DOI: 10.37863/umzh.v73i2.2383

УДК 515.1

І. В. Кузнєцова, Ю. Ю. Сорока (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПЕРШІ ЧИСЛА БЕТТІ ОРБІТ ФУНКЦІЙ МОРСА НА ПОВЕРХНЯХ

Let M be a connected compact orientable surface and let P be the real line $\mathbb{R}$ or circle S^1. The group $\mathcal{D}(M)$ of diffeomorphisms on M acts in the space of smooth mappings $C^\infty(M,P)$ by the rule $(f,h) \longmapsto f \circ h$, where $h \in \in \mathcal{D}(M)$, $f \in C^\infty(M,P)$. For $f \in C^\infty(M,P)$, let $\mathcal{O}(f)$ denote the orbit of f relative to the specified action. By $\mathcal{M}(M,P)$ we denote the set of isomorphism classes of the fundamental groups $\pi_1\mathcal{O}(f)$ of orbits of all Morse mappings $f: M \to P$.

S. I. Maksymenko and B. G. Feshchenko studied the sets of isomorphism classes $\mathcal{B}$ and $\mathcal{T}$ of groups generated by direct products and certain wreath products. In this case, they succeeded to prove the inclusions $\mathcal{M}(M,P) \subset \mathcal{B}$ under the condition that M is distinct from the 2-sphere S^2 and 2-torus T^2 and $\mathcal{M}(T^2,\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$. In the present paper, we show that these inclusions are equalities and describe some subclasses from $\mathcal{M}(M,P)$ under certain restrictions on the behavior of functions on the boundary ∂M.

We also prove that for any group $G \in \mathcal{B}$ $(G \in \mathcal{T})$ the center $Z(G)$ and the quotient group by the commutator subgroup $G/[G,G]$ are free Abelian groups of the same rank easily calculated by using the geometric properties of a Morse mapping f such that $\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq G$. In particular, this rank is the first Betti number of the orbit $\mathcal{O}(f)$ of f.

Нехай M — зв'язна компактна орієнтовна поверхня і P — дійсна пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1. Зауважимо, що група $\mathcal{D}(M)$ дифеоморфізмів M діє на просторі гладких відображень $C^\infty(M,P)$ за правилом $(f,h) \longmapsto f \circ h$, де $h \in \mathcal{D}(M)$, $f \in C^\infty(M,P)$. Для $f \in C^\infty(M,P)$ позначимо через $\mathcal{O}(f)$ його орбіту відносно вказаної дії. Нехай $\mathcal{M}(M,P)$ — множина класів ізоморфізму фундаментальних груп $\pi_1\mathcal{O}(f)$ орбіт усіх відображень Морса $f: M \to P$.

В роботах С. І. Максименка та Б. Г. Фещенка було розглянуто множини класів $\mathcal{B}$ і $\mathcal{T}$ ізоморфізму груп, що породжуються прямими добутками та певними типами вінцевих добутків, і доведено включення $\mathcal{M}(M,P) \subset \mathcal{B}$, якщо M відмінна від 2-сфери S^2 і 2-тора T^2, та $\mathcal{M}(T^2,\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$. В даній статті показано, що вказані включення є рівностями, та описано деякі підкласи в $\mathcal{M}(M,P)$ при певних обмеженнях на поведінку функцій на межі ∂M.

Також доведено, що для довільної групи $G \in \mathcal{B}$ $(G \in \mathcal{T})$ центр $Z(G)$ і фактор-група по комутанту $G/[G,G]$ є вільними абелевими групами однакового рангу, який легко обчислити із геометричних властивостей відображення Морса f такого, що $\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq G$. Зокрема, цей ранг є першим числом Бетті орбіти $\mathcal{O}(f)$ відображення f.

1. Вступ. Нехай M — компактна поверхня, $\mathcal{D}(M)$ — група C^∞-дифеоморфізмів M і P — дійсна пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1. Визначимо природну праву дію групи $\mathcal{D}(M)$ на просторі гладких відображень $C^\infty(M,P)$ за правилом $(f,h) \longmapsto f \circ h$, де $h \in \mathcal{D}(M)$, $f \in C^\infty(M,P)$. Нехай $\mathcal{O}(f) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M)\}$ — *орбіта* f відносно цієї дії, а $\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ\ h = f\}$ — *стабілізатор* f.

Наділимо простори $\mathcal{D}(M)$, $C^\infty(M,P)$ відповідними C^∞-топологіями Уітні. Позначимо через $\mathcal{D}(M,X)$ групу дифеоморфізмів M, нерухомих на замкненій підмножині $X \subset M$, а через $\mathcal{O}(f,X)$ і $\mathcal{S}(f,X)$ орбіту і стабілізатор f відносно дії $\mathcal{D}(M,X)$. Нехай також $\mathcal{O}_f(f)$ і $\mathcal{O}_f(f,X)$ позначають компоненти зв'язності f в $\mathcal{O}(f)$ і $\mathcal{O}(f,X)$ відповідно.

Оскільки $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ і $\pi_1\mathcal{O}(f)$ у точці f ізоморфні, то для спрощення позначень будемо позначати $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ і $\pi_1\mathcal{O}_f(f,X)$ через $\pi_1\mathcal{O}(f)$ і $\pi_1\mathcal{O}(f,X)$ відповідно.

Означення 1.1. *Позначимо через $\mathcal{F}(M,P)$ простір гладких відображень $f \in C^\infty(M,P)$, що задовольняють такі умови*:

(1) *відображення f набуває сталих значень на кожній компоненті зв'язності межі ∂M і не має критичних точок на ∂M*;

(2) *для кожної критичної точки z відображення f існує локальне зображення $f_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ функції f біля z таке, що $f_z - f_z(0)$ є однорідним многочленом $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ без кратних множників.*

Відображення $f \in C^\infty(M, P)$ називається *відображенням Морса*, якщо воно задовольняє умову 1 і всі його критичні точки є невиродженими. Множину всіх відображень Морса з M в P позначатимемо $\mathrm{Morse}(M, P)$. Відображення Морса f будемо називати відображенням *загального положення*, якщо f набуває різних значень у різних критичних точках.

Зауважимо, що згідно з лемою Морса кожне відображення Морса f задовольняє умову 2 з однорідними многочленами $f_z - f_z(0) = \pm x^2 \pm y^2$ для кожної критичної точки z, тому $\mathrm{Morse}(M, P) \subset \mathcal{F}(M, P)$.

Означення 1.2. *Кожному відображенню $f \in \mathcal{F}(M, P)$ можна поставити у відповідність (неперервну) функцію ε_f із множини компонент зв'язності межі ∂M у $\{\pm 1\}$, яка набуває значення -1, якщо на компоненті межі f має локальний мінімум, і $+1$, якщо на компоненті межі f має локальний максимум.*

Нехай $\mathcal{E}_M$ — множина всіх неперервних функцій $\varepsilon \colon \partial M \to \{\pm 1\}$.

Для $\varepsilon \in \mathcal{E}_M$ позначимо через $\mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$ $(\mathrm{Morse}(M, P, \varepsilon))$ підмножину класу $\mathcal{F}(M, P)$ $(\mathrm{Morse}(M, P))$ функцій f, для яких $\varepsilon_f = \varepsilon$.

Гомотопічні типи стабілізаторів та орбіт функцій із класу $\mathcal{F}(M, P)$ були обчислені у роботах С. І. Максименка [4, 5], Б. Г. Фещенка [1, 6], а для функцій Морса у роботах О. А. Кудрявцевої [7 – 10]. Зокрема, у роботі [5] показано, що якщо $M \neq S^2$ або $\mathbb{R}P^2$, то $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною*, причому якщо f є відображенням Морса загального положення, то орбіта $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \simeq \mathbb{Z}^k$ для деякого k. Якщо ж $M = S^2$ або $\mathbb{R}P^2$, то $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq \pi_i(SO(3))$ для $i \geq 2$, а якщо f є функцією загального положення, то $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k \times SO(3)$ для деякого k. Далі, О. А. Кудрявцева узагальнила ці результати і показала, що якщо M орієнтовна, а $f : M \to \mathbb{R}$ — функція Морса, то існує вільна дія деякої скінченної групи H на k-торі $(S^1)^k$ така, що $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна $(S^1)^k/H$, якщо $M \neq S^2$, і гомотопічно еквівалентна $((S^1)^k/H) \times SO(3)$, якщо $M = S^2$.

Нехай M — орієнтовна поверхня, відмінна від 2-сфери і 2-тора. Як зазначено вище, $\mathcal{O}_f(f)$ є асферичною і, зокрема, її гомотопічний тип визначається лише фундаментальною групою $\pi_1 \mathcal{O}_f(f)$. Точну алгебраїчну структуру таких груп описано в роботі [4]. Щоб сформулювати ці результати, розглянемо класи груп $\mathcal{B}$ та $\mathcal{T}$.

Класи $\mathcal{B}$ та $\mathcal{T}$. Нехай G — група і $n, m \in \mathbb{N}$. Визначимо *неефективні* праві дії $\alpha \colon G^{nm} \times \mathbb{Z}^2 \to G^{nm}$, $\beta \colon G^n \times \mathbb{Z} \to G^n$ групи $\mathbb{Z}^2$ на G^{nm} і $\mathbb{Z}$ на G^n циклічними зсувами координат за формулами

$$\alpha\big((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, (a,b)\big) = \big(g_{i+a,j+b}\big)_{i,j=1}^{n,m}, \qquad \beta\big((g_i)_{i=1}^{n}, a\big) = (g_{i+a})_{i=1}^{n},$$

де $a, b \in \mathbb{Z}$. Ці дії дозволяють ввести структури груп на декартових добутках множин $G^{nm} \times \mathbb{Z}$ та $G^n \times \mathbb{Z}$ за такими стандартними формулами:

$$(g_1, a_1, b_1) \cdot (g_2, a_2, b_2) = (\alpha(g_1, a_2, b_2) g_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2), \qquad g_1, g_2 \in G^{nm}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z},$$

$$(g_1, a_1) \cdot (g_2, a_2) = (\beta(g_1, a_2) g_2, a_1 + a_2), \qquad g_1, g_2 \in G^n, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Z}.$$

* Тобто $\pi_i \mathcal{O}_f(f) \simeq 0$ для всіх $i \geq 2$.

Отримані групи позначимо через $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$ і $G \wr_n \mathbb{Z}$ відповідно. Зауважимо, що ці групи є *вінцевими добутками* G з $\mathbb{Z}^2$ і G з $\mathbb{Z}$ відносно дій α та β.

Зазначимо, що мають місце ізоморфізми

$$G \underset{1}{\wr} \mathbb{Z} \simeq G \times \mathbb{Z}, \qquad 1 \underset{n}{\wr} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z},$$

$$G \underset{1,1}{\wr} \mathbb{Z}^2 \simeq G \times \mathbb{Z}^2, \qquad 1 \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^2.$$

Означення 1.3. *Нехай $\mathcal{B}$ — мінімальна множина класів ізоморфізму груп, що задовольняє такі умови*:

1) $1 \in \mathcal{B}$;

2) *якщо* $G_1, G_2 \in \mathcal{B}$, *то* $G_1 \times G_2 \in \mathcal{B}$;

3) *якщо* $G \in \mathcal{B}$ *і* $n \geq 1$, *то* $G \wr_n \mathbb{Z} \in \mathcal{B}$.

