DOI: 10.37863/umzh.v72i7.2384

УДК 517.5

Р. М. Тригуб (Донецк. нац. ун-т)

О РАЗНЫХ МОДУЛЯХ ГЛАДКОСТИ И K-ФУНКЦИОНАЛАХ

In this survey paper, exact rate of approximation of functions by linear means of Fourier series and Fourier integrals and corresponding K-functionals are expressed via special moduli of smoothness.

Статтю, що має оглядовий характер, присвячено визначенню точного порядку наближення функцій лінійними середніми рядів та інтегралів Фур'є і знаходженню K-функціоналів через спеціальні модулі гладкості.

1. Введение. Для непрерывной 2π-периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, модуль гладкости порядка $r \in \mathbb{N}$ и шага $h > 0$ определяют так:

$$\omega_r(f;h) = \sup\left\{\left|\Delta_\delta^r f(x)\right| : x \in \mathbb{T}, \delta \in (0,h]\right\}, \qquad \Delta_\delta^r f(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f(x+\nu\delta)$$

(разность функции порядка r и шага $\delta > 0$).

Модуль непрерывности $\omega = \omega_1$ использовал Лебег. При $r \geq 2$ модуль гладкости ввел С. Н. Бернштейн (1912 г.), а основные его свойства изучил Маршо (1927 г.).

Известно, например, что

$$\omega_r(f;h) = O(h^\alpha), \qquad 0 < \alpha \leq r, \quad h \to 0,$$

тогда и только тогда, когда $f^{[\alpha]} \in \mathrm{Lip}\big(\alpha - [\alpha]\big)$ (при нецелом α), $\omega_2\big(f^{(\alpha-1)}; h\big) = O(h)$ (при целом $\alpha < r$) и, наконец, $f^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}1$ (при $\alpha = r$).

Подобным образом определяется модуль гладкости $\omega_r(f;h)_p$ функции в метрике L_p, а вместо R может быть компакт в $\mathbb{C}$.

Общие свойства модулей гладкости см. в [1, 3 – 5]. Теорему о продолжении функции с сохранением порядка убывания ω_r при $h \to 0$ доказал О. В. Бесов [2], общую теорему о продолжении — Ю. А. Брудный (см. [7]), а некоторые свойства (например, о модуле гладкости произведения функций) — автор.

С. Н. Бернштейн [8] применил модуль гладкости более общего вида, определяемый „разностью" порядка $r \geq 2$:

$$f(x) - \sum_{k=1}^{r} a_k f(x + b_k\delta), \quad \sum_{k=1}^{r} a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{r} a_k b_k^s = 0,$$
$$1 \leq s \leq r-1, \quad 1 = b_1 < b_2 < \ldots < b_r.$$

Это частный случай такого модуля (f ограничена и непрерывна на прямой, а μ — конечная борелевская мера):

$$\sup_x \sup_{0<\delta\leq h} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x - \delta u)\, d\mu(u) \right|,$$

введенного в [9], который изучали H. Shapiro и J. Boman (см., например, [10]).

Ранее [11] автор ввел модуль

$$\tilde{\omega}_r(f;h) = \sup_x \left| \frac{1}{h} \int\limits_0^h \Delta_\delta^r f(x) d\delta \right|$$

(верхняя грань по шагу заменена интегральным средним), который оказался по порядку эквивалентным $\omega_r(f;h)$. Этот линеаризованный модуль удобен в применении ([3], см. ниже пп. 2.2 в п. 2).

В 60-е годы прошлого века для построения интерполяционных пространств между двумя банаховыми пространствами E_1 и E_2 вещественным методом были введены (J. L. Lions и J. Peetre) K-функционалы ($f \in E_1 + E_2,\ h > 0$)

$$K(f;h) = K(f;h,E_1,E_2) = \inf\left\{\|f_1\|_{E_1} + h\|f_2\|_{E_2},\ f = f_1 + f_2\right\}$$

(см. [12], а также [4]).

В случае, когда хотя бы одно из пространств является пространством гладких функций, K-функционал, как и модуль гладкости, определяет при $h \to 0$ промежуточную гладкость.

Z. Ciesielski [13] поставил вопрос о формулах для K-функционалов, выражаемых для периодических функций через средние их рядов Фурье.

В работе [14] найдены такие формулы для пространств, определяемых дифференциальными операторами Δ^r (Δ — оператор Лапласа) и $D_{2r} = \sum_{j=1}^d \dfrac{\partial^{2r}}{\partial x_j^{2r}},\ d \in \mathbb{N},\ x = (x_1, \ldots, x_d)$, $r \in \mathbb{N}$. Для оператора Лапласа Δ $(r = 1)$ другая форма указана в [15] (см. пп. 3.4, 3.5). При этом автор использовал двусторонние (порядковые) неравенства для приближения индивидуальных функций классическими средними рядов Фурье (одномерный случай см. в [16] или [5]). Этой проблемой (двусторонними оценками) успешно занимались В. В. Жук [17, 18], Э. В. Стороженко [19], М. Ф. Тиман и В. П. Пономаренко [20], а в случае любого числа переменных — Э. С. Белинский [21], Р. М. Тригуб [22], О. И. Кузнецова [23], Ю. Л. Носенко [24]. После статьи Z. Ditzian и K. G. Ivanov [25] такие результаты о точном порядке приближения функций известными полиномами часто называют „strong converse inequalities”. Следует еще отметить V. Totik, X. L. Zhou, К. В. Руновского и Ю. С. Коломойцева (см. ссылки в статье B. R. Draganov [26]).

Еще нужно упомянуть о подобных результатах в пространстве $L_p,\ p > 0$, и пространствах Харди $H_p,\ 0 < p \leq 1$, на диске [27], полуплоскости [28] и шаре [29].

Для определения точного порядка приближения функции на торе $\mathbb{T}^d$ или на всем пространстве $\mathbb{R}^d$ обычно используют один из следующих двух методов. Первый из них основан на прямых теоремах теории приближений (типа Джексона) и экстремальных свойствах целых функций экспоненциального типа (типа неравенства Бернштейна). Этот метод применим и к нелинейным операторам приближения. Второй основан на принципе сравнения мультипликаторов (впервые применен в [11, 30]). Таким образом получают и прямые теоремы, и экстремальные свойства полиномов и целых функций экспоненциального типа. Достоинством этого метода является точность.

Из точных по порядку оценок приближения линейными средними рядов и интегралов Фурье следуют конструктивные характеристики классов функций, определение классов насыщения и новые формулы для K-функционалов.

По поводу определения мультипликатора в $L_p,\ p \in [1, +\infty]$, и вычисления его нормы (особенно просто при $p = 2$) см. [31] ($L_p,\ p \in (1, +\infty)$) и [32] ($p = 1$ и $p = \infty$).

При $p \in (1, +\infty)$ достаточные условия для мультипликаторов интегралов Фурье исследовали М. Рисс, Марцинкевич, И. Г. Михлин, Хермандер, П. И. Лизоркин. О связи мультипликаторов Фурье для интегралов и рядов Фурье см. [32] (гл. VII).

Мультипликатор Фурье интегралов Фурье из L_1 в L_1 определяется преобразованием Фурье конечной комплекснозначной борелевской меры (свойства таких мер см. в [33]):

$$W(\mathbb{R}^d) = \left\{ f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,u)} d\mu(u),\ \|f\|_W = \mathrm{var}\mu < \infty \right\},$$

$$W_0(\mathbb{R}^d) = \left\{ f(x) = \hat{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,u)} g(u) du,\ \|f\|_{W_0} = \|g\|_{L_1} < \infty \right\}.$$

Этим банаховым алгебрам Винера посвящена обзорная статья [34]. В ней есть и пункт о положительно определенных функциях, т. е. функциях с условием $\|f\|_W = f(0)$ (преобразование Фурье положительной меры).

Для перехода от приближений к K-функционалам применяем лемму 2.8.

Таким образом, нелинейная задача определения K-функционала решается применением линейных операторов (и даже сверточных) (см. также [35, 36]).

Ряд Фурье 2π-периодической по x_j, $1 \le j \le d$, функции $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d$, будем записывать в виде $\left((x,y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j, |x| = \sqrt{(x,x)}\right)$

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_k e_k, \qquad e_k = e^{i(k,x)}, \qquad \hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i(k,x)} dx.$$

Средние $\Phi_\varepsilon(f)$ рядов Фурье, определяемые функцией $\varphi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, имеют вид

$$\Phi_\varepsilon(f) = \Phi_\varepsilon(f, x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\varepsilon k) \hat{f}_k e_k, \quad \varepsilon > 0.$$

Если ядро интегрального оператора Φ_ε является рядом Фурье конечной борелевской периодической меры, то $\Phi_\varepsilon(f)$ — свертка функции с мерой, а если является рядом Фурье некоторой функции, то оператор $\Phi_\varepsilon : L_p(\mathbb{T}^d) \to L_p(\mathbb{T}^d)$ компактный при любом $p \ge 1$.

Принцип сравнения. *Если φ и $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ непрерывны, из условия $\psi(x) = 1$ следует, что $\phi(x) = 1$ (это и необходимо), а переходная функция $g = \dfrac{1-\varphi}{1-\psi}$ после возможного доопределения по непрерывности принадлежит $W(\mathbb{R}^d)$, то при любом $p \in [1, \infty]$ и $\varepsilon > 0$*

$$\big\|f - \Phi_\varepsilon(f)\big\|_p \le \|g\|_W \big\|f - \Psi_\varepsilon(f)\big\|_p$$

для всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для которых конечна правая часть.

Если, дополнительно, тригонометрический ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\varepsilon k) e_k$ является рядом Фурье, то при $p = \infty$ множитель $\|g\|_W$ в правой части нельзя уменьшить в общем случае.

(См. [3], пп. 7.1.11, 7.1.12, и замечание перед следствием 1.)

Отметим, что $\|g\|_W = g(0)$, если $g(x) = g_0(|x|)$, $g_0 \in C[0, +\infty)$, $g_0 \in C^m(0, +\infty)$ при $m = [d/2]$, $(-1)^m g_0^{(m)}$ выпукла вниз, $g(+\infty) \ge 0$ и $\lim_{t \to +0, t \to +\infty} g_0^{(m+1)}(t) = 0$ (правая производная) (см. [37] или [3], п. 6.3.7).

Рассмотрим далее K-функционалы следующего вида.

