:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}(-2)^{n-(k+2i)}\frac{1}{n-i}\binom{n-i}{k+i}\binom{n-k-i-1}{i}T_1(x)^{n-(k+2i)}\right)T_k(x)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^{n-k})\frac{k(-2)^k}{(n+k)^2}\binom{\frac{n+k}{2}}{k}^2 T_1(x)^k = \frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

(iii) Використовуючи формулу k-ї похідної многочленів Якобі [5]

$$\frac{d^k}{dz^k}P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1+k)}{2^k\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(z),$$

і той факт, що многочлени Чебишова першого роду є частковим випадком многочленів Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}$ при $\alpha=\beta=-1/2$,

$$T_n(x) = \frac{P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)}{P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(1)} = n!\frac{P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)}{\left(\frac{1}{2}\right)_n},$$

отримуємо вираз k-ї похідної многочленів Чебишова першого роду через многочлени Якобі:

$$\frac{d^k}{dx^k}T_n(x)=\frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}\frac{(n+k-1)!}{2^k(n-1)!}P_{n-k}^{\left(k-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Беручи до уваги, що $T_1(x)=x$, маємо таку тотожність для часткового випадку многочленів Якобі:

$$P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k(n+k-1)!}{k!2^k(n-1)!}P_{n-k}^{\left(k-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}\right)}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)_n\frac{1}{n!}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

Теорему 2 доведено.

Крім того, тотожність (ii) з попередньої теореми можна записати через узагальнену гіпергеометричну функцію.

Теорема 3. *Для многочленів Чебишова першого роду має місце тотожність*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2x)^{n-k}{}_4F_3\left[\begin{array}{c}\frac{-n+k}{2},\frac{-n+k}{2}+1,\frac{-n+k}{2}+\frac{1}{2},\frac{-n+k}{2}+\frac{1}{2}\\ -n+1,k+1,-n+1+k\end{array}\middle|\frac{4}{x^2}\right]T_k(x)=$$

$$=n\sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^{n-k})\frac{k(-2)^k}{(n+k)^2}\binom{\frac{n+k}{2}}{k}^2x^k+\cos\frac{\pi n}{2},$$

де ${}_4F_3$ *— частковий випадок узагальненої гіпергеометричної функції.*

Доведення. Позначимо вираз у дужках під знаком суми у випадку (ii) теореми 2 через a_i, тоді

$$a_i=(-2)^{n-(k+2i)}\frac{1}{n-i}\binom{n-i}{k+i}\binom{n-k-i-1}{i}x^{n-(k+2i)},$$

$$a_0=\frac{\binom{n}{k}}{n}(-2x)^{n-k},$$

і відношення a_{i+1} до a_i після спрощень набере вигляду

$$\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{(k+2\,i+1-n)^2(-n+k+2\,i)(-n+k+2\,i+2)}{4\,(-n+i+1)(k+i+1)(-n+k+i+1)(i+1)x^2}.$$

Оскільки за вказаного відношення коефіцієнтів степеневий ряд зображується через узагальнену гіпергеометричну функцію (див. [6]), запишемо відповідне зображення

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-2)^{n-(k+2i)}\frac{1}{n-i}\binom{n-i}{k+i}\binom{n-k-i-1}{i}x^{n-(k+2i)}=$$

$$=\frac{\binom{n}{k}}{n}(-2x)^{n-k}{}_4F_3\left[\begin{array}{c}\frac{-n+k}{2},\frac{-n+k}{2}+1,\frac{-n+k}{2}+\frac{1}{2},\frac{-n+k}{2}+\frac{1}{2}\\ -n+1,k+1,-n+1+k\end{array}\middle|\frac{4}{x^2}\right]=$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (-2)^{n-(k+2i)} \frac{1}{n-i} \binom{n-i}{k+i} \binom{n-k-i-1}{i} x^{n-(k+2i)}.$$

Теорему 3 доведено.