Нехай також $\mathcal{T}$ — множина класів ізоморфізмів груп, що складаються з груп вигляду $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$, де $G \in \mathcal{B}$ і $n, m \geq 1$.

Нехай також $\mathcal{B}^O$ — підклас $\mathcal{B}$, що складається з груп $(A \times B) \wr_n \mathbb{Z}$, де $A, B \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ і $n \geq 1$. Крім того, що $\mathcal{B}^O \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.

***Зауваження* 1.1.** Легко бачити, що G належить класу $\mathcal{B}$ $(\mathcal{T})$ тоді і тільки тоді, коли G отримується з тривіальної групи скінченним числом операцій $\times$, $\wr_n\mathbb{Z}$ (та останньою операцією $\wr_{n,m}\mathbb{Z}^2$ у випадку класу $\mathcal{T}$). Таким чином, кожну групу $G \in \mathcal{B}$ $(G \in \mathcal{T})$ можна записати як слово в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \{1, \mathbb{Z}, (,), \times, \wr_2, \wr_3, \wr_4, \ldots\}$ $(\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \{1, \mathbb{Z}, (,), \times, \wr_2, \wr_3, \ldots, \wr_{1,1}, \wr_{1,2}, \ldots\})$. Будемо називати таке слово *реалізацією* групи G в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ $(\mathcal{A}_{\mathcal{T}})$. Очевидно, реалізація не є однозначно визначеною. Наприклад, існують такі реалізації однієї і тієї ж групи:

$$\left(1 \underset{3}{\wr} \mathbb{Z}\right) \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \left(1 \underset{3}{\wr} \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = 1 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Означення 1.4. *Нехай Δ — розбиття многовиду M на компоненти зв'язності множин рівня відображення f. Фактор-простір $\Gamma_f = M \diagup \Delta$ називають графом Кронрода – Ріба відображення f.*

У статті [11] (лема 3.1) показано, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ на 2-торі граф Кронрода – Ріба Γ_f або є деревом, або має єдиний цикл.

Введемо позначення

$$\mathcal{G}_X(M, P) := \{\pi_1 \mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathcal{F}(M, P)\},$$

$$\mathcal{M}_X(M, P) := \{\pi_1 \mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathrm{Morse}(M, P)\},$$

$$\mathcal{G}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1 \mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)\},$$

$$\mathcal{M}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1 \mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathrm{Morse}(M, P, \varepsilon)\},$$

$$\mathcal{G}^\Psi := \{\pi_1 \mathcal{O}(f) \mid f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R}),\ \ \Gamma_f \text{ — дерево}\},$$

$$\mathcal{M}^\Psi := \{\pi_1 \mathcal{O}(f) \mid f \in \mathrm{Morse}(T^2, \mathbb{R}),\ \ \Gamma_f \text{ — дерево}\},$$

$$\mathcal{G}^O := \{\pi_1\mathcal{O}(f) \mid f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R}),\ \ \Gamma_f \ \text{ містить єдиний цикл}\},$$

$$\mathcal{M}^O := \{\pi_1\mathcal{O}(f) \mid f \in \mathrm{Morse}(T^2, \mathbb{R}),\ \ \Gamma_f \ \text{ містить єдиний цикл}\}.$$

Очевидно, що

$$\mathcal{M}_X(M,P) \subset \mathcal{G}_X(M,P), \qquad \mathcal{M}^\Psi \subset \mathcal{G}^\Psi,$$

$$\mathcal{M}_X(M,P,\varepsilon) \subset \mathcal{G}_X(M,P,\varepsilon), \qquad \mathcal{M}^O \subset \mathcal{G}^O.$$

У роботах [1 – 4] було отримано такі результати.

Твердження 1.1 [2]. *Нехай M — зв'язна компактна поверхня і $f \in \mathcal{F}(M,P)$. Тоді $\mathcal{O}_f(f) = \mathcal{O}_f(f, \partial M)$. Зокрема,*

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f, \partial M),$$

а тому $\mathcal{G}_{\partial M}(M,P) = \mathcal{G}(M,P)$.

Твердження 1.2. *Нехай M — зв'язна компактна орієнтовна поверхня, відмінна від 2-сфери.*

1. *Якщо M також відмінна від 2-тора, то $\mathcal{G}_{\partial M}(M,P) \subset \mathcal{B}$* [4].
2. *Якщо M — 2-тор, то*

а) $\mathcal{G}^\Psi \subset \mathcal{T}$ [1],

б) $\mathcal{G}^O \subset \mathcal{B}$ [3, 12].

Більш точні формулювання твердження 1.2 наведено у твердженнях 2.4, 4.1 і 4.2.

Основні результати. Позначимо через $Z(G)$ і $[G,G]$ центр і комутант G відповідно. Наступна теорема показує, що число символів $\mathbb{Z}$ у реалізації групи $G \in \mathcal{B}$ в алфавіті $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ (групи $G \in \mathcal{T}$ в алфавіті $\mathcal{A}_\mathcal{T}$) однозначно визначається групою G.

Теорема 1.1. *Нехай $G \in \mathcal{B}$ $(G \in \mathcal{T})$, ω — довільна реалізація G в алфавіті $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ $(\mathcal{A}_\mathcal{T})$ і $\beta_1(\omega)$ — число символів $\mathbb{Z}$ у реалізації ω. Тоді мають місце ізоморфізми*

$$Z(G) \cong G/[G,G] \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

Зокрема, число $\beta_1(\omega)$ залежить тільки від групи G.

З твердження 1.2 і теореми 1.1 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.1.** *Нехай M — зв'язна компактна орієнтовна поверхня, відмінна від 2-сфери, і $f \in \mathcal{F}(M,P)$, де $P = \mathbb{R}$ для випадку $M = T^2$. Нехай також $G = \pi_1\mathcal{O}(f)$, ω — довільна реалізація G в алфавіті $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ для $M \neq T^2$ і в алфавіті $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ для $M = T^2$, а $\beta_1(\omega)$ — кількість символів $\mathbb{Z}$ у реалізації ω. Тоді перша цілочислова група гомологій $H_1(\mathcal{O}_f(f), \mathbb{Z})$ орбіти $\mathcal{O}_f(f)$ є вільною абелевою групою рангу $\beta_1(\omega)$:*

$$H_1(\mathcal{O}_f(f), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

Зокрема, $\beta_1(\omega)$ — перше число Бетті орбіти $\mathcal{O}_f(f)$.

Доведення. Використаємо загальновідому теорему Гуревича [13], згідно з якою для кожного лінійно зв'язного топологічного простору X має місце ізоморфізм

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1 X \big/ [\pi_1 X, \pi_1 X].$$

На підставі теореми Гуревича, тверджень 1.1, 1.2 і теореми 1.1 отримуємо

$$H_1(\mathcal{O}_f(f), \mathbb{Z}) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f)/[\pi_1\mathcal{O}(f), \pi_1\mathcal{O}(f)] = G/[G,G] \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

Теорема 1.2. 1. *Нехай M — зв'язна компактна орієнтовна поверхня, відмінна від 2-тора і 2-сфери, а $\varepsilon\colon \partial M \to \{\pm 1\}$ — довільне відображення з $\mathcal{E}_M$. Тоді*:

а) *якщо $M = S^1 \times [0,1]$, а ε — стала, тобто набуває однакових значень на компонентах межі ∂M, то*

$$\mathcal{M}_{\partial A}(A, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial A}(A, P, \varepsilon) = \mathcal{B} \setminus \{1\};$$

б) *якщо $M = S^1 \times [0,1]$, а ε набуває різних значень на компонентах межі ∂M або $M \neq S^1 \times [0,1]$, то*

$$\mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{B}.$$

2. *Мають місце тотожності*

$$\mathcal{M}^{\Psi} = \mathcal{G}^{\Psi} = \mathcal{T}, \qquad \mathcal{M}^{O} = \mathcal{G}^{O} = \mathcal{B}^{O}.$$

Опишемо коротко структуру статті.

У п. 2 описано як обчислювати $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для відображень f на зв'язних компактних орієнтовних поверхнях M, відмінних від 2-тора і 2-сфери. Зокрема, наведено конструкції, які лежать в основі доведення твердження 1.2(1).

У п. 3 доведено теорему 1.2(1).

У п. 4 описано як обчислювати $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для функцій f на торі. Зокрема, наведено конструкції, які лежать в основі доведення твердження 1.2(2). Крім того, доведено теорему 1.2(2).

У п. 5 доведено теорему 5.1 про центри вінцевих добутків довільних груп A і B у випадку неефективної дії B на множині X. У теоремі 5.2 стверджується, що центр довільної групи G з класів $\mathcal{B}$ і $\mathcal{T}$ ізоморфний $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, де ω — довільна реалізація G. Ця теорема є першою частиною одного з основних результатів — теореми 1.1.

У п. 6 знайдено комутант групи $G \wr_n \mathbb{Z}$ (теорема 6.1) і фактор-групи $G \wr_n \mathbb{Z} \big/ [G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}]$ (теорема 6.2). У теоремі 6.3 стверджується, що фактор-група $G/[G,G]$, де $G \in \mathcal{B}$ $(G \in \mathcal{T})$, також ізоморфна $\mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, що є другою частиною теореми 1.1.

2. Побудова групи за заданим відображенням. У цьому пункті описано конструкції, які лежать в основі доведення твердження 1.2(1). Нехай M — поверхня і $f \in \mathcal{F}(M, P)$.

Означення 2.1. *Множини рівня f та їхні компоненти зв'язності називаються критичними, якщо вони містять хоча б одну критичну точку, і регулярними, якщо не містять.*

Означення 2.2. *Нехай X — компонента зв'язності множини рівня відображення f. Підмноговид $R \subset M$ називається f-регулярним околом X, якщо*:

1) *R є зв'язним,*

2) *компоненти зв'язності межі ∂R є компонентами зв'язності деяких регулярних множин рівня відображення f,*

3) *R містить X, а $R \setminus X$ не містить критичних точок f.*

Більш загально, нехай $X = \cup_{i=1}^{k} X_i$ — незв'язне об'єднання компонент зв'язності X_i множин рівня відображення f. Для кожного X_i, $i = 1, \ldots, k$, виберемо його f-регулярний окіл таким чином, щоб $U_i \cap U_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Тоді об'єднання $U = \cup_{i=1}^{k} U_i$ називається f-регулярним околом X.

Означення 2.3. *Нехай X — компонента зв'язності множини рівня відображення f, R_X — f-регулярний окіл X і $D_1, \ldots, D_q$ — компоненти зв'язності $\overline{M \setminus R_X}$, дифеоморфні 2-дискам. Тоді об'єднання $N_X = R_X \cup D_1 \cup \ldots \cup D_q$ будемо називати канонічним околом X.*

У статті [4] показано, що обчислення фундаментальних груп орбіт відображень із класу $\mathcal{F}(M,P)$ зводиться до обчислення таких груп для відображень, заданих на дисках і циліндрах. А саме, було отримано таке твердження.

Твердження 2.1 ([4], теорема 5.4). *Нехай M — зв'язна компактна орієнтовна поверхня з від'ємною ейлеровою характеристикою і $f \in \mathcal{F}(M,P)$. Нехай також K — об'єднання всіх неекстремальних критичних компонент множин рівня f, у яких ейлерова характеристика їхніх канонічних околів менша за нуль, R — f-регулярний окіл K і $X_1,\ldots,X_k$ — компоненти зв'язності $\overline{M \setminus R}$. Тоді*:

1) *X_i є 2-диском або циліндром для кожного i, $i=1,\ldots,k$,*

2) $\pi_1\mathcal{O}(f,\partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f,\partial M\cup R) \simeq \prod_{i=1}^{k}\pi_1\mathcal{O}(f|_{X_i},\partial X_i)$.