Пусть d_α — дифференциальный оператор, определяемый матрицей $\{\mu_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}$ такой, что $\mu_{k,\alpha}\neq 0$ и $\lim_{|k|\to\infty}\mu_{k,\alpha}=\infty$, а именно,

$$d_\alpha f\sim\sum_{k\neq 0}\mu_{k,\alpha}\hat{f}_k e_k$$

(при $\mu_{k,\alpha}=-|k|^{2\alpha}$ это Δ^α, где Δ — оператор Лапласа).

Если

$$W(d_\alpha)_p=\Big\{f\in L_p(\mathbb{T}^d): d_\alpha f\in L_p(\mathbb{T}^d)\Big\},$$

то

$$K\big(\varepsilon; f, L_p, W(d_\alpha)_p\big)=\inf_g\{\|f-g\|_p+\varepsilon\|d_\alpha g\|_p\}.$$

Для перехода к K-функционалам ниже используется лемма 2.8 из п. 2.

По поводу интегралов Фурье см. замечание 2 в п. 3.

В п. 2 настоящей статьи изучаются функции на $\mathbb{R}$, в п. 3 — на $\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, а в п. 4 — модули гладкости в банаховых пространствах. В п. 5 приведены примыкающие нерешенные вопросы.

Через $c(a,b)$ будем обозначать положительные величины, зависящие лишь от a и b.

2. Модули гладкости и *K*-функционалы на $\mathbb{T}$ и $\mathbb{R}$. Для того чтобы объединить периодические и непериодические функции на прямой, можно ввести семейство норм ($N>0$)

$$\|f\|_{p,N}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int\limits_{x-N}^{x+N}|f(u)|^p du\right)^{1/p}.$$

Если функция f принадлежит $L_p(\mathbb{T})$ и 2π-периодична, то $\|f\|_p=\|f\|_{p,\pi}$, а если f принадлежит $L_p(\mathbb{R})$, то $\|f\|_p=\lim_{N\to\infty}\|f\|_{p,N}$.

Обозначим через τ_t оператор сдвига $(\tau_t f)(x)=f(x+t)$. Теперь можно переходить от неравенств в метрике C к неравенствам в L_p, $p\in[1,\infty)$.

2.1. *Пусть E — линейное множество ограниченных и равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$, замкнутое относительно равномерной сходимости, а линейный оператор A действует из E в E и $\|Af\|_\infty\leq a\|f\|_\infty$* ($\sup$-*норма*). *Если еще множество E инвариантно относительно сдвига и оператор A коммутирует со сдвигом ($A\tau_t=\tau_t A$ для всех $t\in\mathbb{R}$), то и для любого $p\in[1,+\infty)$, $N>0$ и $f\in E$*

$$\|Af\|_{p,N}\leq a\|f\|_{p,N}.$$

Доказательство см. в [3], п. 1.2.7.

Отметим, что после усреднения линейного ограниченного оператора A по сдвигам получаем оператор A_0, коммутирующий со сдвигами и сохраняющий многие свойства A (см. [3], п. 7.1.1).

Введем линеаризованный модуль гладкости ($f\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, норма в $L_p(\mathbb{T})$ или $L_p(\mathbb{R})$)

$$\tilde{\omega}_r(f;h)=\left\|\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Delta_\delta^r f(\cdot)d\delta\right\|=\left\|\int\limits_0^1\Delta_{th}^r f(\cdot)dt\right\|$$

(верхняя грань по шагу δ заменена интегральным средним).

Очевидно, что при любом $h > 0$ выполняется $\tilde{\omega}_r(f;h) \le \omega_r(f;h)$.

2.2. *Для любого* $p \in [1, +\infty]$ *и любой функции* $f \in L_p$ ($L_p(\mathbb{R})$ *или* $L_p(\mathbb{T})$, *если функция периодическая*) *при всех* $h > 0$

$$\omega_r(f;h)_p \le c(r)\tilde{\omega}_r(f;h)_p.$$

Нужно доказать, что $\sup_{\theta \in (0,1]} \left\| \Delta^r_{\theta h} f(\cdot) \right\| \le c(r)\tilde{\omega}_r(f;h)$. Применим принцип сравнения для периодических функций (см. во введении) с учетом того, что

$$\Delta^r_{\theta h} f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - e^{i\theta hk}\right)^r \hat{f}_k e_k,$$

$$\int\limits_0^1 \Delta^r_{th} f(\cdot) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int\limits_0^1 \left(1 - e^{ithk}\right)^r dt \hat{f}_k e_k.$$

Нужно доказать ($h = \varepsilon$), что

$$\sup_\theta \|g_{r,\theta}\|_W < \infty, \quad g_{r,\theta} = \frac{\varphi_{r,\theta}}{\psi_r}, \quad \varphi_{r,\theta}(x) = \left(1 - e^{i\theta x}\right)^r,$$

$$\psi_r(x) = \int\limits_0^1 \left(1 - e^{itx}\right)^r dt = 1 + \sum_{\nu=1}^r (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \frac{e^{i\nu x} - 1}{i\nu x}.$$

Имеем $g_{r,\theta}(0) = (r+1)\theta^r$. То, что $\psi_r(x) \ne 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при любом $r \in \mathbb{N}$, доказано автором с использованием теоремы Линдемана о трансцендентности значений показательной функции (см. лемму 8.3.5 в) в [3]).

Учитывая, что при $\lambda \in \mathbb{R}$ $\left\|e^{i\lambda(\cdot)}\right\|_W = 1$, получаем

$$\|g_{r,\theta}\|_W = \left\| \frac{\varphi_{r,\theta}(1 - \psi_r)}{\psi_r} + \varphi_r \right\|_W \le \left\| \frac{\varphi_{r,\theta}(1 - \psi_r)}{\psi_r} \right\|_{W_0} + 2^r.$$

Приведем некоторые достаточные условия принадлежности $W_0(\mathbb{R})$.

$\mathbf{A_1}$. Аналог признака Бернштейна – Саса абсолютной сходимости рядов Фурье. *Если при* $p \in (1, 2]$ $f \in L_p(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ *и при* $\alpha \in \left(\frac{1}{p}, 1\right]$

$$\omega(f;h)_p \le h^\alpha, \qquad h \in (0, 1],$$

то $f \in W_0(\mathbb{R})$ *и* $\|f\|_{W_0} \le c(\alpha, p)$ (Титчмарш, 1927 г.). См. п. 5.1 в [34].

$\mathbf{Б_1}$. *Если* $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, *а*

$$\int\limits_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{|u| \ge x} \left|f'(u)\right| dx < \infty,$$

то $f \in W_0(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда* $\int_0^\infty \frac{\left|f(x) - f(-x)\right|}{x} dx < \infty$ (см. [3], п. 6.5.9, или следствие 12.7 в [34]).

$\mathbf{B_1}$. *Если* $f \in C^1(\mathbb{R})$, *а при* $|x| \to \infty$

$$f(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \qquad f'(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

то $f \in W_0(\mathbb{R})$ *при* $\alpha + \beta > 1$ (см. [38], а также следствие 10.6 в [34]).

Применим принцип сравнения для периодических функций (см. во введении) с учетом того, что

$$\Delta_{\theta h}^r f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 - e^{i\theta hk}\right)^r \hat{f}_k e_k,$$

$$\int\limits_0^1 \Delta_{th}^r f(\cdot)dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 \left(1 - e^{ithk}\right)^r dt \hat{f}_k e_k.$$

Для доказательства п. 2.2 можно применить A_1 при $p = 2$ $\big(\omega(f;h)_2 \le \|f'\|_2 h\big)$ или B_1 $(\alpha = \beta = 1)$. Кроме того, $c(r) \ge r + 1$ (см. п. 2.7).

Применения этой теоремы.

1. (Другая формулировка при $r = 1$.) Если функция Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \int\limits_0^h f(x+t)dt, \quad h > 0,$$

то $\|f - f_h\| \asymp \omega(f;h)$ (двойное неравенство с абсолютными положительными константами).

2. Для доказательства известной теоремы Джексона – Стечкина можно взять любую функцию $\phi \in C^{(r+1)}(\mathbb{R})$ с носителем на $[-1,1]$ и условиями $\phi(0) = 1$, $\phi^{(\nu)}(0) = 0$, $1 \le \nu \le r$. В силу принципа сравнения

$$\left\| f - \sum_k \phi\left(\frac{k}{n}\right) \hat{f}_k e_k \right\| \le c(\phi)\tilde{\omega}\left(f; \frac{1}{n}\right) \le c(\phi)c(r)\omega\left(f; \frac{1}{n}\right).$$

2.3. *Если при* $\varepsilon > 0$ *и* $n = [1/\varepsilon]$

$$\tau_{r,n}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_r(k\varepsilon)\hat{f}_k e_k,$$

где $\varphi_r(x) = \big(1 - |x|^r\big)_+$ *для четного* r *и* $\varphi_r(x) = \big(1 - |x|^{r+1}\big)_+ + i|x|^r\big(1 - |x|\big)_+ \operatorname{sign} x$ *для нечетного* r, *то при* $p \in [1, +\infty]$

$$\big\|f - \tau_{r,n}(f)\big\|_p \asymp \omega_r\left(f; \frac{1}{n}\right)_p$$

(*двустороннее неравенство с константами, зависящими лишь от* r).

Доказательство аналогично предыдущему с заменой ω_r на $\tilde{\omega}_r$. А после применения леммы 2.8 (см. ниже) получаем известный факт (см., например, [12]):

если $d_r(f;x) = \dfrac{d^r}{dx^r} f(x)$, то

$$K\big(\varepsilon, f, L_p, W(d_r)_p\big) \asymp \omega_r(f;\varepsilon)_p.$$

2.4. *При натуральных* α *и* $r > \dfrac{\alpha}{2}$, $\dot{\Delta}_h f(x) = f(x-h) - f(x+h)$ (*симметричная первая разность*)

$$\left\| \int\limits_{|u|\ge 1} \frac{1}{|u|^{r+\alpha}} \dot{\Delta}_{\varepsilon u}^{2r} f(\cdot)du \right\|_p \asymp \omega_\alpha(f;\varepsilon)_p \qquad (\alpha \text{ — четное}),$$

$$\left\| \int\limits_{|u|\geq 1} \frac{1}{|u|^{r+\alpha}} \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot) du \right\|_p \asymp \omega_{\alpha+1}(f;\varepsilon)_p + \frac{1}{\varepsilon}\omega_{\alpha+1}(\tilde{F};\varepsilon)_p \qquad (\alpha \text{ — нечетное}).$$

Здесь норма в $L_p(\mathbb{T})$, *а* $\tilde{F}$ *— сопряженная к периодическому интегралу* f.