4. Ядро диференціювання Чебишова другого роду. Формула k-ї похідної многочленів Чебишова другого роду має вигляд (див. [4])

$$D_{\mathcal{U}}^k(x_n) = 2^k \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (n-i)^{\underline{k-1}} \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1) x_{n-k-2i}.$$

Оскільки $D_{\mathcal{U}}\left(-\frac{x_1}{2x_0}\right) = -1$, покладемо $\lambda = -\frac{x_1}{2x_0}$, тоді відображення Діксм'є набере вигляду

$$\sigma(x_n) = \sum_{k=0}^{n} D_{\mathcal{U}}^k(x_n) \frac{\lambda^k}{k!} = x_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} 2^k \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (n-i)^{\underline{k-1}} \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1) x_{n-k-2i}.$$

Замінивши λ на $-\frac{x_1}{2x_0}$, після спрощення отримаємо

$$x_0^{n-1}\sigma(x_n) = x_n x_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (n-i-1)^{\underline{k-1}} \times$$

$$\times \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1) x_{n-k-2i} x_1^k x_0^{n-1-k}.$$

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 4. *Ядро диференціювання Чебишова другого роду $D_{\mathcal{T}}$ породжується такими елементами Келі*:

$$C_{\mathcal{U}}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_n x_0^{n-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (n-i-1)^{\underline{k-1}} \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1) x_{n-k-2i} x_1^k x_0^{n-1-k}.$$

Наведемо кілька перших елементів Келі диференціювання Чебишова другого роду:

$$C_{\mathcal{U}}(x_0, x_1, x_2) = -{x_1}^2 + x_2 x_0,$$

$$C_{\mathcal{U}}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2\,{x_1}^3 - 3\,x_1 x_2 x_0 - \,{x_0}^2 x_1 + x_3 {x_0}^2,$$

$$C_{\mathcal{U}}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = -3\,{x_1}^4 + 6\,{x_1}^2 x_2 x_0 + {x_0}^2 {x_1}^2 - 4\,x_1 x_3 {x_0}^2 + x_4 {x_0}^3,$$

$$C_{\mathcal{U}}(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 4\,{x_1}^5 - 10\,{x_1}^3 x_2 x_0 + 10\,{x_1}^2 x_3 {x_0}^2 + 2\,{x_0}^2 x_1 {x_1}^3 -$$

$$-5\,x_1 x_4 {x_0}^3 - 3\,{x_0}^3 x_1 x_2 - \,{x_0}^4 x_1 + \,{x_0}^4 x_5.$$

Повертаючись до многочленів Чебишова другого роду, отримуємо таке твердження.

Теорема 5. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються такі рівності*:

(i) $$U_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-U_1(x))^k}{k} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-i}{k-1} \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1)\, U_{n-k-2i}(x) \right) = \cos\frac{\pi n}{2},$$

(ii) $$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (-1)^{n-(k+2i)} \frac{k+1}{i+k+1} \binom{n-i}{k+i} \binom{n-k-i-1}{i} U_1(x)^{n-(k+2i)} \right) U_k(x) = \cos\frac{\pi n}{2},$$

(iii) $$(n+1) P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k (n+k+1)!}{k! 2^k n!} P_{n-k}^{\left(k+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}(x) = \binom{n+\frac{1}{2}}{n} \cos\frac{\pi n}{2},$$

де $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *є многочленами Якобі такими, що* $\deg P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n$.

Доведення. (i) За теоремою 4 маємо

$$U_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} (n-i)^{\underline{k-1}} \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1)\, U_{n-k-2i}(x) U_1(x)^k = t$$

для деякої сталої t.

Невідому сталу t визначимо, як і у випадку многочленів Чебишова першого роду:

$$t = U_n(0) = \cos\frac{\pi n}{2}.$$

(ii) За властивістю біноміальних коефіцієнтів

$$\binom{n-i}{k-1} = \frac{k}{n-k-i+1} \binom{n-i}{k}$$

отримаємо

$$U_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \binom{n-i}{k-1} \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1)\, U_{n-k-2i}(x) (-U_1(x))^k \right) =$$

$$= U_n(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{1}{n-k-i+1} \binom{n-i}{k} \binom{k+i-1}{k-1} (n-k-2i+1)\, U_{n-k-2i}(x) (-U_1(x))^k \right).$$

Після зміни порядку підсумовування в кратних рядах [10]

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} a_{k,i} x_{n-k-2i} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} a_{n-(k+2i),i} \right) x_k,$$

використовуючи симетрію біноміальних коефіцієнтів, тотожність (i) записуємо у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^{n-2i-k}(k+1)}{i+k+1} \binom{n-i}{k+i} \binom{n-k-i-1}{i} U_1(x)^{n-2i-k} \right) U_k(x).$$

(iii) Оскільки многочлени Чебишова другого роду є частковим випадком многочленів Якобі [2] $P_n^{(\alpha,\beta)}$ при $\alpha=\beta=1/2$,

$$U_n(x)=\frac{P_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x)}{P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(1)}=\frac{(n+1)}{\binom{n+\frac{1}{2}}{n}}P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x),$$