Для відображень на дисках та циліндрах було отримано такі результати.

Твердження 2.2 ([4], теорема 5.6). *Нехай $f \in \mathcal{F}(D^2,P)$ має єдину критичну точку z. Тоді z є локальним екстремумом, до того ж*:

1) *якщо z невироджена, то $\pi_1\mathcal{O}(f,\partial D^2)$ є тривіальною групою,*

2) *якщо z вироджена, то $\pi_1\mathcal{O}(f,\partial D^2) \simeq \mathbb{Z}$.*

Твердження 2.3 ([4], теорема 5.5). *Нехай $f \in \mathcal{F}(S^1\times[0,1],P)$. Тоді*:

1) *якщо f не має критичних точок, то $\pi_1\mathcal{O}(f,S^1\times 0)$ є тривіальною групою,*

2) $\pi_1\mathcal{O}(f,\partial(S^1\times[0,1])) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f,S^1\times 0)$,

3) *нехай M — 2-диск або циліндр, V — компонента зв'язності ∂M та $f_M \in \mathcal{F}(M,P)$; нехай також W — регулярна компонента зв'язності деякої множини рівня відображення f_M, яка розбиває M на дві компоненти зв'язності, а A і B — замикання цих компонент; більш того, нехай $h(W)=W$ для всіх $h\in\mathcal{S}(f_M,V)$; будемо вважати, що $V\subset A$; тоді A — циліндр, B — 2-диск або циліндр і має місце ізоморфізм*

$$\pi_1\mathcal{O}(f_M,\partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_M|_A,\partial A)\times\pi_1\mathcal{O}(f_M|_B,\partial B).$$

Наслідок 2.1. *Нехай $f\in\mathcal{F}(S^1\times[0,1],P)$, R — f-регулярний окіл компоненти зв'язності межі $\partial(S^1\times[0,1])$ та $A=\overline{S^1\times[0,1]\setminus R}$. Тоді*

$$\pi_1\mathcal{O}(f,\partial(S^1\times[0,1])) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_A,\partial A).$$

Введемо такі позначення:

(M,V) — одна з пар $(D^2,\partial D^2)$, $(S^1\times[0,1],S^1\times 0)$, $f\in\mathcal{F}(M,P)$.

K — „найближча" до V критична компонента зв'язності деякої множини рівня f, тобто K — єдина критична компонента така, що компонента зв'язності $M\setminus K$, яка містить V, не містить критичних точок.

R_K — f-регулярний окіл K.

$\mathbf{Z}$ — множина компонент зв'язності $\overline{M\setminus R_K}$. Оскільки $h(R_K)=R_K$ для будь-якого $h\in\mathcal{S}(f,V)$, то h переставляє елементи $\mathbf{Z}$, тобто виникає природна дія $\mathcal{S}(f,V)$ на $\mathbf{Z}$.

$\mathcal{S}(\mathbf{Z})=\{h\in\mathcal{S}(f,V) \mid h(Z)=Z$ для кожного $Z\in\mathbf{Z}\}$ — ядро неефективності дії $\mathcal{S}(f,V)$ на $\mathbf{Z}$. Таким чином, $\mathcal{S}(f,V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z})$ ефективно діє на $\mathbf{Z}$.

$\mathbf{Z}^{\mathrm{fix}}=\{X_0,X_1,\ldots,X_a\}$ — множина елементів $\mathbf{Z}$, які є інваріантними відносно дії $\mathcal{S}(f,V)$. Занумеруємо X_i так, щоб X_0 був циліндром, який містить V, а X_1 — циліндром, який містить компоненту межі $S^1\times 1$ у випадку $M=S^1\times[0,1]$. Тоді якщо $M=D^2$, то X_i будуть дисками при $i=1,\ldots,n$, а якщо $M=S^1\times[0,1]$, то при $i=2,\ldots,n$.

$\mathbf{Z}^{\mathrm{reg}}=\mathbf{Z}\setminus\mathbf{Z}^{\mathrm{fix}}=\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_b\}$.

Твердження 2.4 ([4], теорема 5.8)**.** 1. *Нехай* $\mathbf{Z}^{\text{reg}} = \varnothing$, *тобто* $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\text{fix}} = \{X_0, X_1, \ldots, X_a\}$. *Тоді*

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \prod_{i=1}^{a} \pi_1\mathcal{O}(f|_{X_i}, \partial X_i) \times \mathbb{Z}.$$

2. *Нехай* $\mathbf{Z}^{\text{reg}} = \{Y_i\}_{i=1}^{b} \neq \varnothing$. *Тоді* $\mathcal{S}(f, V)/\mathcal{S}(\mathbf{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m$ *для деякого* $m \geq 2$, *причому* $\mathbb{Z}_m$ *діє напіввільно на* $\mathbf{Z}$, *тобто вільно на* $\mathbf{Z}^{\text{reg}}$. *Тому* m *ділить* b *і ця дія має* $c = b/m$ *орбіт. Зафіксуємо будь-які* 2*-диски* $Y_1, Y_2 \ldots, Y_c$, *які належать попарно різним орбітам дії* $\mathbb{Z}_m$. *Тоді* $\mathbf{Z}^{\text{fix}} = \{X_0\}$ *або* $\mathbf{Z}^{\text{fix}} = \{X_0, X_1\}$. *Більш того, виконуються такі властивості*:

a) *якщо* $\mathbf{Z}^{\text{fix}} = \{X_0\}$, *то*

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \prod_{i=1}^{c} \pi_1\mathcal{O}(f|_{Y_i}, \partial Y_i) \wr_m \mathbb{Z};$$

b) *якщо ж* $\mathbf{Z}^{\text{fix}} = \{X_0, X_1\}$, *то*

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \prod_{i=1}^{c} \pi_1\mathcal{O}(f|_{Y_i}, \partial Y_i) \wr_m \mathbb{Z} \times \left(\pi_1\mathcal{O}(f|_{X_1}, \partial X_1)\right).$$

***Наслідок* 2.2.** *Нехай* $M = S^1 \times [0,1]$ *і* $f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$, *де* $\varepsilon \equiv 1$ *або* $\varepsilon \equiv -1$. *Тоді* $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$.

Таким чином, у статті [4] описано як саме отримати групу з класу $\mathcal{B}$ за заданим відображенням. Ми опишемо як за заданою групою $G \in \mathcal{B}$ побудувати відображення $f_1 \in \mathcal{F}(D^2, P)$ і $f_2 \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1], P)$ так, щоб $\pi_1\mathcal{O}(f_1, \partial D^2) \simeq G$ і $\pi_1\mathcal{O}(f_2, S^1 \times 0) \simeq G$.

3. Побудова відображення з заданою фундаментальною групою орбіти на поверхні.

Лема 3.1. *Нехай* $C = S^1 \times [0,1]$, $V = S^1 \times 0$, $f \in \mathcal{F}(C, P)$, $h \in \mathcal{S}(f, V)$ *і* W — *регулярна компонента зв'язності деякої множини рівня відображення* f. *Якщо* W *ізотопна до* V, *то* $h(W) = W$.

Доведення. Позначимо $h(W) = W'$. Оскільки W ізотопна до V, то W розбиває C на циліндри $A_0 \supset V$ і A_1. Нехай $h(A_0) = B_0$ і $h(A_1) = B_1$. Тоді W' розбиває C на циліндри $B_0 \supset V$ і B_1.

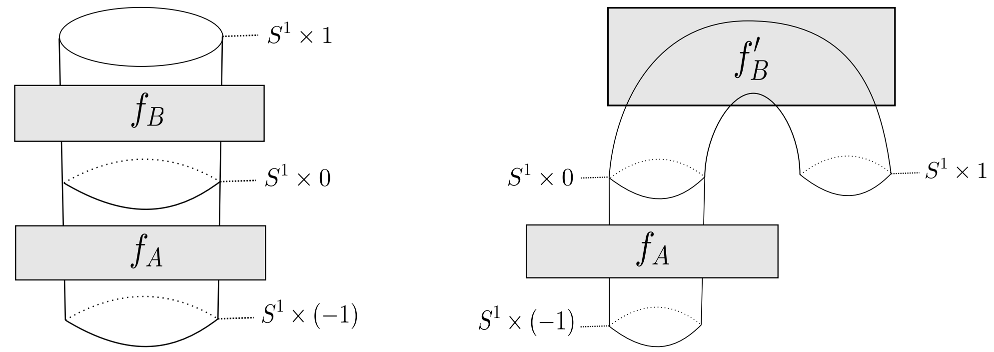
Припустимо, що $W' \neq W$. Оскільки W і W' є компонентами зв'язності множини рівня відображення f, то $W \cap W' = \varnothing$. А оскільки W і W' ізотопні до V, то або $A_0 \subset B_0$, або $B_0 \subset A_0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $A_0 \subset B_0$. Нехай $C' = B_0 \setminus A_0$. Тоді C' є циліндром, компонентами межі якого є W і W'. Оскільки $h \in \mathcal{S}(f, V)$, то W і W' належать спільній множині рівня відображення f, а отже, A_0 і $B_0 = A_0 \cup C'$ містять різну кількість критичних точок відображення f, що неможливо. Отже, $h(W) = W$.

Лему 3.1 доведено.

***Приклад* 3.1.** Нехай $G = A \times B$, де $A, B \in \mathcal{B}$, і $C = S^1 \times [-1,1]$ — циліндр. Припустимо, що для будь-яких $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{E}_C$ існують відображення $f_A \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon_1)$, $f_B \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon_2)$ ($f_A \in \in \mathrm{Morse}(C, P, \varepsilon_1)$, $f_B \in \mathrm{Morse}(C, P, \varepsilon_2)$), для яких мають місце ізоморфізми

$$\pi_1\mathcal{O}(f_A, \partial C) \simeq A, \qquad \pi_1\mathcal{O}(f_B, \partial C) \simeq B.$$

Покажемо, що тоді для будь-якого $\varepsilon \in \mathcal{E}_C$ існує відображення $f \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon)$



а *б*

Рис. 1

$(f \in \mathrm{Morse}(C, P, \varepsilon))$ таке, що

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial C) \simeq A \times B.$$

Неважко побудувати відображення $f_A \in \mathcal{F}(S^1 \times [-1, 0], P, \varepsilon_A)$, $f_B \in \mathcal{F}(S^1 \times [0, 1], P, \varepsilon_B)$, $f'_B \in \mathcal{F}(S^1 \times [0, 1], P, \varepsilon'_B)$ $(f_A \in \mathrm{Morse}(S^1 \times [-1, 0], P, \varepsilon_A)$, $f_B \in \mathrm{Morse}(S^1 \times [0, 1], P, \varepsilon_B)$, $f'_B \in \mathrm{Morse}(S^1 \times [0, 1], P, \varepsilon'_B))$, які задовольняють такі умови:

1) $\pi_1\mathcal{O}(f_A, \partial(S^1 \times [-1, 0])) \simeq A$, $\pi_1\mathcal{O}(f_B, \partial(S^1 \times [0, 1])) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f'_B, \partial(S^1 \times [0, 1])) \simeq B$;

2) $\varepsilon_A(S^1 \times (-1)) = -1$, $\varepsilon_A(S^1 \times 0) = 1$, $\varepsilon_B(S^1 \times 0) = -1$, $\varepsilon_B(S^1 \times 1) = 1$, $\varepsilon'_B(S^1 \times 0) = -1$, $\varepsilon'_B(S^1 \times 1) = -1$;

3) f_A, f_B і f'_B збігаються з проекцією $\varphi(x, t) = t$ в околі $S^1 \times 0$.