Доказательство. Как следует из теоремы 3.9, доказанной ниже, при $d = 1$ левая часть совпадает по порядку с

$$\left\| f - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(1 - (\varepsilon|k|)^{\alpha}\big)_+ \hat{f}_k e_k \right\|,$$

а точный порядок приближения такими полиномами давно известен (при α четном установил автор, а при α нечетном — В. В. Жук, см. также [3], п. 8.5.8).

Вид K-функционала приведен ниже.

Поскольку с ростом α модуль ω_α почти уменьшается $(\omega_\alpha(f;h) \leq 2\omega_{\alpha-1}(f;h))$, то и интегралы в левой части с ростом α почти убывают, если только $\alpha < 2r$ конечно.

Введем теперь усложненный линеаризованный модуль гладкости нецелого порядка $r > 0$ (см. также замечание 1 ниже).

Для $f \in C(\mathbb{T})$ и целого $q > \dfrac{r}{2} > 0$

$$\tilde{\omega}_r(f;h)_\infty = \left\| \int\limits_1^\infty \frac{1}{u^{r+1}} \left(\dot{\Delta}^{2q}_{hu} f(\cdot) + \gamma_0 \dot{\Delta}^{2q+1}_{hu} f(\cdot) \right) du \right\|_\infty$$

при

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \mathrm{tg} \frac{r\pi}{2} \left(\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2q+1} t dt}{t^{r+1}} \right)^{-1} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2q} t}{t^{r+1}} dt.$$

2.5. *Пусть* $d_r(f) = f^{(r)} \sim \sum_{k\neq 0} |k|^r e^{i\frac{\pi}{2} r\cdot \mathrm{sign} k} \hat{f}_k e_k$, $r \notin \mathbb{N}$,

$$\varphi_r(x) = \big(1 - |x|^r\big)_+ - i \mathrm{tg} \left(\frac{r\pi}{2}\right) |x|^r \big(1 - |x|\big)_+ \mathrm{sign}\, x.$$

Тогда

$$K\big(\varepsilon^r, f; C, f^{(r)}\big) \asymp \left\| f - \sum_k \varphi_r(\varepsilon k) \hat{f}_k e_k \right\|_\infty \asymp \tilde{\omega}_r(f;\varepsilon)_\infty$$

(*двойные неравенства с положительными константами, зависящими лишь от* r *и* q).

Эти соотношения справедливы, конечно, и в $L_p(\mathbb{T})$ при $p \in [1, +\infty)$. Но при $p \in (1, +\infty)$ γ_0 можно выбирать произвольно (например, $\gamma_0 = 0$). Тогда константы зависят и от p.

(См. [3], п. 8.3.1. Здесь добавлен только K-функционал.)

Для всех классических методов суммирования найдены, уже довольно давно, точные порядки приближения через обычные модули гладкости или специальные. Оставался только следующий метод, введенный еще С. Н. Бернштейном [8] (D_n — ядро Дирихле, $\varphi_n(0) = 1$, $s \geq r + 2$):

$$\tau_{s,r,n}(f) = \gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\nu+1} \binom{r}{\nu} f(x-u) D_n^s(u) du = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right) \hat{f}_k e_k.$$

На этот вопрос обратил внимание В. И. Иванов (общая оценка приближения сверху через ω_r при $s = r + 2$ доказана С. Б. Стечкиным, см., например, [1], а также [3, 4]).

Как обнаружила О. В. Котова, уже при $r = 2$ и $s = 4$ имеем $\varphi_n(x) = 1$ не только при $x = 0$, как это у всех классических методов суммирования рядов Фурье.

Для решения этой задачи автор ввел специальный модуль гладкости (и даже два, см. [40, 41]), а Ю. С. Коломойцев — вид K-функционала [40]. Точный порядок приближения этими полиномами при больших n найден в [41]. Случай малых s и r при всех $n \in \mathbb{N}$ см. в [42].

Перейден теперь к рядам Фурье степенного типа, т. е. к функциям из пространства Харди $H_p(D),\ D = \{z\colon |z| < 1\},\ p > 0.$

Введем разные модули гладкости.

Пусть $f(e^{it})$ — предельная функция на окружности ∂D. При $r \in \mathbb{N}$ и $h > 0$ контурный или граничный модуль гладкости определяется так:

$$\omega_r(f;h)_p = \sup_{0<\delta\le h} \left\| \sum_{\nu=1}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f\big((\cdot)e^{i\nu\delta}\big) \right\|_{H_p(D)},$$

радиальный модуль гладкости $\left(h \in \left(0, \dfrac{2}{r}\right]\right)$

$$\omega_r(f;\mathrm{rad},h)_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f\big(e^{it}(1-\nu h)\big) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

и, наконец, линеаризованный граничный модуль $(q \in \mathbb{N})$

$$\tilde{\omega}_(f;h)_p = \left\| \int_{[0,1]^q} \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f\left((\cdot)e^{i\nu h\sum_{j=1}^{q} u_j}\right) du \right\|_{H_p}$$

(q-кратный интеграл по кубу).

2.6. *Предположим, что* $r \in \mathbb{N},\ p \in (0,+\infty],\ f \in H_p(D)$ *и* $h \in \left(0, \dfrac{1}{r+1}\right]$.

а) *Если* $q = 1$ *при* $p \ge 1$ *и* $q = \left[\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}\right]$ *при* $p \in (0,1)$, *то* $\omega_r(f;h)_p \asymp \tilde{\omega}_r(f;h)_p$.

б) *Если* $S_0(z) \equiv 0$, *а* $S_{r-1}(z) = \sum_{k=0}^{r-1} \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k$ *при* $r \ge 2$, *то*

$$\omega_r(f;\mathrm{rad},h)_p \asymp \omega_r(f - S_{r-1};h)_p$$

(*двойные неравенства с положительными константами, зависящими только от* r *и* p).

См. п. 8.4.1 в [3]. Там же показано применение новых модулей гладкости к неравенству Харди – Литтлвуда о росте модулей производных функций при подходе к границе ∂D.

Учитывая, что при $r = 1$ имеем $\omega_1(f,\mathrm{rad};h)_p = \|f - f_{1-h}\|_p$ (приближение средними Абеля – Пуассона), получаем при $p \in (0,1]$, и тем более при $p > 1$, такое следствие:

$$\big\|f - f_{1-h}\big\|_{H_p} \asymp \sup_{0<\delta\le h} \big\|f - f_{1-\delta}\big\|_{H_p} \asymp \omega(f;h)_p.$$

Вернемся к периодическим функциям с полным рядом Фурье.

2.7. а) *Всегда* $\lim_{h\to 0} \dfrac{\omega_r(f;h)_p}{h^r} = \sup_{h\in\left[0,\frac{1}{r}\right]} \dfrac{\omega_r(f;h)_p}{h^r}$. *А для того чтобы* $\omega_r(f;h)_p \le h^r$ *или, что то же самое,* $\tilde{\omega}_r(f;h)_p \le \dfrac{h^r}{r+1}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала* *абсолютно непрерывная производная* $f^{(r-1)}$ *и* $\left\|f^{(r)}\right\|_p \leq 1$ *при* $p \in (1, +\infty]$, *а при* $p = 1$ *полная вариация* $f^{(r-1)}$ *была не больше единицы* (см. [3]).

б) *Для любой функции из* L_p, $p \in (0,1)$, *выполняется*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega_r(f;h)_p}{h^{r-1+\frac{1}{p}}} = \sup_{0<h\leq\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_r(f;h)_p}{h^{r-1+\frac{1}{p}}}.$$

А $\omega_r(f;h)_p \leq h^{r-1+\frac{1}{p}}$ *тогда и только тогда, когда* $f^{(r-1)}$ — *ступенчатая функция или кусочно-постоянная (возможно, после исправления на множестве нулевой меры) и при любом наборе точек* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| f^{(r-1)}(x_k) - f^{(r-1)}(x_{k+1}) \right|^p \leq \left(\int_0^r \frac{1}{(r-1)!} \left|\Delta_1^r (-t)_+^{r-1}\right|^p dt \right)^{-1}.$$

См. [44].

2.8. Лемма. *Пусть* $d_\alpha \Phi_\varepsilon(f) \in L_p$, $p \geq 1$, $\varepsilon > 0$. *Если при некотором* a, *не зависящем от* f *и* ε, *выполняются следующие три условия* (α) *и* β) *и необходимы*):

α) $\left\|f - \Phi_\varepsilon(f)\right\|_p \leq a\varepsilon \left\|d_\alpha f\right\|_p$ (*в предположении, что* $d_\alpha f \in L_p$),

β) $\sup_{\varepsilon>0} \left\|\Phi_\varepsilon(f)\right\|_p \leq a\|f\|_p$,

γ) $\varepsilon \left\|d_\alpha \Phi_\varepsilon(f)\right\|_p \leq a \left\|f - \Phi_\varepsilon(f)\right\|_p$,

то

$$K\big(\varepsilon; f, L_p, W(d_\alpha)_p\big) \asymp \left\|f - \Phi_\varepsilon(f)\right\|_p$$

(*двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от* f *и* ε).

Доказательство. Установим оценку сверху. В силу определения K-функционала

$$K\big(\varepsilon, f, L_p, W(d_\alpha)_p\big) \leq \|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p + \varepsilon\|d_\alpha(\Phi_\varepsilon(f))\|_p.$$

Применяем условие γ).

Перейдем к установлению оценки снизу. Имеем

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p = \left\|(f-g) - \Phi_\varepsilon(f-g) + \big(g - \Phi_\varepsilon(g)\big)\right\|_p.$$

Применяем условия β) и α):

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p \leq (1+a)\|f-g\| + a\varepsilon\|d_\alpha g\| \leq (1+a)\big(\|f-g\| + \varepsilon\|d_\alpha g\|\big).$$

Осталось взять нижнюю грань по $g \in W(d_\alpha)$.

Заметим, что вид оператора d_α по Φ_ε определяется по классу насыщения для $f - \Phi_\varepsilon(f)$, а для доказательства условий $\alpha), \beta)$ и $\gamma)$ можно применять принцип сравнения.

См. также [45].

***Замечание* 1** (о других модулях)**.** Уже довольно давно рассматривают (и в том же смысле) модули гладкости и нецелого порядка $\alpha > 0$:

$$\omega_\alpha(f;h) = \sup_{0<\delta\leq h} \|\Delta_\delta^\alpha(f)\|, \quad \Delta_\delta^\alpha(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(\cdot + \nu\delta),$$

$$\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}.$$

При этом (см. [36])

$$\|\Delta_\delta^\alpha(f)\| \leq \|f\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{\nu}\right| = \|f\| \sum_{\nu=0}^{[\alpha]} \binom{\alpha}{\nu} (1 + (-1)^{[\alpha]+\nu}).$$

Свойства таких модулей см. в [46]. Как доказано в [47], такой модуль не эквивалентен соответствующему линеаризованному во всяком случае при нецелом $\alpha > 5$.