отримаємо вираз для k-ї похідної многочленів Чебишова через многочлени Якобі:

$$\frac{d^k}{dx^k}U_n(x)=\frac{(n+k+1)!}{2^k(n+1)!}\frac{(n+1)}{\binom{n+\frac{1}{2}}{n}}P_{n-k}^{\left(k+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}(x)=$$

$$=\frac{(n+k+1)!}{2^k n!\binom{n+\frac{1}{2}}{n}}P_{n-k}^{\left(k+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Оскільки $U_1(x)=2x$, із останнього виразу одержимо тотожність для часткового випадку многочленів Якобі

$$(n+1)P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k(n+k+1)!}{k!2^k n!}P_{n-k}^{\left(k+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}(x)=\binom{n+\frac{1}{2}}{n}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

Теорему 5 доведено.

Використавши узагальнену гіпергеометричну функцію в тотожності (ii), доведемо таку теорему.

Теорема 6. *Для многочленів Чебишова другого роду має місце тотожність*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2x)^{n-k}\,{}_4F_3\left[\left.\begin{matrix}\frac{-n+k}{2},\frac{-n+k}{2}+1,\frac{-n+k}{2}+\frac{1}{2},\frac{-n+k}{2}+\frac{1}{2}\\ -n,k+2,-n+1+k\end{matrix}\,\right|\,\frac{4}{x^2}\right]U_k(x)=\cos\frac{\pi n}{2},$$

де ${}_4F_3$ — узагальнена гіпергеометрична функція.

Доведення. Позначимо вираз у дужках під знаком суми у випадку (ii) теореми 5 через a_i, тоді, враховуючи, що $U_1(x)=2x$, маємо

$$a_i=\frac{(-1)^{n-2i-k}(k+1)}{i+k+1}\binom{n-i}{k+i}\binom{n-k-i-1}{i}(2x)^{n-(k+2i)},$$

$$a_0=\binom{n}{k}(-2x)^{n-k},$$

і відношення сусідніх коефіцієнтів дорівнює

$$\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{(k+2\,i+1-n)^2(-n+k+2\,i)(-n+k+2\,i+2)}{(-n+i)(k+i+2)(-n+k+i+1)(i+1)4x^2}.$$

Використовуючи властивості узагальненої гіпергеометричної функції, маємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2i-k}(k{+}1)}{i{+}k{+}1} \binom{n-i}{k+i} \binom{n{-}k{-}i{-}1}{i} (2x)^{n-(k+2i)} =$$

$$= \binom{n}{k} (-2x)^{n-k}_{4}F_3 \left[\begin{matrix} \dfrac{-n+k}{2}, \dfrac{-n+k}{2}+1, \dfrac{-n+k}{2}+\dfrac{1}{2}, \dfrac{-n+k}{2}+\dfrac{1}{2} \\ -n, k+2, -n+1+k \end{matrix} \;\middle|\; \frac{4}{x^2} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^{n-2i-k}(k{+}1)}{i{+}k{+}1} \binom{n-i}{k+i} \binom{n{-}k{-}i{-}1}{i} (2x)^{n-(k+2i)}.$$

Теорему 6 доведено.

Література

1. L. Fox, I. B. Parker, *Chebyshev polynomials in numerical analisys*, Oxford Math. Handbooks, **3** (1968).
2. J. C. Mason, D. C. Handcomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, **3** (2002).
3. L. Bedratyuk, *Semi-invariants of binary forms and identities for Bernoulli, Euler and Hermite polynomials*, Acta Arith., **151**, 361 – 376 (2012).
4. H. Prodinger, *Representing derivatives of Chebyshev polynomials by Chebyshev polynomials and related questions,* Open Math., **15**, 1156 – 1160 (2017).
5. E. D. Rainville, *Special functions*, Macmillan Co., New York (1960).
6. L. Ronald, L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1994).
7. G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Subseries: Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, Encyclopaedia Math. Sci., **136**, № 7 (2017).
8. A. A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Nicolaus Copernicus Univ. Press, Torun (1994).
9. http://www.dymoresolutions.com/UsersManual/Appendices/ChebyshevPolynomials.pdf, 4.
10. J. J. Quaintance, H. Gould, *Combinatorial identities for Stirling numbers: the unpublished notes of H W gould*, Singapore, World Sci. Publ. (2016).

Одержано 19.02.20