Визначимо відображення $g \in \mathcal{F}(C, P)$ і $g' \in \mathcal{F}(C, P)$ $(g \in \mathrm{Morse}(C, P)$ і $g' \in \mathrm{Morse}(C, P))$, зображені на рис. 1, так, щоб

$$g|_{S^1 \times [-1,0]} = g'|_{S^1 \times [-1,0]} = f_A, \qquad g|_{S^1 \times [0,1]} = f_B, \quad g'|_{S^1 \times [0,1]} = f'_B.$$

Тоді

$$\varepsilon_g(S^1 \times (-1)) = -1, \qquad \varepsilon_{g'}(S^1 \times (-1)) = -1,$$
$$\varepsilon_g(S^1 \times 1) = 1, \qquad \varepsilon_{g'}(S^1 \times 1) = -1.$$

Аналогічно $-g \in \mathcal{F}(C, P)$, $-g' \in \mathcal{F}(C, P)$ $(-g \in \mathrm{Morse}(C, P)$, $-g' \in \mathrm{Morse}(C, P))$ і $\varepsilon_{-g} = -\varepsilon_g$, $\varepsilon_{-g'} = -\varepsilon_{g'}$. Тоді за твердженням 2.3(3) мають місце ізоморфізми

$$\pi_1\mathcal{O}(g, \partial C) \simeq \pi_1\mathcal{O}(g', \partial C) \simeq \pi_1\mathcal{O}(-g, \partial C) \simeq \pi_1\mathcal{O}(-g', \partial C) \simeq A \times B.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon \in \mathcal{E}_C$ існує відображення $f \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon)$ $(f \in \mathrm{Morse}(C, P, \varepsilon))$ таке, що

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial C) \simeq A \times B.$$

***Приклад* 3.2.** Нехай $G = A \wr_n \mathbb{Z}$, де $A \in \mathcal{B}$, і $C = S^1 \times [0, 1]$ — циліндр. Припустимо, що існує відображення $f_{D_A} \in \mathcal{F}(D_A, P)$ $(f_{D_A} \in \mathrm{Morse}(D_A, P))$ з диска D_A в P, для якого $\pi_1\mathcal{O}(f_{D_A}, \partial D_A) \simeq A$.

Тоді для довільного $\varepsilon \in \mathcal{E}_C$ неважко побудувати відображення $f \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon)$ $(f \in \mathrm{Morse}(C, P, \varepsilon))$ таке, що:

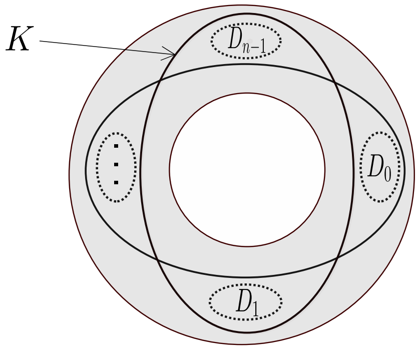


Рис. 2

1) f має критичний рівень K, показаний на рис. 2, на якому лежать n невироджених сідлових точок;

2) всі інші критичні точки містяться в дисках $D_0, \ldots, D_{n-1}$;

3) $\pi_1\mathcal{O}(f_{D_i}, \partial D_i) \simeq A$, $i = 0, \ldots, n-1$;

4) існує ізоморфізм $h \in \mathcal{S}(f, S^1 \times 0)$ такий, що $h(D_i) = D_{(i+1) \bmod n}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Тоді за твердженням 2.4 має місце ізоморфізм $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial C) \simeq A \wr_n \mathbb{Z}$.

Нагадаємо, що для будь-якої функції $\varepsilon \in \mathcal{E}_M$ визначено класи

$$\mathcal{G}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1\mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{M}_X(M, P, \varepsilon) := \{\pi_1\mathcal{O}(f, X) \mid f \in \mathrm{Morse}(M, P, \varepsilon)\}. \tag{2}$$

Теорема 1.2. 1. *Нехай M — зв'язна компактна орієнтовна поверхня, відмінна від 2-тора і 2-сфери, а $\varepsilon \in \mathcal{E}_M$. Тоді*:

1) *якщо M — циліндр і $\varepsilon \equiv 1$ або $\varepsilon \equiv -1$, то* $\mathcal{M}_{\partial A}(A, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial A}(A, P, \varepsilon) = \mathcal{B} \setminus \{1\}$,

2) *якщо M — циліндр і $\varepsilon(\partial M) = \{\pm 1\}$ або M не є циліндром, то*

$$\mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) = \mathcal{B}.$$

Доведення. Включення $\mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) \subset \mathcal{B}$, а отже і $\mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon) \subset \mathcal{B}$, безпосередньо випливають з твердження 2.4. Покажемо включення в інший бік для випадку 2 і включення $\mathcal{B} \setminus \{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, $\mathcal{B} \setminus \{1\} \subset \mathcal{M}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$ для випадку 1.

1. Покажемо, що $\{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де $M = S^1 \times [0,1]$ — циліндр і $\varepsilon(\partial M) = \{\pm 1\}$.

Нехай $f \in \mathcal{F}(S^1 \times [0,1], P, \varepsilon)$ не має критичних точок. Тоді $\varepsilon(\partial(S^1 \times [0,1])) = \{\pm 1\}$ та за твердженням 2.3(1), (2) маємо $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial(S^1 \times [0,1])) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f, S^1 \times 0) \simeq \{1\}$.

2. Покажемо, що $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ і $\mathcal{B} \setminus \{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M — циліндр.

Нехай $G \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$. Оскільки $1 \underset{n}{\wr} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ і $B \times 1 = B$ для довільної $B \in \mathcal{B}$, то існує реалізація ω групи G у вигляді

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n,$$

де кожна група G_i має вигляд $G_i = \mathbb{Z}$ або $G_i = H_i \wr_{k_i} \mathbb{Z}$, $H_i \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$.

Позначимо через $s(\omega)$ сумарну кількість символів $\times$, $\wr_n$ для всіх $n \geq 1$ у реалізації ω. Доведення будемо проводити індукцією по $s(\omega)$.

База індукції. *Побудова відображення з* D^2 *в* P *за тривіальною групою*. Нехай $f \in \in \mathcal{F}(D^2, P)$ має єдину невироджену критичну точку. Тоді за твердженням 2.2(1) маємо $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D^2) \simeq \{1\}$.

Побудова відображення з D^2 *в* P *за групою* $\mathbb{Z}$. Нехай $f \in \mathcal{F}(D^2, P)$ має єдину вироджену критичну точку. Тоді за твердженням 2.2(2) маємо $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D^2) \simeq \mathbb{Z}$.

Побудова відображення з циліндра C *в* P *за групою* $\mathbb{Z}$. Нехай $f \in \mathcal{F}(D^2, P)$ має єдину невироджену критичну точку, тобто $\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D^2) \simeq \{1\}$. Із прикладу 3.2 при $A = \{1\}$ випливає, що для довільного $\varepsilon' \in \mathcal{E}_C$ можна побудувати відображення $f_C \in \mathcal{F}(C, P, \varepsilon')$, для якого $\pi_1\mathcal{O}(f_C, \partial C) \simeq 1 \wr_n \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

Індукційне припущення. Припустимо, що якщо $s(\omega) < n$, то $G \in \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ і $G \in \in \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M — циліндр.

Індукційний перехід. Покажемо, що якщо $s(\omega) = n$, то $G \in \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ і $G \in \in \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M — циліндр. Для випадку, коли M — циліндр, це випливає з прикладів 3.1, 3.2. Покажемо, що для випадку з диском це також виконується.

Маючи відображення $f_{C'} \in \mathcal{F}(C', P, \varepsilon')$ з циліндра C' в P, де $\varepsilon' \in \mathcal{E}_{C'}$, та вміючи будувати відображення з диска в P за тривіальною групою, можна побудувати відображення $f \in \mathcal{F}(D, P)$ з диска D в P таке, що

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_{C'}, \partial C').$$

А саме, можемо визначити відображення $f \in \mathcal{F}(D, P)$ з диска D радіуса 2 в P таке, що:

1) $f(\widehat{D}) = [1, 2]$, $f(D \setminus \widehat{D}) = [0, 1]$, де $\widehat{D} \subset D$ — диск радіуса 1 із центром у центрі диска D,
2) $\pi_1\mathcal{O}(f|_{\widehat{D}}, \partial(\widehat{D})) \simeq \{1\}$, $\pi_1\mathcal{O}(f|_{D \setminus \widehat{D}}, \partial(D \setminus \widehat{D})) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_{C'}, \partial C')$.

Зауважимо, що прообраз $f^{-1}(1) = S^1 \times 1$ є інваріантним відносно будь-якого $h \in \mathcal{S}(f, \partial D)$. Тоді за твердженням 2.3(3)

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial D) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{D \setminus \widehat{D}}, \partial(D \setminus \widehat{D}) \times \pi_1\mathcal{O}(f_{\widehat{D}}, \partial\widehat{D}) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f_{C'}, \partial C') \times \{1\}.$$

Отже, $G \in \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P, \varepsilon)$ і $G \in \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$, де M — циліндр.

3. Нехай поверхня M відмінна від диска та циліндра. Покажемо, що $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M, P, \varepsilon)$.

Побудуємо відображення $f \in \mathcal{F}(M, P, \varepsilon)$, яке має хоча б одну точку локального максимуму, всі сідлові точки якого лежать на спільній компоненті зв'язності K деякої множини рівня відображення f і всі локальні екстремуми якого є невиродженими. Оскільки $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}_{\partial D^2}(D^2, P)$, то для $G \in \mathcal{B}$ існує відображення $f_{D^2} \in \mathcal{F}(D^2, P)$ з диска D^2 в P таке, що $\pi_1\mathcal{O}(f_{D^2}, \partial D^2) \simeq G$. Змінимо відображення f у f-регулярному околі D_m деякої точки локального максимуму таким чином, щоб $\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_m}, \partial D_m) \simeq G$. Нехай N — канонічний окіл компоненти K, який містить усі компоненти зв'язності межі ∂M. Тоді $N = M$, а отже, N має від'ємну ейлерову характеристику. Нехай також R — f-регулярний окіл компоненти K, який містить усі компоненти зв'язності межі ∂M і для якого D_m є компонентою зв'язності замикання $\overline{M \setminus R}$. Всі інші компоненти зв'язності $\overline{M \setminus R}$ також є дисками, позначимо їх через $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Тоді за твердженням 2.1 має місце ізоморфізм

$$\pi_1\mathcal{O}(f, \partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_m}, \partial D_m) \times \prod_{i=1}^{n} \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_i}, \partial D_i).$$

Оскільки за твердженням 2.2 для кожного $i = 1, \ldots, n$ маємо $\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_i}, \partial D_i) \simeq \{1\}$, то

$$\pi_1\mathcal{O}(f,\partial M) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_m},\partial D_m) \simeq G.$$

4. Легко бачити, що справджуються не тільки доведені включення, а й аналогічні включення для фундаментальних груп орбіт функцій Морса, а саме:

1) $\{1\} \subset \mathcal{M}_{\partial M}(M,P,\varepsilon)$, де $M = S^1 \times [0,1]$ — циліндр і $\varepsilon(\partial M) = \{\pm 1\}$,

2) $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{\partial D^2}(D^2,P,\varepsilon)$ і $\mathcal{B}\setminus\{1\} \subset \mathcal{G}_{\partial M}(M,P,\varepsilon)$, де M — циліндр,

3) $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{\partial M}(M,P,\varepsilon)$, де поверхня M відмінна від диска і циліндра.