Иногда рассматривают на прямой следующее условие:

$$\mathrm{Lip}\,\alpha: \quad \bigl|f(x) - f(y)\bigr| \le \frac{|x-y|^{\alpha}}{\bigl(1+|x|\bigr)^{\alpha}\bigl(1+|y|\bigr)^{\alpha}}$$

(см. следствие из п. 5.1 в [34]).

А для функций на отрезке $[-1,1]$, например, крайние точки играют особую роль:

$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| \le \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+|x-y|}\right)^{\alpha}$$

(см. [3, с. 172], и вопрос 5 ниже в п. 5).

Если $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, то модуль Дитциана – Тотика (Д-Т модуль) функции $f \in L_p[-1,1]$, $p \in [1,+\infty]$, равен по определению

$$\omega_r^{\varphi}(f;h)_p = \sup_{0<\delta\le h} \bigl\|\dot{\Delta}^r_{\delta\varphi} f(\cdot)\bigr\|_p,$$

где L_p — норма по отрезку $[-1,1]$ в предположении, что $\dot{\Delta}^r_{\delta\varphi} = 0$, если $r\varphi\delta$ или $-r\varphi\delta$ не принадлежат $[-1,1]$,

$$\inf_g \Bigl(\|f-g\|_p + h^r \bigl\|\varphi^r g^{(r)}\bigr\|_p\Bigr) \asymp \omega_r^{\varphi}(f;h)_p$$

(см. [48], а также [4]).

Модули гладкости изучали и для аналитических функций на множествах комплексной плоскости (см. [43] (модуль определяется разделенными разностями), а также [5]).

3. Модули гладкости и K-функционалы в $\mathbb{T}^d$ и $\mathbb{R}^d$. Для функции $f \in L_p$, $p \in [1,+\infty]$, модуль гладкости естественно ввести следующим образом ($E \subset \mathbb{R}^d$, $E \ne \varnothing$):

$$\omega_r(f;E;h)_p = \sup_{u\in E} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^{\nu} f(\cdot + \nu h u) \right\|_p.$$

Для монотонности по шагу $h > 0$ множество E считаем звездным относительно нуля. Будем предполагать еще, что E — компакт в шаре радиуса 1. Если E — единичный шар, то будем писать ω_r° (наибольший модуль). Наименьший модуль получаем, если в качестве E взять отрезок, выходящий из нуля (модуль по направлению или частный модуль). Если E — объединение d единичных отрезков в направлении прямоугольных осей координат, то будем писать $\omega_r^{+}(f;h)$. В теореме типа Джексона пишут обычно сумму частных модулей в направлении каждой оси (см. [1], п. 5.3.1).

Определение $\Phi_\varepsilon(f)$ см. в конце п. 1, 3.1 – 3.4 есть в [14, 22] (см. также [3], гл. VIII).

3.1. *Неравенство*

$$c_1(r,d)\omega_r^{+}(f;\varepsilon) \le \bigl\|f - \Phi_\varepsilon(f)\bigr\|_\infty \le c_2(r,d)\omega_r^{\circ}(f;\varepsilon)$$

не может выполняться для всех функций из $C(\mathbb{T}^d)$ *при* $r \in \mathbb{N}$ *и* $d \ge 2$, *если* φ *непрерывна на своем носителе, содержащемся в кубе* $[-1,1]^d$.

Введем теперь линеаризованный модуль гладкости четного порядка (μ — конечная комплекснозначная борелевская мера)

$$\tilde{\omega}_{2r}(f;\mu;h) = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2r}{\nu} (-1)^\nu f\big(\,\cdot + (\nu - r)hu\big)\, d\mu(u) \right\|$$

(интеграл от симметричной разности $\dot{\Delta}^{2r}$ по мере μ).

Если $d\mu = \chi_E(u)du$ (χ_E — индикатор E), то в случае, когда E — единичный шар, пишем $\tilde{\omega}_{2r}^{\circ}(f;h)$, а в случае $d\mu = \sum_{j=1}^{d} \chi_{E_j} du_j$, $E_j = [-1,1]$ на оси Ox_j, $1 \le j \le d$, пишем $\tilde{\omega}_{2r}^{+}(f;h)$ ($L_\infty = C$).

3.2. *Пусть множество E имеет следующую симметрию: любая точка E остается в E после перестановки местами двух координат или перемены знака любой координаты. Тогда при $p \in [1, +\infty]$*

$$\tilde{\omega}_2(f,E,h)_p \asymp \tilde{\omega}_2^{\circ}(f,h)_p.$$

3.3. *При $r \ge 2$ и $d \ge 2$ модули $\tilde{\omega}_{2r}^{\circ}$ и $\tilde{\omega}_{2r}^{\square}$ (E — единичный квадрат) не сравнимы в $C(\mathbb{T}^d)$ при $h \to 0$.*

3.4. *Если Δ — оператор Лапласа, $r \in \mathbb{N}$ и $\delta > \dfrac{d-1}{2}$, то при $p \in [1, +\infty]$ и $\varepsilon > 0$*

$$K\big(\varepsilon^{2r}, f, L_p, \Delta^r\big)_p \asymp \left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \big(1 - \varepsilon^{2r}|k|^{2r}\big)_+^{\delta} \hat{f}_k e_k \right\|_p \asymp \tilde{\omega}_{2r}^{\circ}(f,\varepsilon)_p.$$

3.5. *Если $D_{2r} = \sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial^{2r}}{\partial x_j^{2r}}$, $r \in \mathbb{N}$ и $\delta > \dfrac{d-1}{2}$, то при $p \in [1, +\infty]$ и $\varepsilon > 0$*

$$K\big(\varepsilon^{2r}, f, L_p, D_{2r}\big)_p \asymp \left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(1 - \varepsilon^{2r} \sum_{j=1}^{d} k_j^{2r}\right)_+^{\delta} \hat{f}_k e_k \right\|_p \asymp \tilde{\omega}_{2r}^{+}(f,\varepsilon)_p.$$

3.6. *Если $S_\nu^{\square}(f)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, — ν-я квадратная частная сумма ряда Фурье функции $f \in$ $\in C(\mathbb{T}^2)$, а*

$$d_1(f) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \max\big\{|k_1|, |k_2|\big\} \hat{f}_k e_k,$$

то для приближения суммами Марцинкевича имеем

$$\left\| f - \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^{\square}(f) \right\|_\infty \asymp \left\| \int\limits_1^\infty \Big(\dot{\Delta}^2_{t(e_1^\circ + e_2^\circ)/n} + \dot{\Delta}^2_{t(e_1^\circ - e_2^\circ)/n} \Big) f(\cdot) \frac{dt}{t^2} \right\|_\infty \asymp K\left(\frac{1}{n}; f, C, W(d_1)_\infty\right),$$

где (e_1°, e_2°) — стандартный базис в $\mathbb{R}^2$, а под интегралом содержится сумма вторых симметричных разностей в направлении биссектрис первой и четвертой четвертей $\mathbb{R}^2$.

Первое соотношение доказано О. И. Кузнецовой (см. [23]).

3.7. *Если $\Delta_{r,\delta}^{+} f(x) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\nu=0}^{2r} \binom{2r}{\nu} (-1)^\nu f\big(x + (\nu - r)\delta e_j^\circ\big)$, где $\{e_j^\circ\}_1^d$ — стандартный базис, то при $r \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, +\infty]$*

$$\tilde{\omega}^{+}_{2r}(f,h)_p \asymp \sup_{0<\delta\le h} \left\|\Delta^{+}_{r,\delta} f(\cdot)\right\|_p, \qquad \tilde{\omega}^{\circ}_{2r}(f,h)_p \asymp \sup_{0<\delta\le h} \left\|(\Delta^{+}_{1,\delta})^r f(\cdot)\right\|_p.$$

Этот модуль гладкости при $r=1$ иначе использовал Z. Ditzian [15].

3.8. *При любом* $\alpha>0$, $\beta>\dfrac{d-1}{2}$, *натуральном* $r>\dfrac{\alpha}{2}$, $p\in[1,+\infty]$ *и* $d_\alpha(f)\sim \sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j=1}^{d}|k_j|^\alpha \hat{f}_k e_k$

$$K\big(\varepsilon^\alpha, f, L_p, W(d_\alpha)_p\big) \asymp \left\| f - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(1-\sum_{j=1}^{d}\varepsilon^\alpha|k_j|^\alpha\right)_+^\beta \hat{f}_k e_k\right\|_p \asymp \left\|\sum_{j=1}^{d}\int\limits_1^\infty \frac{1}{u^{1+\alpha}}\dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u e_j} f(\cdot)du\right\|_p$$

(*двусторонние неравенства с положительными константами, зависящими только от* d, α, β *и* r).

Таким образом, при целом r можно обойтись обычными модулями, а при нецелых r необходимо вводить специальные.

3.9. *При любом* $\alpha>0$, $\beta>\dfrac{d-1}{2}$, *натуральном* $r>\dfrac{1}{2}(\alpha+d-1)$ *и* $d_\alpha(f)\sim \sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(\varepsilon|k|)^\alpha\hat{f}_k e_k$ *для всех* $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$ *и* $\varepsilon>0$

$$K\big(\varepsilon^\alpha, f, L_p, W(d_\alpha)_p\big) \asymp \left\| f - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}(1-\varepsilon^\alpha|k_j|^\alpha)_+\hat{f}_k e_k\right\|_p \asymp \left\|\int\limits_{|u|\ge 1}\frac{1}{|u|^{\alpha+r}}\dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot)du\right\|_p.$$

Теоремы 3.8 и 3.9 анонсированы автором в статье [23], но доказательство приводится впервые. Так же доказываются и другие теоремы, приведенные в настоящей статье.

***Доказательство теоремы* 3.9.** Сначала, применив принцип сравнения, докажем второе соотношение (о точном порядке приближения), а затем, использовав лемму 2.8, получим первое соотношение. Для этого нам понадобятся некоторые свойства банаховых алгебр $W_0(\mathbb{R}^d)$ и $W(\mathbb{R}^d)$.

Очевидно, что функции из W ограниченные и равномерно непрерывные, а если f принадлежит W_0 (идеал в W), то f принадлежит $C_0(\mathbb{R}^d)$ ($f(\infty)=\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$ в силу леммы Римана – Лебега).

Алгебра $W(\mathbb{R}^d)$ с ростом d расширяется.