Для цього достатньо повторити попередні міркування, змінивши відображення за групою $\mathbb{Z}$ з D^2 в P таким чином.

Побудова відображення за групою $\mathbb{Z}$ з D^2 в P. Нехай $f \in \mathrm{Morse}(D_A,P)$ — відображення з 2-диска D_A в P, яке має єдину невироджену критичну точку, тобто $\pi_1\mathcal{O}(f,\partial D_A) \simeq \{1\}$. Аналогічно до прикладу 3.2 при $A = \{1\}$ можна побудувати відображення $f_{D^2} \in \mathrm{Morse}(D^2,P)$ з диска D^2 в P, для якого $\pi_1\mathcal{O}(f_{D^2},\partial D^2) \simeq 1 \wr_n \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$.

Теорему 1.2(1) доведено.

***Зауваження* 3.1.** З твердження 2.3(1), (3) випливає, що у випадку, коли M — циліндр і $\varepsilon \equiv 1$ або $\varepsilon \equiv -1$, можна побудувати $f \in \mathcal{F}(M,P,\varepsilon)$ $(f \in \mathrm{Morse}(M,P,\varepsilon))$ так, щоб $f(\partial M) = \mathrm{const}$.

4. Побудова групи за заданою функцією на торі. Нехай $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — 2-тор, $f \in \mathcal{F}(T^2,\mathbb{R})$ і Γ_f — граф Кронрода – Ріба функції f. Позначимо через $p_f : T^2 \to \Gamma_f$ проекцію T^2 на Γ_f. Нехай також $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$ — компонента зв'язності тотожного відображення id_{T^2} в $\mathcal{D}(T^2)$ і $\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$.

Нагадаємо, що Γ_f або є деревом, або містить єдиний цикл. У твердженнях 4.1, 4.2 описано структуру $\pi_1\mathcal{O}(f)$ для обох випадків.

1. Нехай Γ_f **є деревом.** Тоді згідно з лемою 2.4 [1] існує єдиний критичний рівень K функції f такий, що для f-регулярного околу N_K рівня K, інваріантного відносно $\mathcal{S}'(f)$, всі компоненти зв'язності замикання $\overline{T^2 \setminus N_K}$ є 2-дисками. Такі 2-диски позначимо через $D_1,\ldots,D_b$, а рівень K будемо називати спеціальним. Оскільки N_K є інваріантним відносно $\mathcal{S}'(f)$, то диски $D_1,\ldots,D_b$ також є інваріантними відносно $\mathcal{S}'(f)$. Тому кожне $h \in \mathcal{S}'(f)$ індукує перестановку $\rho(h)$ дисків $D_1,\ldots,D_b$. Таким чином, маємо гомоморфізм $\rho\colon \mathcal{S}'(f) \to \Sigma\{D_i\}_{i=1}^b$ з $\mathcal{S}'(f)$ у групу перестановок дисків $D_1,\ldots,D_b$. Нехай $G_K := \rho(\mathcal{S}'(f))$ — підгрупа в $\Sigma\{D_i\}_{i=1}^b$.

Твердження 4.1 [1, 6, 14]. *Мають місце такі властивості*:

1) *для деяких $n,m \geq 1$ має місце ізоморфізм $G_K \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$,*

2) *існує переріз $s\colon G_K \to \mathcal{S}'(f)$ гомоморфізму ρ, тобто такий гомоморфізм, що $\rho \circ s = \mathrm{id}_{G_K}$,*

3) *підгрупа $s(G_K) \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ вільно діє на T^2, а отже і на $D_1,\ldots,D_b$; нехай r — кількість орбіт цієї дії, тоді кожна орбіта складається з однакової кількості дисків mn, а отже, $b = mnr$,*

4) *у кожній орбіті вільної дії $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ виберемо по одному диску та позначимо їх $D_1,\ldots,D_r$; тоді має місце ізоморфізм*

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \left(\prod_{i=1}^{r} \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_i},\partial D_i)\right) \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2.$$

2. Нехай Γ_f **містить єдиний цикл.** Виберемо довільну точку x на довільному ребрі цього циклу. Тоді $C = p_f^{-1}(x)$ є регулярною компонентою зв'язності деякої множини рівня функції f, яка не розбиває T^2. Нехай

$$\mathcal{C} = \{h(C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\} = \{C_0 = C, C_1, \ldots, C_{n-1}\}.$$

Оскільки кожна C_i, $i = 0, \ldots, n-1$, не розбиває тор і всі C_i попарно не перетинаються, то вони є попарно ізотопними. Отже, їх можна перепозначити так, щоб у випадку $n \geq 2$ для кожного $i = 0, \ldots, n-1$ криві C_i та $C_{(i+1) \bmod n}$ обмежували циліндр, який не містить інших кривих із $\mathcal{C}$.

Нехай R_{C_i} — f-регулярні околи C_i, $i = 0, \ldots, n-1$, такі, що

$$\{h(R_C) \mid h \in \mathcal{S}'(f)\} = \{R_{C_0}, R_{C_1}, \ldots, R_{C_{n-1}}\}.$$

Тоді компоненти зв'язності замикання $\overline{T^2 \setminus \cup_{i=0}^{n-1} R_{C_i}}$ — циліндри. Позначимо довільний такий циліндр через Q.

Твердження 4.2 [3, 12]**.** 1. *Існує $h \in \mathcal{S}'(f)$ такий, що*:

a) *h не має нерухомих точок*,

b) $h^n = \mathrm{id}_{T^2}$,

c) $h(C_i) = C_{(i+1) \bmod n}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Таким чином, h індукує вільну дію $\mathbb{Z}_n$ на T^2, яка зберігає f, є інваріантною та циклічно переставляє компоненти C_i, $i = 0, \ldots, n-1$. Звідси маємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \mathbb{R} \\ & T^2/\mathbb{Z}_n \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd},$$

де фактор-відображення $p\colon T^2 \to T^2/\mathbb{Z}_n$ є n-листим накриттям тора $T^2/\mathbb{Z}_n$, а функція $g \in \mathcal{F}(T^2/\mathbb{Z}_n, \mathbb{R})$ має граф Кронрода – Ріба з єдиним циклом.

2. *Має місце ізоморфізм*

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \wr_n \mathbb{Z}.$$

Нагадаємо, що $\mathcal{T}$ — множина класів ізоморфізмів груп, що складаються з груп вигляду $G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$, де $G \in \mathcal{B}$ і $n, m \geq 1$, а $\mathcal{B}^O$ — підклас $\mathcal{B}$, що складається з груп $(A \times B) \wr_n \mathbb{Z}$, де $A, B \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ і $n \geq 1$.

Теорема 1.2. 2. *Мають місце тотожності*

$$\mathcal{M}^\Psi = \mathcal{G}^\Psi = \mathcal{T}, \qquad \mathcal{M}^O = \mathcal{G}^O = \mathcal{B}^O.$$

Доведення. З твердження 4.1 випливають включення

$$\mathcal{G}^\Psi \subset \mathcal{T}, \qquad \mathcal{M}^\Psi \subset \mathcal{T}.$$

1. Покажемо, що мають місце включення $\mathcal{G}^O \subset \mathcal{B}^O$, $\mathcal{M}^O \subset \mathcal{B}^O$.

Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ — така функція на торі, що Γ_f містить єдиний цикл. Тоді за твердженням 4.2 маємо ізоморфізм $\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \wr_n \mathbb{Z}$, де $Q \subset T^2$ — циліндр, визначений вище. Позначимо через ∂Q^{-1} і ∂Q^1 компоненти зв'язності межі ∂Q. Тоді $f(\partial Q^{-1}) < f(C)$ і $f(\partial Q^1) < f(C)$, де $C \in \mathcal{C}$. Зауважимо, що $\varepsilon_{f|_Q}(\partial Q) = \pm 1$. Тому за теоремою про середнє значення існує компонента зв'язності W множини рівня відображення f, для якої $f(W) = f(C)$. Позначимо через C_{-1} і C_1 циліндри, на які W розбиває Q. Тоді за твердженням 2.3(3)

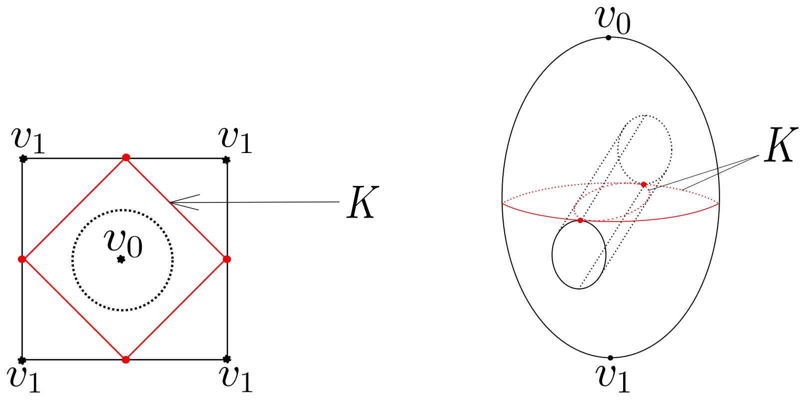


Рис. 3

маємо ізоморфізм

$$\pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_{C_{-1}}, \partial C_{-1}) \times \pi_1\mathcal{O}(f|_{C_1}, \partial C_1),$$

причому $\varepsilon_{f|_{C_{-1}}}(\partial C_{-1}) \equiv -1$ і $\varepsilon_{f|_{C_1}}(\partial C_1) \equiv 1$. З наслідку 2.2 випливає, що $\pi_1\mathcal{O}(f|_{C_{-1}}, \partial C_{-1})$, $\pi_1\mathcal{O}(f|_{C_1}, \partial C_1) \in \mathcal{B}^O$. Отже, $\mathcal{G}^O \subset \mathcal{B}^O$, звідки $\mathcal{M}^O \subset \mathcal{B}^O$.

2. Покажемо, що мають місце включення

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{G}^\Psi, \qquad \mathcal{T} \subset \mathcal{M}^\Psi, \qquad \mathcal{B}^O \subset \mathcal{G}^O, \qquad \mathcal{B}^O \subset \mathcal{M}^O.$$

Для групи G побудуємо функцію $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ $(f \in \mathrm{Morse}(T^2, \mathbb{R}))$, для якої $\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq G$.

Γ_f є деревом. Нехай $G \in \mathcal{T}$. Тоді $G = A \wr_{m,n} \mathbb{Z}$, де $A \in \mathcal{B}$, $n, m \geq 1$.

Побудуємо функцію $f_0 \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ $(f_0 \in \mathrm{Morse}(T^2, \mathbb{R}))$, зображену на рис. 3, яка має дві сідлові критичні точки на критичному рівні K, один невироджений максимум v_0 і один невироджений мінімум v_1. Тоді для інваріантного відносно $\mathcal{S}'(f_0)$ f_0-регулярного околу R_K рівня K замикання $\overline{T^2 \setminus R_K}$ складається з двох 2-дисків: диска D_0, який містить точку максимуму, і диска D_1, який містить точку мінімуму. Змінимо функцію f_0 у f_0-регулярному околі D_0 точки максимуму таким чином, щоб $\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_0}, \partial D_0) \simeq A$. Це можна зробити з огляду на теорему 1.2(1).

Візьмемо mn-листе накриття $p\colon T^2 \to T^2$, задане формулою $p(x, y) = (mx \bmod 1, ny \bmod 1)$, де $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, і зображене на рис. 4 при $m = 3$, $n = 4$. Нехай $p^{-1}(D_0) = \{D_0^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$, $p^{-1}(D_1) = \{D_1^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ — множини компонент зв'язності прообразів дисків D_0 і D_1. Тоді функція $f : T^2 \to \mathbb{R}$, визначена за формулою $f := f_0 \circ p$, є шуканою. Дійсно, легко бачити, що Γ_f — дерево і K — спеціальний рівень. Тоді за твердженням 4.1 для деяких $k, l \geq 1$ маємо $G_K \simeq \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$.

Покажемо, що $G_K \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Зауважимо, що дифеоморфізми тора $h_{i,j}(x, y) = \Big(x + \dfrac{i}{m} \bmod 1, y + \dfrac{j}{n} \bmod 1\Big)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, належать $\mathcal{S}'(f)$. Тому група цих дифеоморфізмів $\mathcal{H} = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ є підгрупою $\mathcal{S}'(f)$.

Зазначимо, що $\rho(\mathcal{H})$ ін'єктивно вкладається в G_K і множини $\mathbb{D}_0 = \{D_0^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathbb{D}_1 = \{D_1^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ є інваріантними відносно $\mathcal{S}'(f)$. Оскільки за твердженням 4.1 група $s(G_K)$ діє

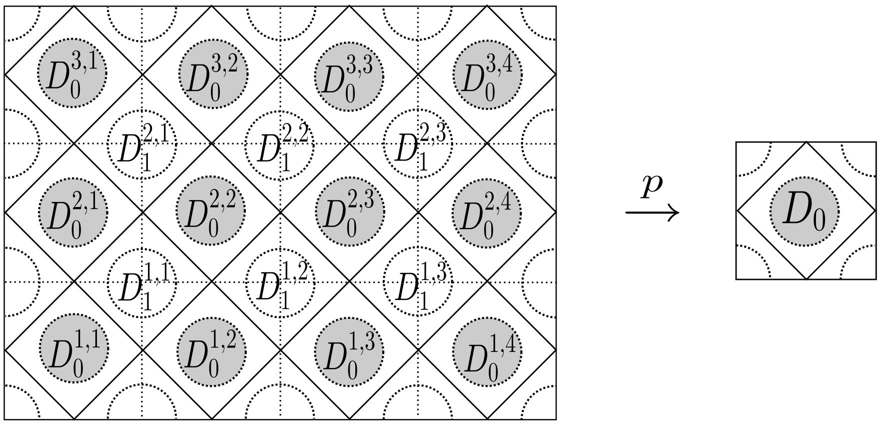


Рис. 4

вільно на $\{D_0^{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$, то кількість елементів у $s(G_K)$ і G_K збігається з кількістю дисків у орбіті диска $D_0^{1,1}$, тобто дорівнює mn. Кількість елементів у $\rho(\mathcal{H})$ також дорівнює mn. Тому $G_K = \rho(\mathcal{H}) \simeq H \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Тоді за твердженнями 4.1, 2.2 маємо

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \Big(\pi_1\mathcal{O}(f|_{D_0^{1,1}}) \times \pi_1\mathcal{O}(f|_{D_1^{1,1}})\Big) \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \simeq$$
$$\simeq (A \times 1) \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2 \simeq A \wr_{m,n} \mathbb{Z}^2.$$

Γ_f не є деревом. Нехай $G \in \mathcal{B}^O$. Тоді $G = (A \times B) \wr_n \mathbb{Z}$, де $A, B \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ і $n \geq 1$. Побудуємо функцію $g \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ $(g \in \mathrm{Morse}(T^2, \mathbb{R}))$, яка має дві сідлові критичні точки, один максимум і один мінімум. Нехай x — деяка точка на ребрі цього циклу, $C = p_f^{-1}(x)$ — відповідна регулярна компонента зв'язності деякої множини рівня функції g і C' — друга компонента зв'язності цієї множини рівня. Позначимо через R_C і $R_{C'}$ регулярні околи компонент C і C' відповідно. Тоді компоненти зв'язності C_A і C_B замикання $\overline{T^2 \setminus (R_C \cup R_{C'})}$ є циліндрами та $g|_{C_A} \in \mathcal{F}(C_A, \mathbb{R}, +1)$, $g|_{C_B} \in \mathcal{F}(C_B, \mathbb{R}, -1)$, причому $g(\partial C_A) = a$, $g(\partial C_B) = b$ для деяких $a, b \in \mathbb{R}$.

За теоремою 1.2(1) та зауваженням 3.1 можна вибрати такі функції $f_A \in \mathcal{F}(C_A, \mathbb{R}, -1)$, $f_B \in \mathcal{F}(C_B, \mathbb{R}, +1)$ $(f_A \in \mathrm{Morse}(C_A, \mathbb{R}, -1),\ f_B \in \mathrm{Morse}(C_B, \mathbb{R}, +1))$, для яких

$$\pi_1\mathcal{O}(f_A) = A, \qquad \pi_1\mathcal{O}(f_B) = B,$$

а якщо замінити $g|_{C_A}$, $g|_{C_B}$ на f_A, f_B відповідно, то $g \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ $(g \in \mathrm{Morse}(T^2, \mathbb{R}))$.

Візьмемо n-листе накриття $p\colon T^2 \to T^2$, задане формулою $p(x, y) = (nx \bmod 1, y)$, де $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Зауважимо, що всі компоненти зв'язності замикання $\overline{T^2 \setminus p^{-1}(R_C)}$ є циліндрами. Позначимо довільний такий циліндр через Q.

Тоді за твердженням 4.2 функція $f := g \circ p$ є шуканою, тобто $f \in \mathcal{F}(T^2, \mathbb{R})$ $(f \in \in \mathrm{Morse}(T^2, \mathbb{R}))$, Γ_f містить єдиний цикл і

$$\pi_1\mathcal{O}(f) \simeq \pi_1\mathcal{O}(f|_Q, \partial Q) \wr_n \mathbb{Z} \overset{\text{насл. } 2.1}{\simeq} (A \times B) \wr_n \mathbb{Z}.$$

Теорему 1.2(2) доведено.

5. Центри вінцевих добутків. Нехай A і B — дві групи. Припустимо, що B діє на множині X. Іншими словами, ми маємо гомоморфізм φ з B у групу перестановок $\Sigma(X)$. Для $b \in B$ позначимо через $\varphi_b \colon X \to X$ відповідну перестановку. Нехай також $\mathrm{Map}(X, A)$ — група всіх відображень $f \colon X \to A$ відносно операції поточкового множення. Тоді група B діє на $\mathrm{Map}(X, A)$ за таким правилом: результат дії $b \in B$ на $f \in \mathrm{Map}(X, A)$ є композицією

$$f \circ \varphi_b \colon X \longrightarrow X \longrightarrow A.$$

Напівпрямий добуток $\mathrm{Map}(X, A) \rtimes_\varphi B$ відносно цієї дії називається *необмеженим вінцевим добутком* A і B та позначається $AWr_X B$. Таким чином, це прямий добуток $\mathrm{Map}(X, A) \times B$ з операцією множення, визначеною формулою

$$(f_1, b_1) \cdot (f_2, b_2) = \big((f_1 \circ \varphi_{b_2}) \cdot f_2, b_1 \cdot b_2\big)$$

для $(f_1, b_1), (f_2, b_2) \in \mathrm{Map}(X, A) \rtimes_\varphi B$.

Позначимо через $\sigma(f)$ носій функції $f \in \mathrm{Map}(X, A)$:

$$\sigma(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq e, \ \text{ де } \ e \ \text{— одиниця групи } \ A\},$$

а через $\mathrm{Map}_{\mathrm{fin}}(X, A)$ підмножину $\mathrm{Map}(X, A)$, що складається лише з функцій зі скінченним носієм $|\sigma(f)| < \infty$. Напівпрямий добуток $\mathrm{Map}_{\mathrm{fin}}(X, A) \rtimes_\varphi B$ називається *обмеженим вінцевим добутком*, позначатимемо його $Awr_X B$.

***Зауваження* 5.1.** Якщо $X = \mathbb{Z}_n$ і $B = \mathbb{Z}$ діє на X циклічними зсувами, то $AWr_{\mathbb{Z}_n}\mathbb{Z}$ є вінцевим добутком $A \wr_n \mathbb{Z}$. Якщо ж $X = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ і $B = \mathbb{Z}^2$ діє на X 2-циклічними зсувами, то $AWr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}\mathbb{Z}^2$ є вінцевим добутком $A \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$.

Центр групи A позначимо через $Z(A)$. Нехай $\tilde{D}(A)$ позначає підгрупу $\mathrm{Map}(X, Z(A))$ функцій $h \colon X \to Z(A)$, сталих на кожній орбіті дії B на X, а $D(A)$ — підгрупу $\mathrm{Map}_{\mathrm{fin}}(X, Z(A))$ функцій з такою ж властивістю.

З теореми 4.2 [15] випливає, що мають місце ізоморфізми

$$Z(AWr_X B) \cong \tilde{D}(A), \qquad Z(Awr_X B) \cong D(A),$$

де група B діє на X ефективно.

У випадку неефективної дії B на X для довільних груп A, B отримуємо більш загальну ситуацію. У цьому пункті ми узагальнюємо теорему 4.2 [15] і розглядаємо випадок неефективної дії B на X.

Позначимо множину всіх орбіт B на X через $\mathcal{O}$, а множину скінченних орбіт через $\mathcal{O}_{\mathrm{fin}}$. Нагадаємо, що прямий добуток множин V, індексований нескінченною множиною, складається з усіх нескінченних послідовностей елементів з V, а пряма сума — лише з послідовностей зі скінченним числом елементів, відмінних від нуля.

Теорема 5.1. *Мають місце ізоморфізми*

$$Z(AWr_X B) = \tilde{D}(A) \times \big(\ker\varphi \cap Z(B)\big) \cong \left(\prod_{\lambda \in \mathcal{O}} Z(A)\right) \times \big(\ker\varphi \cap Z(B)\big), \tag{3}$$

$$Z(Awr_X B) = D(A) \times \big(\ker\varphi \cap Z(B)\big) \cong \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{O}_{\mathrm{fin}}} Z(A)\right) \times \big(\ker\varphi \cap Z(B)\big). \tag{4}$$

Нехай $\tilde{Q}$ — підгрупа AWr_XB, елементи (f,l) якої задовольняють такі умови:

a) f є сталою на кожній орбіті B на X, тобто $f(x)=a_\lambda$ для будь-якого $x\in O_\lambda$, $O_\lambda\in\mathcal{O}$, а кожен a_λ є елементом центра $Z(A)$,

b) $l\in\ker\varphi\cap Z(B)$, де $Z(B)$ — центр B.