А. Начнем с необходимых условий.

Если f принадлежит $W_0(\mathbb{R}^d)$, то ее радиальная часть $f_0(t)$, $t\in(0,+\infty)$ (интегральное среднее по сфере $|x|=t$), удовлетворяет следующим условиям: $f_0\in C^{d_1}(0,+\infty)$, $d_1= =\left[\dfrac{d-1}{2}\right]$,

$$\lim_{t\to+\infty} t^k f_0^{(k)}(t)=0, \qquad 0\le k\le d_1,$$

а при $d\ge 3$ и

$$\lim_{t\to+0} t^k f_0^{(k)}(t)=0, \qquad 0\le k\le d_1.$$

Кроме того, при любом $t > 0$ сходится интеграл $\displaystyle\int_0^t \frac{f_0^{(d_1)}(t+u) - f_0^{(d_1)}(t-u)}{u^{\frac{d+1}{2}-d_1}}du$ (не обязательно абсолютно). См. [22] или п. 6.5.7 в [3].

Б. Функция f принадлежит $W(W_0)$ в точке, если она допускает продолжение с некоторой ее окрестности до функции из $W(\mathbb{R}^d)$ $(W_0(\mathbb{R}^d))$. Как известно, если f принадлежит $W(W_0)$ в любой точке, включая ∞ (окрестность ∞ — это $|x| > M$), то f принадлежит $W(\mathbb{R}^d)$ $(W_0(\mathbb{R}^d))$ (локальные свойства). Различие между функциями из W и W_0 существует только в окрестности ∞.

Если f принадлежит $W(\mathbb{R}^d)$, то $\dfrac{1}{|x|^\alpha}f(x)$ принадлежит $W_0(\mathbb{R}^d)$ в окрестности ∞ при $\alpha > 0$ (см. ниже в самом конце в п. **Д**).

Используется ниже и $\dfrac{1}{f}$-теорема Винера (см., например, [34]): если $f(x) - f(\infty) \in W_0(\mathbb{R}^d)$, $f(\infty) \neq 0$ и $f(x) \neq 0$ для $x \in \mathbb{R}^d$, то и $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(\infty)} \in W_0(\mathbb{R}^d)$.

В. Достаточные условия принадлежности $W_0(\mathbb{R}^d)$.

Если $y = (y_1, \ldots, y_d)$ и $y_j \neq 0$, $1 \le j \le d$, а $y(x) = (y_1 x_1, \ldots, y_d x_d)$, то при любом $h \in \mathbb{R}^d$

$$\big\|f\big(y(\cdot) + h\big)\big\|_W = \|f\|_W.$$

Если ряд Фурье непрерывной периодической функции f сходится абсолютно, то $f \in W(\mathbb{R}^d)$ и $\|f\|_W = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big|\hat{f}_k\big|$. А для этого достаточно, чтобы гладкость функции в $L_2(\mathbb{T}^d)$ была больше $\dfrac{d}{2}$ (см., например, [32], гл. VII, п. 3).

При $0 < a < b$ положим $\chi_{a,b}(x) = 1$ при $|x| \le a$, $\chi_{a,b}(x) = 0$ при $|x| \ge b$ и $\chi_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. В силу формулы обращения преобразования Фурье $\chi_{a,b} \in W_0(\mathbb{R}^d)$ при любом $d \ge 1$.

Если в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^d$ функция f имеет гладкость в L_2 (еще лучше, в C) больше $\dfrac{d}{2}$, то она принадлежит $W_0(\mathbb{R}^d)$ в этой окрестности.

Действительно, после умножения на $\chi_{a,b}(x - x_0)$ при достаточно малых a и b она допускает продолжение до периодической функции из $W(\mathbb{R}^d)$, и после умножения продолженной функции на $\chi_{a,b}(x - x_0)$ получаем функцию из $W_0(\mathbb{R}^d)$.

Г. Дополнение к **В**.

При $d = 1$, как заметил А. Зигмунд, можно предполагать для абсолютной сходимости ряда Фурье гладкость в C только больше нуля, если добавить гладкость в $L_1(\mathbb{T})$ (ограниченность вариации).

Если при $d \ge 2$ добавить выпуклость, то гладкость в C больше $\dfrac{d}{2}$ можно заменить на гладкость в C больше $\dfrac{d-1}{2}$. Точнее, если f, как функция от x_j, $1 \le j \le d$, имеет в окрестности точки частную производную $\dfrac{\partial^{d_1}}{\partial x^{d_1}} f$ $\left(d_1 = \left[\dfrac{d-1}{2}\right]\right)$, удовлетворяющую условию Липшица степени больше $\dfrac{d+1}{2} - d_1 - 1$ равномерно по остальным $d-1$ переменным и выпуклую по x_j (вверх или вниз) или меняющую выпуклость при переходе через точку, то f в этой точке принадлежит W_0 (см. более точную теорему в [22], п. 4.III или в [3], п. 6.4.5).

Д. Радиальные функции $f_0\big(|x|\big)$.

Для того чтобы $F_0\big(|x|\big) \in W_0(\mathbb{R}^d)$ при $d \geq 2$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $f_0\big(|x|\big) \in W_0(\mathbb{R}^1)$ такая, что при $t \geq 0$

$$F_0(t) = \int\limits_0^1 f_0(ut)\big(1-u^2\big)^{\frac{d-3}{2}}\,du.$$

Функция f_0 по F_0 определяется однозначно: при нечетном d простым дифференцированием, а при четном d дифференцированием полуцелого порядка (см. [3], п. 6.3.6 и [49] соответственно). См. также п. 6.5.8 в [3] (используется и асимптотика преобразования Фурье радиальных функций с условиями типа выпуклости).

Преобразование Фурье радиальной функции есть функция радиальная, а множество радиальных функций из $W(\mathbb{R}^d)$ с ростом d уменьшается.

При нечетном d из п. **Б**$_1$ (п. 2) можно вывести следующее достаточное условие.

Если $f_0 \in C[0,+\infty)$, $f_0^{(d_1)} \in AC_{\mathrm{loc}}(0,+\infty)$ и $\int_0^\infty \operatorname{ess\,sup}_{u\geq t}\Big|u^{d_1}f_0^{(d_1+1)}(u)\Big|dt < \infty$, то $f_0\big(|x|\big) \in W(\mathbb{R}^{2d_1+1})$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to+\infty} t^k f_0^{(k)}(t) = 0, \qquad 0 \leq k \leq d_1 = \frac{d-1}{2}.$$

Из приведенной выше формулы видно, что если $f_0(t) = t^\gamma$ и $\gamma > -1$, то и $F_0(t) = ct^\gamma$, $c \neq 0$. Так что $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, принадлежит W_0 вне окрестности ∞, а $|x|^\alpha$, $\alpha < 0$, принадлежит W_0 вне окрестности нуля.

***Пример* 1.** $\big(1-|x|^\alpha\big)_+^\beta$ принадлежит $W(\mathbb{R}^d)$ при $\alpha > 0$ и $\beta > \dfrac{d-1}{2}$, и только в этом случае.

Необходимость условия на β следует из п. **А** при $t = 1$.

При любом $m \in \mathbb{N}$ в достаточно малой окрестности нуля

$$\big(1-|t|^\alpha\big)_+^\beta = \sum_{k=0}^m a_{k,\alpha,\beta}|t|^{k\alpha} + h(|t|)$$

$\big(h \in C^n$ при $n < \alpha(m+1)\big)$. Выбираем m так, чтобы $\alpha(m+1) > \dfrac{d}{2}+1$ (см. п. **В**). В точках, в которых $|x| = 1$, применяем п. **Г**.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству второго соотношения в теореме 3.9. В силу принципа сравнения нужно проверить, что $g = \dfrac{\psi}{\varphi}$ и $\dfrac{1}{g} \in W(\mathbb{R}^d)$, где

$$\psi(x) = \int\limits_{|u|\geq 1} \frac{\sin^{2r}(x,u)}{|u|^{\alpha+d}}du, \qquad \varphi(x) = 1 - \big(1-|x|^\alpha\big)_+^\beta.$$

Очевидно, что $\psi(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Применяя к синусу формулу Эйлера и бином Ньютона, получаем

$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha}\binom{2r}{r} + \sum_{\nu=0,\ \nu\neq r}^{2r}\binom{2r}{\nu}(-1)^{\nu+r}\int\limits_{|u|\geq 1}\frac{1}{|u|^{\alpha+d}}e^{2i(r-\nu)(x,u)}du.$$

Отсюда $\psi(\infty) = \dfrac{1}{\alpha}\dbinom{2r}{r}$, а $\psi - \psi(\infty) \in W_0(\mathbb{R}^d)$ (по определению алгебры W_0).

Из примера **Д** и $\dfrac{1}{f}$-теоремы Винера следует, что вне окрестности нуля

$$\frac{1}{\varphi(x)} - 1 = \frac{1}{1 - \big(1 - |x|^\alpha\big)_+^\beta} - 1 \in W_0(\mathbb{R}^d).$$

Следовательно, вне окрестности нуля $g - g(\infty) = \dfrac{\psi}{\varphi} - \psi(\infty) \in W_0(\mathbb{R}^d)$.

Остается окрестность нуля, в которой имеем

$$\psi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\sin^{2r}(x,u)}{|u|^{\alpha+d}}du - \int\limits_{|u|\le 1} \frac{\sin^{2r}(x,u)}{|u|^{\alpha+d}}du.$$

Первый интеграл после замены переменных (вращение $\mathbb{R}^d$) равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\sin^{2r}(x,u)}{|u|^{\alpha+d}}du = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\sin^{2r}(|x|\cdot|u|)}{|u|^{\alpha+d}}du = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2r} u|x|}{u^{\alpha+1}}du = |x|^\alpha \int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2r} u}{u^{\alpha+1}}du.$$

Аналогично получаем $\psi(x) = |x|^\alpha \displaystyle\int_{|x|}^\infty \frac{\sin^{2r} t}{t^{\alpha+1}}dt$, где $\dfrac{\psi(x)}{|x|^\alpha}$ принадлежит W_0 вне окрестности ∞ как целая функция от $|x|$. Кроме того,

$$\frac{\varphi(x)}{|x|^\alpha} = \frac{1 - \big(1 - |x|^\alpha\big)_+^\beta}{|x|^\alpha} = \varphi_1(|x|^\alpha),$$

где $\varphi_1(0) = \beta$ и φ_1 аналитична в некоторой окрестности нуля. Следовательно, и $\dfrac{1}{\varphi_1(|x|^\alpha)}$ принадлежит $W_0(\mathbb{R}^d)$ в этой окрестности нуля. Поэтому и в окрестности нуля

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{|x|^\alpha}\frac{|x|^\alpha}{\varphi(x)} \in W_0(\mathbb{R}^d).$$

Таким образом, и в целом $g(x) - g(\infty) = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} - \psi(\infty)$ принадлежит $W_0(\mathbb{R}^d)$, а в силу теоремы Винера и $\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{\psi(\infty)}$ принадлежит $W_0(\mathbb{R}^d)$. Второе соотношение в теореме 3.9 доказано.