Очевидно, якщо елемент з AWr_XB задовольняє умови a) і b), то елемент належить центру, тому $\tilde{Q}\subset Z(AWr_XB)$.

Для будь-якого $y\in X$ і $c\in A$ визначимо відображення $g_{y,c}\in\mathrm{Map}(X,A)$ за формулою

$$g_{y,c}(x)=\begin{cases} c, & \text{якщо} \quad x=y,\\ e, & \text{якщо} \quad x\neq y.\end{cases} \tag{5}$$

Нехай S — множина елементів $(g_{y,c},p)$ з AWr_XB, де $p\in B$. Множина S є також підмножиною Awr_XB. Позначимо через $\tilde{C}(S)$ і $C(S)$ централізатор множини S у AWr_XB і централізатор множини S у Awr_XB відповідно. Зрозуміло, що $Z(AWr_XB)\subset\tilde{C}(S)$ і $Z(Awr_XB)\subset C(S)$. Тому для групи $\tilde{Q}$ маємо вкладення

$$\tilde{Q}\subset Z(AWr_XB)\subset\tilde{C}(S).$$

Лема 5.1. *Виконуються рівності*

$$Z(AWr_XB)=\tilde{C}(S)=\tilde{Q}.$$

Доведення. Достатньо перевірити вкладення $\tilde{C}(S)\subset\tilde{Q}$.

Припустимо, що $(g_{y,c},p)\in S$ і $(f,l)\in\tilde{C}(S)$, де $f,g_{y,c}\in\mathrm{Map}(X,A)$, $g_{y,c}$ визначено у (5) і $l,p\in B$. Тоді за означенням маємо рівність $(f,l)(g_{y,c},p)=(g_{y,c},p)(f,l)$. Отже,

$$((f\circ\varphi_p)\cdot g_{y,c},lp)=((g_{y,c}\circ\varphi_l)\cdot f,pl)\,.$$

Тому $lp=pl$ для будь-якого p, звідки випливає, що $l\in Z(B)$, і ми отримуємо

$$(f\circ\varphi_p(x))\cdot g_{y,c}(x)=(g_{y,c}\circ\varphi_l(x))\cdot f(x). \tag{6}$$

Для $x\neq y, x\neq\varphi_l^{-1}(y)$ у (6) маємо

$$f\circ\varphi_p(x)=f(x). \tag{7}$$

Рівність (7) виконується для кожного $p\in B$, тому f набуває одного й того ж значення на всій орбіті.

Зазначимо, що можна вибрати $g_{y,c}(x)$ з іншим фіксованим елементом y. Тому f є сталою на кожній орбіті B на X, тобто $f(x)=a_\lambda$ для кожного $x\in O_\lambda$, $O_\lambda\in\mathcal{O}$.

Залишилось показати, що кожен a_λ є елементом центра $Z(A)$ і $l\in\ker\varphi$.

Для цього проаналізуємо рівність (6) при $x=y$. Можливі два випадки:

1) якщо $\varphi_l(y)=y$, то

$$f(y)g_{y,c}(y)=g_{y,c}(y)f(y),$$

2) якщо $\varphi_l(y)\neq y$, то

$$f(y)g_{y,c}(y)=f(y).$$

Другий випадок неможливий, оскільки $g_{y,c}(y) \neq e$. Тому $l \in \ker\varphi$. З першого випадку випливає, що для кожного $y \in X$ маємо $f(y) \in Z(A)$, оскільки $g_{y,c}(y) = c$, де c — довільний елемент A. Отже, умови 1 і 2 виконуються.

Лема 5.2. *Центр* $Z(Awr_X B)$ *є перетином* $Z(AWr_X B)$ *і* $Awr_X B$, *тобто*

$$Z(Awr_X B) = Z(AWr_X B) \cap (Awr_X B).$$

Доведення. Дійсно, вкладення $(Z(AWr_X B) \cap (Awr_X B)) \subset Z(Awr_X B)$ є очевидним.

Перевіримо протилежне вкладення. Припустимо, що $(f,l) \in Z(Awr_X B)$. Оскільки $S \subset \subset Awr_X B$, отримуємо

$$Z(Awr_X B) \subset C(S) \subset \tilde{C}(S) \cap (Awr_X B) \overset{\text{лема 5.1}}{=} Z(AWr_X B) \cap (Awr_X B).$$

***Доведення теореми* 5.1.** Для необмеженого вінцевого добутку $AWr_X B$ кількість орбіт у $Z(AWr_X B)$ може бути нескінченною, а для обмеженого вінцевого добутку $Awr_X B$ кількість орбіт у $Z(Awr_X B)$ може бути лише скінченною.

Згідно з лемами 5.1 і 5.2 мають місце бієкції

$$\psi_1 \colon Z(AWr_X B) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Z(A) \times \big(\ker\varphi \cap Z(B)\big),$$

$$\psi_2 \colon Z(Awr_X B) \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_{\mathrm{fin}}} Z(A) \times \big(\ker\varphi \cap Z(B)\big),$$

визначені за формулами $\psi_1(f,l) = (a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}, l)$, $\psi_2(f,l) = (a_1, a_2, \ldots, a_{s_2}, l)$. Легко перевірити, що ψ_1 і ψ_2 є гомоморфізмами.

Теорему 5.1 доведено.

***Наслідок* 5.1.**

$$Z\Big(A \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}\Big) = \{(a, a, \ldots, a, nk) \mid a \in Z(A), k \in \mathbb{Z}\} \cong D(A) \times n\mathbb{Z} \cong Z(A) \times \mathbb{Z}, \tag{8}$$

$$Z\Big(A \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\Big) = \Big\{(a)_{i,j=1}^{n,m}, nk, mp) \mid a \in Z(A), k, p \in \mathbb{Z}\Big\} \cong$$

$$\cong D(A) \times n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z} \cong Z(A) \times \mathbb{Z}^2, \tag{9}$$

$$Z(A \times B) \cong Z(A) \times Z(B). \tag{10}$$

Дійсно, для груп $A \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}$ і $A \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$ маємо тільки одну орбіту дії B на X. Згідно з теоремою 5.1 отримуємо (8) і (9), (10) є очевидним. Наприклад,

$$Z\Big(\big((\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z})\big) \wr_7 \mathbb{Z}\Big) \cong Z\Big((\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z})\Big) \times 7\mathbb{Z} \cong$$

$$\cong Z\Big((\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z})\Big) \times \mathbb{Z} \cong Z\big(\mathbb{Z} \wr_3 \mathbb{Z}\big) \times Z\big(\mathbb{Z} \wr_5 \mathbb{Z}\big) \times \mathbb{Z} \cong$$

$$\cong \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}.$$

Теорема 5.2. *Нехай* $G \in \mathcal{B}$ $(G \in \mathcal{T})$, ω — *довільна реалізація* G *в алфавіті* $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ $(\mathcal{A}_{\mathcal{T}})$, *а* $\beta_1(\omega)$ — *кількість символів* $\mathbb{Z}$ *у реалізації* ω. *Тоді* $Z(G) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$.

Доведення. Справедливість теореми випливає з наслідку 5.1 та індукції по кількості символів 1 і $\mathbb{Z}$ у реалізації ω, яку позначатимемо через $l(\omega)$. Для зручності позначимо через $\widetilde{\omega}$ групу з класу $\mathcal{B}$ $(\mathcal{T})$, визначену словом ω. Зокрема, ω є реалізацією $\widetilde{\omega}$ в алфавіті $\mathcal{A}$ (чи в $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$). Оскільки $\widetilde{\omega}$ є групою, ізоморфною G, маємо

$$Z(G) = Z(\widetilde{\omega}).$$

Очевидно, якщо $l(\omega) = 1$, то ω — це або 1, або $\mathbb{Z}$, тому $Z(G) \simeq 1$ або $Z(G) \simeq \mathbb{Z}$ відповідно. Припустимо, що $Z(G) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$ для всіх слів з $l(\omega) \leq k$. Покажемо це для $l(\omega) = k+1$. У цьому випадку реалізація ω — це або 1) прямий добуток $\omega_1 \times \omega_2$ такий, що $l(\omega_1) + l(\omega_2) = k+1$, $l(\omega_1) \leq k$, $l(\omega_2) \leq k$, або 2) вінцевий добуток $\omega_1 \wr_n \mathbb{Z}$, де $l(\omega_1) = k$, або 3) вінцевий добуток $\omega_1 \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2$, де $l(\omega_1) = k-1$. Із наслідку 5.1, індуктивного припущення та очевидного спостереження $\beta_1(\omega_1) + \beta_1(\omega_2) = \beta_1(\omega_1 \times \omega_2)$ випливає, що у першому випадку

$$Z(\widetilde{\omega_1} \times \widetilde{\omega_2}) \cong Z(\widetilde{\omega_1}) \times Z(\widetilde{\omega_2}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)} \times \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)+\beta_1(\omega_2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1 \times \omega_2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)},$$

у другому випадку

$$Z(\widetilde{\omega}) \simeq Z(\widetilde{\omega_1} \wr_n \mathbb{Z}) \simeq Z(\widetilde{\omega_1}) \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1 \wr_n \mathbb{Z})} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)},$$

а у третьому випадку

$$Z(\widetilde{\omega}) \simeq Z(\widetilde{\omega_1} \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2) \simeq Z(\widetilde{\omega_1}) \times \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1)} \times \mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega_1 \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2)} \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

Теорему 5.2 доведено.

6. Комутант.

Теорема 6.1. *Для довільної групи G комутант $G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$ збігається з групою*

$$\left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right] = \left\{ \left((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0\right) \;\middle|\; \prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \in [G,G] \right\}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що кожен $g = \left((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0\right)$ такий, що $\prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \in [G,G]$, належить $\left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]$.

Доведемо, що елементи h_1, h_2 групи $G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$,

$$h_1 = \left((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, k, s\right), \qquad h_2 = \left((g_{i,1})_{i=1}^{n}, \ldots, (g_{i,m-2})_{i=1}^{n}, (g_{i,m-1}g_{i,m})_{i=1}^{n}, e, k, s\right),$$

належать одному і тому ж класу спряженості, тобто

$$h_2 = h_1 f, \quad \text{де} \quad f \in \left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]. \tag{11}$$

Дійсно, $f = \left((e, \ldots, e, (g_{i,m})_{i=1}^{n}, (g_{i,m}^{-1})_{i=1}^{n}), 0, 0\right)$ задовольняє рівність (11). Легко перевірити, що $f \in \left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]$.

Аналогічно, за індукцією отримуємо, що елементи

$$h_1 = \left(\left(\prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \right), k, s \right), \qquad h_3 = \left(\left(\left(\prod_{j=1}^{m} g_{i,j} \right)_{i=1}^{n} \ldots, e, e \right), k, s \right),$$

належать одному і тому ж класу спряженості.