Для вывода формулы для K-функционала понадобится лемма 2.8, сформулированная для функций d переменных (доказательство не меняется).

Теперь докажем первое соотношение в теореме 3.9. Для доказательства условия $\alpha)$ в силу принципа сравнения нужно проверить, что $\dfrac{\varphi(x)}{|x|^\alpha}$ принадлежит $W(\mathbb{R}^d)$. А это уже доказано в малой окрестности нуля, в окрестности точек с $|x| = 1$ и $|x| > 1$.

Условие $\beta)$ выполняется всегда, если есть сходимость в $C(\mathbb{T}^d)$ (по теореме Банаха – Штейнгауза). Условие $\gamma)$ выполняется, так как уже доказано, что

$$\frac{|x|^\alpha}{\varphi(x)}\big(1-|x|^\alpha\big)_+^\beta \in W_0(\mathbb{R}^d).$$

Теорема 3.9 доказана.

***Замечание* 2** (о непериодических функциях). Модули гладкости функции $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ из $L_p(\mathbb{R}^d)$ определяются обычным образом, как и K-функционалы. Мультипликатор интегралов Фурье в L_p, как ограниченный линейный оператор, определяемый на функциях из $L_2 \cap L_p$, определяется одной ограниченной и измеримой функцией $\varphi:\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ (см. [31], гл. IV), которую, как доказано в [50], можно при $p\in(1,+\infty)$, не уменьшая общности, считать ограниченной и непрерывной почти всюду, следующим образом:

$$f(x) \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\hat{f}(y)e^{i(x,y)}dy.$$

А метод $\Phi_\varepsilon(f)$ суммирования интегралов Фурье равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\varepsilon y)\hat{f}(y)e^{i(x,y)}dy \qquad \left(\varphi(0)=\frac{1}{(2\pi)^d}\right).$$

Принцип сравнения остается в той же формулировке и с тем же достаточным условием $\|g\|_W < < \infty$. Для норм мультипликаторов рядов и интегралов Фурье, определяемых одной и той же функцией φ, есть простые связи в одну и другую стороны (см. [32], гл. VII, пп. 3.8 и 3.18), так что подобные приведенным выше соотношения для периодических функций и рядов Фурье имеют место и для интегралов Фурье.

Приведем лишь один пример [51]. Если $\Phi_\varepsilon(f;x)=\dfrac{1}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x+\varepsilon y)\hat{\varphi}(y)dy$, где

$$\varphi(x)=\big(1-|x|^{2r}\big)_+^\delta, \quad r\in\mathbb{N}, \quad \delta>\frac{d-1}{2},$$

то при $p\ge 1$ в $L_p(\mathbb{R}^d)$ $(L_\infty = C)$

$$\|f-\Phi_\varepsilon(f)\|_p \asymp \left\| \int\limits_{|u|\le 1} \dot{\Delta}^{2r}_{\varepsilon u} f(\cdot)du \right\|_p \asymp \inf_g \left\{\|f-g\|_p + \varepsilon^{2r}\|\Delta^r g\|_p\right\},$$

где $\Phi_\varepsilon(f)$ — средние Бохнера – Рисса.

Но в случае пространства L_p, $p\in(1,+\infty)$, есть более слабые достаточные условия (например, теорема Марцинкевича о мультипликаторах, см. [31]).

Таким образом получаются, например, неравенства

$$K\big(\varepsilon^{2r}; f; L_p, \Delta^r\big) \asymp \tilde{\omega}^\circ_{2r}(f,\varepsilon)_p \asymp \omega^\circ_{2r}(f,\varepsilon)_p.$$

(См. пп. 8.2.9 и 8.3.2в) в [3].)

Еще нужно отметить, что в случае числовых функций нескольких переменных имеются разные модули гладкости (полные, частные, смешанные). По поводу соотношений между ними см. [6, 52], а также [53].

***Пример* 2.** Полный модуль гладкости второго порядка ведет себя так, как сумма двух частных модулей того же порядка и смешанного модуля в случае пространства $L_1(C)$ и как сумма частных модулей в L_p, если $p \in (1, +\infty)$.

Приведем еще несколько замечаний общего характера.

В 1919 г. вышла первая книга по теории приближений, в которой собраны теоремы Чебышева, Вейерштрасса, Маркова, Бернштейна, Джексона, Лебега, Фейера и самого автора книги Валле Пуссена. Появились прямые и обратные теоремы конструктивной теории функций (термин Бернштейна), и стали вычислять наилучшие приближения отдельных функций полиномами данной степени (см., например, [1], гл. 7). А после заметки Колмогорова (1935 г.) возникли задачи о приближении класса функций (например, W^r) и поперечники классов. Одно из последних прямых обобщений теоремы Колмогорова см. в [54].

В настоящей статье изучается приближение индивидуальных функций конкретными операторами. Упомянем еще один результат в этом направлении. Это теорема типа Вороновской с указанием погрешности приближения $\omega_{2m}\left(f; \dfrac{1}{n}\right)$, $m \in \mathbb{N}$. Теорема является новой даже для средних Фейера рядов Фурье [55]. А из таких теорем можно вывести и теоремы об асимптотике приближения некоторых классов.

4. Случай банахова пространства. Пусть E_1 и E_2 — два нормированных пространства с нормами $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ соответственно, а $f\colon E_1 \to E_2$ — ограниченная функция $\big(\|f\|_\infty = = \sup_{x\in E}|f(x)|_2 < \infty\big)$.

Предположим еще, что при любых x и $y \in E_1$ выполняется $|f(x+y)|_2 \le |f(x)|_2$.

Модуль гладкости порядка $r \in \mathbb{N}$ и шага $|h|_1$ определим обычным образом:

$$\omega_r(f, |h|_1) = \sup_{x\in E_1, |\delta|_1 \le |h|_1} \left|\Delta_\delta^r f(x)\right|_2, \qquad \Delta_\delta^r f(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu f(x+\nu\delta).$$

$\lim_{h\to 0}\omega_r(f, |h|_1) = 0$ — это критерий равномерной непрерывности f (для доказательства при $r \ge 2$ можно применить $r-1$ раз обобщенное неравенство Маршо, доказанное ниже перед п. 4.4). Всегда (см. ниже п. 4.2)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega_r(f, |h|_1)}{|h|_1^r} = \sup_{h\in E_1} \frac{\omega_r(f, |h|_1)}{|h|_1^r}.$$

Если верхняя грань конечна, то будем писать $f \in W^r$. $W^r \subset W^{r-1}$ (см. ниже обобщенное неравенство Маршо).

Если f дифференцируема на E_1, т. е. существует линейный ограниченный оператор $f'(x)\colon E_1 \to E_2$ такой, что при $x \in E_1$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{|h|_1} - f'(x)h^\circ\right) = 0 \qquad \left(h^\circ = \frac{h}{|h|_1}\right),$$

то

$$\sup_h \frac{\omega_1(f, |h|_1)}{|h|_1} = \sup_x \|f'(x)\|_{E_1\to E_2}.$$

При любом $r \in \mathbb{N}$ ω_r убывает вместе с $|h|_1$ и

$$\omega_r(f;|h|_1) \le 2\omega_{r-1}(f;|h|_1) \le \ldots \le 2^{r-1}\omega_1(f;|h|_1) \le 2^r\|f\|_\infty \equiv 2^r\omega_0(f;|h|_1).$$

Исходя из тождества

$$\Delta_{n\delta}^r f(x) = \sum_{\nu_1=0}^{n-1}\ldots\sum_{\nu_r=0}^{n-1}\Delta_\delta^r f\bigl(x+(\nu_1+\ldots+\nu_r)\delta\bigr), \quad n\in\mathbb{N} \tag{$*$}$$

(при $r=1$ оно очевидно, а далее доказывается по индукции), получаем следующее.

4.1. $\omega_r(f;n|h|_1) \le n^r\omega_r(f;|h|_1),\ \omega_r(f;\lambda|h|_1) \le (\lambda+1)^r\omega_r(f;|h|_1),\ \lambda>0.$

Кроме того, при $|u|_1 \le |v|_1$

$$\frac{\omega_r(f;|v|_1)}{|v|_1^r} \le 2^r\frac{\omega_r(f;|u|_1)}{|u|_1^r}$$

(*подробнее см., например, в* [3 – 5]).

4.2. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1^r} = \sup_h\dfrac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1^r}.$

Для доказательства обозначим верхнюю грань через $M_r\in(0,+\infty]$ и возьмем произвольное число $M\in(0,M_r)$. Тогда существует такое $\delta\ne 0$, что $\omega_r(f;|\delta|_1) > M|\delta|_1^r$ и при $0<|h|_1\le$ $\le|\delta|_1$, и $n=\left[\dfrac{|\delta|_1}{|u|_1}\right]$ (целая часть); учитывая, что $n|h|_1 \le |\delta|_1 < (n+1)|h|_1$ и $h\to 0$ при $n\to\infty$, из п. 4.1 получаем

$$\omega_r(f;|\delta|_1) \le \left(\frac{|\delta|_1}{|h|_1}+1\right)^r\omega_r(f;|h|_1) \le (n+2)^r\omega_r(f;|h|_1).$$

Поэтому

$$M < \frac{\omega_r(f;|\delta|_1)}{|\delta|_1^r} \le \frac{\omega_r(f;|\delta|_1)}{n^r|h|_1^r} \le \left(1+\frac{2}{n}\right)^r\frac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1^r} \le \left(1+\frac{2}{n}\right)^r M_r$$

и

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1^r} = M_r.$$

4.3. *При любом целом* $k\ge 0$

$$\omega_r(f;|h|_1) \le \frac{r}{2}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{2^{\nu r}}\omega_{r+1}(f;2^\nu|h|_1) + \frac{1}{2^{(k+1)r}}\omega_r(f;2^{k-1}|h|_1).$$

Для доказательства применяем тождество $(*)$ при $n=2$:

$$2^r\Delta_h^r f(x) - \Delta_{2h}^r f(x) = \sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}\Bigl[\Delta_h^r f(x) - \Delta_h^r f(x+\nu h)\Bigr] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r}\binom{r}{\nu}\sum_{m=0}^{\nu-1}\Delta_h^{r+1}f(x+mh) = \sum_{m=0}^{r-1}\Delta_h^{r+1}f(x+mh)\sum_{\nu=m+1}^{r}\binom{r}{\nu}$$

(изменен порядок суммирования). В результате имеем

$$\left|2^r \Delta_h^r f(x)\right|_2 \leq \omega_r(f;2|h|_1) + \omega_{r+1}(f;|h|_1) \sum_{m=0}^{r-1} \sum_{\nu=m+1}^{r} \binom{r}{\nu}.$$

Но двойная сумма равна $r \cdot 2^{r-1}$. Поэтому

$$\omega_r(f;|h|_1) \leq \frac{r}{2}\omega_{r+1}(f;|h|_1) + \frac{1}{2^r}\omega_r(f;2|h|_1).$$

Заменяя в этом неравенстве $|h|_1$ на $2|h|_1$ и применяя его k раз, получаем искомое соотношение.