Елементи h_3, h_4 групи $G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$,

$$h_4 = \left(\begin{pmatrix} \prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} & \ldots & e & e & e \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e & \ldots & e & e & e \end{pmatrix} k, s \right),$$

також належать одному і тому ж класу спряженості, оскільки в цьому випадку можна покласти

$$f = \left(\begin{pmatrix} e & \ldots & e & e & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \prod_{j=1}^{m} g_{n,j} & \ldots & e & e & \\ \left(\prod_{j=1}^{m} g_{n,j}\right)^{-1} & \ldots & e & e & \end{pmatrix} 0, 0 \right).$$

Зауважимо, що для елементів

$$\alpha = \big((a_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0\big), \qquad a_{1,1} = a, \quad a_{i,j} = e, \quad i = j \neq 1,$$
$$\beta = \big((b_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0\big), \qquad b_{1,1} = b, \quad b_{i,j} = e, \quad i = j \neq 1,$$

з $G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$ виконується рівність

$$[\alpha, \beta] = \left(\begin{pmatrix} [a, b] & \ldots & e & e & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e & \ldots & e & e & \\ e & \ldots & e & e & \end{pmatrix} 0, 0 \right). \tag{12}$$

Отже, кожен $g = \big((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0\big)$ такий, що $\prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \in [G, G]$, належить класу спряженості елемента h_4 при $k = 0, s = 0$, і згідно з (12) $g \in \left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]$.

Нехай тепер $g = \big((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, k, s\big) \in \left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]$, а також $a = \big((a_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, c, d\big)$ і $b = ((b_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, l, p)$ — елементи з $G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2$. Маємо

$$aba^{-1}b^{-1} = \big((a_{i-c,j-d} b_{i-c-l,j-d-p} a^{-1}_{i-c-l,j-d-p} b^{-1}_{i-l,j-p})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0\big). \tag{13}$$

Тому $k = 0$. Очевидно також, що кожний елемент $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $a_{i,j}^{-1}$, $b_{i,j}^{-1}$ входить у запис (13) рівно один раз для кожного комутатора $aba^{-1}b^{-1}$ та оберненого до нього.

Кожен $g \in \left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right]$ породжується комутаторами з такою властивістю, тому добуток його перших n координат має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n} g_i = c_1^{i_1} c_2^{i_2} \ldots c_r^{i_r}, i_r \in \{\pm 1\}, \quad c_i \in G,$$

де c_i не обов'язково різні, але сума степенів однакових елементів завжди дорівнює нулю.

Оскільки $c_i c_j = c_j c_i [c_i^{-1}, c_j^{-1}]$, ми можемо скоротити всі c_i за допомогою перестановок, тому залишаться лише комутатори. Отже, $\prod_{i=1}^{n} g_i \in [G, G]$.

Теорему 6.1 доведено.

Аналогічними до доведення теореми 6.1 міркуваннями можна встановити такий наслідок.

***Наслідок* 6.1.** *Для довільної групи G комутант $G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}$ збігається з групою*

$$\left[G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}, G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z}\right] = \left\{ (g_1, g_2, \ldots, g_n, 0) \;\middle|\; \prod_{i=1}^{n} g_i \in [G, G] \right\}.$$

Теорема 6.2. *Для довільної групи G мають місце такі ізоморфізми фактор-груп*:

$$G \underset{n}{\wr} \mathbb{Z} / [G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}] \cong G/[G, G] \times \mathbb{Z},$$

$$G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2 \Big/ \left[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\right] \cong G/[G, G] \times \mathbb{Z}^2.$$

Доведення. Побудуємо гомоморфізми

$$\eta \colon G \wr_n \mathbb{Z} \to G/[G, G] \times \mathbb{Z}, \qquad \mu \colon G \wr_{n,m} \mathbb{Z}^2 \to G/[G, G] \times \mathbb{Z}^2,$$

визначені формулами

$$\eta((g_i)_{i=1}^{n}, k) = \left(\left(\prod_{i=1}^{n} g_i \right) [G, G], k \right),$$

$$\mu((g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, k, p) = \left(\left(\prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \right) [G, G], k, p \right).$$

Для перевірки, що η є гомоморфізмом, проведемо обчислення

$$\eta(a_1, a_2, \ldots, a_n, k)\eta(b_1, b_2, \ldots, b_n, p) = (a_1 a_2 \ldots a_n [G, G], k)(b_1 b_2 \ldots b_n [G, G], p) =$$

$$= (a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n [G, G], k + p),$$

$$\eta((a_1, a_2, \ldots, a_n, k)(b_1, b_2, \ldots, b_n, p)) =$$

$$= \eta(a_{(1+p) \bmod n} b_1, a_{(2+p) \bmod n} b_2, \ldots, a_{(n+p) \bmod n} b_n, k + p) =$$

$$= (a_{(1+p) \bmod n} b_1 a_{(2+p) \bmod n} b_2 \ldots a_{(n+p) \bmod n} b_n [G,G], k+p).$$

Оскільки $G/[G,G]$ абелева, маємо

$$\big(a_{(1+p) \bmod n} b_1 a_{(2+p) \bmod n} b_2 \ldots a_{(n+p) \bmod n} b_n [G,G], k+p\big) =$$
$$= \big(a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n [G,G], k+p\big),$$

тому η є гомоморфізмом.

Гомоморфізм η є сюр'єктивним, оскільки для кожного елемента $(h,n) \in G/[G,G] \times \mathbb{Z}$ існує елемент $(h,e,e,\ldots,n)$, що задовольняє рівність

$$\varphi(h,e,e,\ldots,n) = (h,n).$$

Тоді ядро η має вигляд $\ker\eta = \Big\{(g_1, g_2, \ldots, g_n, 0) \;\Big|\; \prod_{i=1}^{n} g_i \in [G,G]\Big\}$ і збігається з $[G \wr_n \mathbb{Z}, G \wr_n \mathbb{Z}]$.

Аналогічно перевіряється, що μ є сюр'єктивним гомоморфізмом. Ядро μ має вигляд $\ker\mu = \Big\{(g_{i,j})_{i,j=1}^{n,m}, 0, 0) \;\Big|\; \prod_{i,j=1}^{n,m} g_{i,j} \in [G,G]\Big\}$ і збігається з $\Big[G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2, G \underset{n,m}{\wr} \mathbb{Z}^2\Big]$.

Теорему 6.2 доведено.

Теорема 6.3. *Нехай $G \in \mathcal{B}$ $(G \in \mathcal{T})$, ω — довільна реалізація G в алфавіті $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ $(\mathcal{A}_{\mathcal{T}})$ і $\beta_1(\omega)$ — кількість символів $\mathbb{Z}$ у реалізації ω. Тоді $G/[G,G] \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 5.2. Замість зауваження 5.1 достатньо застосувати теорему 6.2 і твердження про те, що для довільних двох груп A та B виконується

$$A \times B/[A \times B, A \times B] \simeq A/[A,A] \times B/[B,B]. \tag{14}$$

Для доведення (14) достатньо перевірити, що відображення $\varphi\colon A \times B \to A/[A,A] \times B/[B,B]$, визначене формулою

$$(a,b) \mapsto \big(a[A,A], b[B,B]\big),$$

є сюр'єктивним гомоморфізмом з ядром $\ker\varphi = [A \times B, A \times B]$.

Оскільки φ є добутком сюр'єктивних гомоморфізмів φ_1, φ_2, визначених формулами

$$\varphi_1\colon A \times B \to A/[A,A], \qquad \varphi_1(a,b) = a[A,A],$$
$$\varphi_2\colon A \times B \to B/[B,B], \qquad \varphi_2(a,b) = b[B,B],$$

воно також є сюр'єктивним гомоморфізмом.

Далі, зауважимо, що

$$\ker\varphi = \big\{(a,b) \mid a \in [A,A],\ b \in [B,B]\big\}.$$

Перевіримо, що $\ker\varphi \subset [A \times B, A \times B]$. Дійсно, нехай $\Big(\prod [a_i, b_i],\ \prod [c_j, d_j]\Big) \in \ker\varphi$, де $a_i, b_i \in A$, $c_j, d_j \in B$, тоді

$$\left(\prod_i [a_i, b_i],\ \prod_j [c_j, d_j]\right) = \left(\prod_i [a_i, b_i],\ e\right)\left(e, \prod_j [c_j, d_j]\right) =$$

$$= \prod_i ([a_i, b_i], e) \prod_j (e,\ [c_j, d_j]) =$$

$$= \prod_i \big[(a_i, e), (b_i, e)\big] \prod_j \big[(e, c_j), (e, d_j)\big] \in [A \times B, A \times B].$$

Навпаки, для будь-якого комутатора $[(a,b),(c,d)]$ в $[A \times B, A \times B]$ маємо

$$\big[(a,b),(c,d)\big] = (a,b)(c,d)(a^{-1}, b^{-1})(c^{-1}, d^{-1}) = \big([a,c],[b,d]\big) \in \ker\varphi.$$

Теорему 6.3 доведено.

Тепер ми можемо отримати очевидне доведення основного результату статті — теореми 1.1. З теореми 5.2 при тих же припущеннях отримуємо, що $Z(G) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$, а з теореми 6.3 — що $G/[G,G] \simeq \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}$. Тоді, очевидно,

$$Z(G) \cong G/[G,G] \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(\omega)}.$$

Автори висловлюють подяку С. І. Максименку за увагу та плідні дискусії.

Література

1. B. G. Feshchenko, *Deformation of smooth functions on 2-torus whose Kronrod – Reeb graphs is a tree*, Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., **12** 204 – 219 (2015).
2. S. I. Maksymenko, *Homotopy types of right stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces*, Ukr. Math. J., **64**, № 9, 1186 – 1203 (2012).
3. S. I. Maksymenko, B. G. Feshchenko, *Smooth functions on 2-torus whose Kronrod – Reeb graph contains a cycle*, Methods Funct. Anal. and Topology, **21**, № 1, 22 – 40 (2015).
4. S. Maksymenko, *Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms*, Topology and Appl., **282**, Article 107312 (2020).
5. S. I. Maksymenko, *Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces*, Ann. Global Anal. and Geom., **29**, № 3, 241 – 285 (2006).
6. B. Feshchenko, *Actions of finite groups and smooth functions on surfaces*, Methods Funct. Anal. and Topology, **22**, № 3, 210 – 219 (2016).
7. E. A. Kudryavtseva, *Special framed Morse functions on surfaces*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., № 4, 14 – 20 (2012).
8. E. A. Kudryavtseva, *The topology of spaces of Morse functions on surfaces*, Math. Notes, **92**, № 1-2, 219 – 236 (2012).
9. E. A. Kudryavtseva, *On the homotopy type of spaces of Morse functions on surfaces*, Sb. Math., **204**, № 1, 75 – 113 (2013).
10. E. A. Kudryavtseva, *Topology of spaces of functions with prescribed singularities on the surfaces*, Dokl. Akad. Nauk, **93**, № 3, 264 – 266 (2016).
11. B. Feshchenko, *Deformations of smooth functions on 2-torus*, Proc. Int. Geom. Cent., **12**, № 3, 30 – 50 (2019).
12. S. I. Maksymenko, B. G. Feshchenko, *Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types*, Mat. Stud., **44**, № 1, 67 – 84 (2015).
13. A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
14. S. I. Maksymenko, B. G. Feshchenko, *Homotopy properties of spaces of smooth functions on* 2*-torus*, Ukr. Math. J., **66**, № 9, 1205 – 1212 (2014).
15. J. D. P. Meldrum, *Wreath products of groups and semigroups*, Pitman Monogr. and Surv. Pure and Appl. Math., vol. 74, Longman, Harlow (1995).

Одержано 26.05.20,
після доопрацювання — 09.01.21