Перейдем теперь от сумм к интегралам.

Если φ и ψ — положительные функции на $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, φ убывает, а ψ возрастает и при некотором $c > 0$ $\psi(x+1) \leq c\psi(x)$ для $x \in \mathbb{R}_+$, то

$$\sum_{\nu=1}^{k} \varphi(\nu)\psi(\nu) \leq c \int_0^k \varphi(x)\psi(x)dx.$$

В данном случае, когда $\psi(x) = \omega_{r+1}(f;2^x|h|_1)$, $c = 2^{r+1}$ (см. п. 4.1 при $n = 2$). Поэтому

$$\omega_r(f;|h|_1) \leq \frac{r}{2}\omega_{r+1}(f;|h|_1) + \frac{1}{2^{(k+1)r}}\omega_r(f;2^{k+1}|h|_1) + 2^{r+1}\int_0^k \frac{\omega_{r+1}(f;2^x|h|_1)}{2^{rx}}dx,$$

и после замены $2^x|h|_1 = v$ в интеграле

$$\omega_r(f;|h|_1) \leq \frac{r}{2}\omega_{r+1}(f;|h|_1) + \frac{1}{2^{(k+1)r}}\omega_r(f;2^{k+1}|h|_1) + \frac{2^{r+1}}{\ln 2}|h|_1^r \int_{|h|_1}^{2^k|h|_1} \frac{\omega_{r+1}(f;v)}{v^{r+1}}dv.$$

При $|h|_1 \leq 1$, выбирая k так, чтобы $1 \leq 2^k|h|_1 < 2$, получаем

$$\omega_r(f;|h|_1) \leq \frac{1}{2^r}\omega_r(f;4)|h|_1^r + \frac{r}{2}\omega_{r+1}(f;|h|_1) + \frac{2^{r+1}}{\ln 2}|h|_1^r \int_{|h|_1}^{2} \frac{\omega_{r+1}(f;v)}{v^{r+1}}dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^r}\omega_r(f;4)|h|_1^r + c(r)|h|_1^r \int_{|h|_1}^{2} \frac{\omega_{r+1}(f;u)}{u^{r+1}}du$$

(применено неравенство из п. 4.1 при $|u|_1 = |h|_1$ и $|v|_1 \in \big[|h|_1, 2\big]$).

Это обобщенное неравенство Маршо.

4.4. *Если* $\omega_{r+1}(f;1) = 0$, *то при любом* $h \in E_1$ $\omega_r(f;|h|_1) \equiv \omega_r(f;1)|h|_1^r$.

В силу монотонности $\omega_{r+1}(f;|h|_1) = 0$ при $|h|_1 \leq 1$, а значит, и при всех h (см. п. 4.1). В силу пп. 4.3 и 4.1

$$\omega_r(f;|h|_1) \leq \frac{1}{2^{(k+1)r}}\omega_r(f;2^{k+1}|h|_1) \leq \omega_r(f;|h|_1).$$

Поэтому при любом k и $h \neq 0$

$$\frac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1^r}=\frac{\omega_r(f;2^{k+1}|h|_1)}{2^{(k+1)r}|h|_1^r}\quad\text{или}\quad\frac{\omega_r\left(f;\dfrac{|h|_1}{2^{k+1}}\right)}{\left(\dfrac{|h|_1}{2^{k+1}}\right)^r}=\frac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1^r}.$$

Осталось перейти к пределу при $k\to\infty$ (см. п. 4.2) и положить $|h|_1=1$.

4.5. *Для любых r и $m\in\mathbb{N}$ существует $c(r,m)$ такое, что при $|h|_1\le 1$:*

а) $\omega_{r+m}^r(f;1)\omega_r^{r+m}(f;|h|_1)\le c(r,m)\omega_r^{r+m}(f;1)\omega_{r+m}^r(f;|h|_1)$;

б) $\omega_{r+m}(f;1)\omega_r(f;|h|_1^{r+m})\le c(r,m)\omega_r(f;1)\omega_{r+m}(f;|h|_1^r)$;

в) $\omega_{r+m}(f;1)\omega_r(f;|h|_1)\omega_m(f;|h|_1)\le c(r,m)\omega_r(f;1)\omega_m(f;1)\omega_{r+m}(f;|h|_1)$.

Доказательство не отличается от приведенного в [3], п. 4.6.5.

4.6. *Если E_2 — банахова алгебра $\big(|fg|_2\le|f|_2|g|_2\big)$, то при $r=1$ и $|h|_1\le 1$*

$$\omega(fg;|h|_1)\le\|f\|_\infty\omega(g;|h|_1)+\|g\|_\infty\omega(f;|h|_1),$$

а при $r\ge 2$

$$\omega_r(fg;|h|_1)\le c(r)\Bigg[\|g\|_\infty\omega_r(f;|h|_1)+\|f\|_\infty\omega_r(g;|h|_1)+$$

$$+\|f\|_\infty\|g\|_\infty|h|_1^r+\|f\|_\infty\|g\|_\infty\left(\frac{\omega_r(f;|h|_1)}{\omega_r(f;1)}+\frac{\omega_r(g;|h|_1)}{\omega_r(g;1)}\right)\Bigg],$$

где по предположению $\dfrac{0}{0}=0$.

В [3] такое неравенство доказано для случая $f\in L_p$, $p\in[1,+\infty]$, и $g\in L_\infty$ (с использованием производных).

Исходим из того, что при некоторых положительных числовых коэффициентах $\{a_{k,r}\}$, $\{b_{k,r}\}$ и $\{c_{k,r}\}$ (при $r=1$ сумма отсутствует)

$$\Delta_h^r(fg;x)=g(x)\Delta_h^r f(x)+f(x+rh)\Delta_h^r g(x)+\sum_{k=1}^{r-1}a_{k,r}\Delta_{b_{k,r}h}^k f(x)\Delta_{c_{k,r}h}^{r-k}g(x).$$

Следовательно,

$$\omega_r(fg;|h|_1)\le\|g\|_\infty\omega_r(f;|h|_1)+\|h\|_\infty\omega_r(g;|h|_1)+c_1(r)\sum_{k=1}^{r-1}\omega_k(f;|h|_1)\omega_{r-k}(g;|h|_1).$$

При $r\ge 2$ предположим сначала, что $\omega_r(f;1)\omega_r(g;1)\ne 0$. Применяем п. 4.5 а):

$$\sum_{k=1}^{r-1}\omega_k(f;|h|_1)\omega_{r-k}(f;|h|_1)\le c_2(r)\sum_{k=1}^{r-1}\frac{\omega_k(f;1)}{\omega_r^{\frac{k}{r}}(f;1)}\omega_r^{\frac{k}{r}}(f;|h|_1)\frac{\omega_{r-k}(g;1)}{\omega_{r-k}^{1-\frac{k}{r}}(g;1)}\omega_r^{1-\frac{k}{r}}(g;|h|_1).$$

Учтем теперь, что $\omega_k(f;1)\le 2^k\|f\|_\infty$, $\omega_{r-k}(g;1)\le 2^{r-k}\|g\|_\infty$, а при $\delta\in[0,1]$, $x_1>0$ и $x_2>0$

$$x_1^\delta x_2^{1-\delta}\le\max\{x_1,x_2\}<x_1+x_2.$$

Искомое неравенство доказано.

Пусть теперь $\omega_r(f;1)=0$, а $\omega_r(g;1)\neq 0$. Тогда в силу п. 4.4

$$\omega_{r-1}(f;|h|_1)\equiv\omega_{r-1}(f;1)|h|_1^{r-1}.$$

При $r\geq 3$ применяем неравенство Маршо из п. 4.3 в интегральной форме с заменой r на $r-2$:

$$\omega_{r-2}(f;|h|_1)\leq 2^r\omega_{r-2}(f;1)|h|_1^{r-2}+c_3(r)\omega_{r-1}(f;1)|h|_1^{r-2}\leq c_4(r)\omega_{r-2}(f;1)|h|_1^{r-2}.$$

Следовательно, при любом $k\in[1,r-1]$ $\omega_{r-k}(f;|h|_1)\leq c_5(r)\omega_{r-k}(f;1)|h|_1^{r-k}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{r-1}\omega_k(f;|h|_1)\omega_{r-k}(g;|h|_1)=\sum_{k=1}^{r-1}\omega_{r-k}(f;|h|_1)\omega_k(g;|h|_1)\leq$$
$$\leq c_6(r)\sum_{k=1}^{r-1}\omega_{r-k}(f;1)|h|_1^{r-k}\omega_k(g;|h|_1).$$

В силу п. 4.1 ($|v|_1=1$)

$$|h|_1^{r-k}\leq\frac{2^{r-k}\omega_{r-k}(g;|h|_1)}{\omega_{r-k}(g;1)},$$

а в силу п. 4.5 в)

$$\frac{\omega_{r-k}(g;|h|_1)\omega_k(g;|h|_1)}{\omega_{r-k}(g;1)}\leq c_7(r)\frac{\omega_r(g;|h|_1)\omega_k(g;1)}{\omega_r(g;1)}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{r-1}\omega_k(f;|h|_1)\omega_{r-k}(g;|h|_1)\leq c_8(r)\frac{\omega_r(g;|h|_1)}{\omega_r(g;1)}\sum_{k=1}^{r-1}\omega_{r-k}(f;1)\omega_k(g;1),$$

и можно еще учесть, что $\omega_m(f;|h|_1)\leq 2^m\|f\|_\infty$.

Остался случай $\omega_r(f;1)=\omega_r(g;1)=0$. В силу предыдущего при $k\in[1,r-1]$

$$\omega_k(f;|h|_1)\leq c_5(r)\omega_k(f;1)|h|_1^k,\qquad \omega_{r-k}(g;|h|_1)\leq c_5(r)\omega_{r-k}(g;1)|h|_1^{r-k}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{r-1}\omega_k(f;|h|_1)\omega_{r-k}(g;|h|_1)\leq(c_5(r))^2\sum_{k=1}^{r-1}\omega_k(f;1)\omega_{r-k}(g;1)|h|_1^r.$$

Свойство 4.6 доказано.

***Замечание* 3.** Предположим, что в формуле из п. 4.6 при $\omega_r(g;1)=0$ и $\omega_r(f;1)\neq 0$ можно убрать последнее слагаемое.

Учитывая, что в этом случае $\omega_r(f+g;|h|_1)\equiv\omega_r(f;|h|_1)$, а $g^2=(f+g)g-fg$, получаем

$$\omega_r(g^2;|h|_1) \le \omega_r((f+g)g;|h|_1) + \omega_r(fg;|h|_1) \le$$
$$\le c(r)\Big[\|g\|_\infty \omega_r(f;|h|_1) + \|f+g\|_\infty \|g\|_\infty |h|_1^r + \omega_r(fg;|h|_1)\Big].$$

Заменяя f на εf и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\omega_r(g^2;|h|_1) \le c(r)\|g\|_\infty^2 |h|_1^r, \qquad g^2 \in W^r.$$

Если считать, что g — „полином степени не выше $r-1$”, то это неравенство типа Маркова.

Можно изучать и модули гладкости нецелого порядка $r>0$.

Те же свойства 4.1 – 4.6 справедливы для вектор-функций, например, на шаре $|x|_1 \le 1$ (при естественных ограничениях на величину шага $|h|$).

Функцию, заданную на шаре, можно продолжить с сохранением модуля непрерывности на все пространство, полагая, например,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{|x|_1}(2-|x|_1)\right), \quad 1<|x|\le 2, \qquad f(x)=f(0), \quad |x|_1>2.$$

По-видимому, можно продолжить функцию с сохранением ω_r при $r \ge 2$ (по порядку) методом Хестенса (см., например, [4], [3], п. 4.6.12).

Это были полные модули гладкости.

Частный модуль гладкости (в направлении единичного вектора e) определяется разностью

$$\underset{e\ h}{\Delta^r} f(x) = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} f(x+\nu h e), \qquad |h|_1 \in (0,1].$$

Смешанная разность (e_1 и e_2 — два линейно независимых единичных вектора)

$$\underset{e_1,e_2\,h_1,h_2}{\Delta^{r_1,r_2}} f(x) = \underset{e_2\,h_2}{\Delta^{r_2}}\left(\underset{e_1\,h_1}{\Delta^{r_1}} f\right)(x).$$

Соотношения между полным модулем гладкости, частными и смешанными в случае числовых функций на $\mathbb{R}^d$ и стандартного базиса выводятся в [6] из некоторых тождеств, доказанных непосредственно (без использования преобразования Фурье). Так что те же неравенства справедливы и в случае банаховых пространств.

В начале этого пункта введена полунорма

$$|f|_{W^r} = \sup_h \frac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1^r} = \lim_{h\to 0} \frac{\omega_r(f;|h|_1)}{|h|_1}.$$

Положим для ограниченной $f\colon E_1 \to E_2$

$$K_r(\varepsilon, f) = \inf_{g\in W^r} \{|f-g|_2 + \varepsilon |g|_{W^r}\} \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0.$$

Лемма 1. *Для того чтобы $K_r(\varepsilon^r, f) \asymp \omega_r(f;\varepsilon)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой такой функции f при любом $\varepsilon>0$ существовала такая $g_\varepsilon(f) \in W^r$, что*

$$|f-g_\varepsilon(f)|_2 \le c(r)\omega_r(f,\varepsilon), \qquad |g_\varepsilon(f)|_{W^r} \le c(r)\frac{\omega_r(f,\varepsilon)}{\varepsilon^r}.$$

Необходимость и достаточность очевидны.

Отметим еще, что при $E_1 = \mathbb{R}$ можно ввести интеграл (например, как предел интегральных сумм). Но тогда можно ввести и функцию типа Стеклова

$$f_{r,h}(x) = \frac{1}{h^r}\int\limits_0^h d\delta_1 \int\limits_0^h d\delta_2 \ldots \int\limits_0^h \sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu+1}\binom{r}{\nu} f\big(x + \nu \sum_{m=1}^{r} \delta_m\big) d\delta_r, \quad h > 0.$$

Ее применение см. в [3], пп. 4.6.7 – 4.6.10. Легко проверить, что

$$|f - f_{r,h}|_2 \le \omega_r(f, rh), \qquad |f_{r,h}|_{W^r} \le \big(2^r - 1\big)\frac{\omega_r(f, rh)}{h^r},$$

так как

$$\Delta_h^r f_{r,h}(x) = \frac{1}{h^r}\int\limits_0^h d\delta_1 \ldots \int\limits_0^h \sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu+1}\binom{r}{\nu}\Delta_h^r f\left(x + \nu\sum_{m=1}^{r}\delta_m\right) d\delta_r,$$

$$\|f_{r,h}\|_{W^r} \le \frac{1}{h^r}\sum_{\nu=1}^{r}\binom{r}{\nu}\omega_r(f;h) = (2^r - 1)\frac{\omega_r(f;h)}{h^r}.$$

Производную $f^{(r)}$ можно определить как линейный ограниченный оператор $E_1 \to E_2$ такой, что

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{\Delta_h^r f(x)}{|h|_1} - f^{(r)}(x)(h^\circ)^r\right|_2 = 0 \qquad \left(h^\circ = \frac{h}{|h|_1}\right).$$

Следует заметить, что из существования $f^{(r)}$ при $r \ge 2$ не следует, возможно, существования $f^{(r-1)}$.

5. Некоторые нерешенные вопросы. 1. Как выглядит точный порядок приближения суммами Марцинкевича (средние арифметические кубических частных сумм Фурье) для периодических функций трех и более переменных (какой разностный оператор нужно использовать)? См. п. 3.6 ($d = 2$).

2. Определить специальный модуль непрерывности ω^* такой, чтобы для всех $f \in C(\mathbb{T})$ и $n \in \mathbb{N}$ было

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\big|f(\cdot) - S_k(f;\cdot)\big|\right\|_\infty \asymp \omega^*(f;\varepsilon_n)$$

при некоторой нуль-последовательности $\{\varepsilon_n\}$, не зависящей от функции.

3. В этой статье для оценки порядка приближения сверху и снизу сверткой функции с данным ядром применяется метод мультипликаторов Фурье. Поэтому ответ дается в терминах коэффициентов ядра, т. е. спектра интегрального оператора. А при каких достаточно общих условиях на само ядро K_n

$$\|f - f * K_n\| \asymp \omega_r\left(f; \frac{1}{n}\right)?$$

При $r = 1$ и $r = 2$ эта задача решена в [57]. А какой ответ при $r \ge 3$?

4. В п. 3 настоящей статьи изучается приближение операторами эллиптического типа, у которых символ равен нулю только в нуле.

Следующий (первый) случай другого типа изучен Э. С. Белинским [58]:

Пусть $D_r = \dfrac{\partial^{r_1+\ldots+r_d}}{\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_d^{r_d}}$ — смешанная производная порядка $r = \sum_{j=1}^d r_j$, где

$$0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d.$$

Предположим, что $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0,\ 1 \le j \le d$, и для $s \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\delta_s(f) = \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}_k e_k, \qquad \rho(s) = \left\{k \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ 1 \le j \le d\right\}.$$

Тогда при $p \in (1, +\infty)$ и $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] = 2^n$ (J — единичный оператор)

$$K\big(\varepsilon^{r_1}, f, L_p, W(D_r)_p\big) \asymp \left\| f - \sum_{s\,:\,(s,r)\le r,n} \big(J - 2^{-r,n}D_r\big)\delta_s(f)\right\|_p.$$

Каков модуль гладкости, порожденный смешанной производной в $L_p,\ 1 \le p \le \infty$, и каков K-функционал в C?

5. Для функций на отрезке роль концевых точек особая.

Два важных результата о Д-Т модулях см. в замечании 1 (п. 2).

Приведем еще один результат (V. Totik [59], см. также [4]):

для классических полиномов Бернштейна B_n на $[-1, 1]$

$$\|f - B_n(f)\|_C \asymp \omega_2^{\varphi}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Но существенно ранее были хорошо изучены приближения алгебраическими полиномами (прямые и обратные теоремы) с учетом положения точки (С. М. Никольский, А. Ф. Тиман, В. К. Дзядык, G. Freud, Ю. А. Брудный, Р. М. Тригуб). (См., например, [4], [3], п. 4.7.) А для тех же полиномов Бернштейна давно доказано, что на $[-1, 1]$

$$|f(x) - B_n(f, x)| \le c\omega_2\left(f; \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)_\infty,$$

но такая же оценка приближения снизу не является справедливой [60].

Для функций на отрезке есть ряды Фурье – Якоби, для функций на множествах комплексной плоскости — ряды Фабера. Как сформулировать и применить принцип сравнения методов суммирования таких рядов (с учетом положения точки)?

Возможны ли двусторонние оценки приближения на $[-1, 1]$ вида $\omega_r\left(f; \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)_\infty$?

В случае нелинейных операторов такие приближения возможны:

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любой функции $f \in C^s[-1, 1]$ при $r \in \mathbb{N}$ и $n \ge \max(r + s - 1, 3)$ существует полином p_n степени не выше n такой, что при $x \in [-1, 1]$

$$\delta_n^s(x)\omega_r\big(f^{(s)}; \delta_n(x)\big) \le p_n(x) - f(x) \le c(s, r)\delta_n^s(x)\omega_r\big(f^{(s)}; \delta_n(x)\big),$$

где $\delta_n(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ (см. [57]).

В заключение выражаю благодарность Ю. А. Брудному за ценные замечания, учтенные в статье.

Литература

1. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, Москва (1960).
2. O. V. Besov, *Investigation of a family of functions spaces in connection with theorems of imbedding and extension*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **60**, 42 – 81 (1961).
3. R. Trigub, E. Belinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer-Springer, Dordrecht (2004).
4. R. A. De Vore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer, Berlin; New York (1993).
5. V. K. Dzyadyk, I. A. Shevchuk, *Theory of uniform approximation of functions by polinomials*, Walter de Gruyter, Berlin; New York (2008).
6. М. Ф. Тиман, *О разностных свойствах функций многих переменных*, Изв. АН СССР, сер. мат., **33**, №3, 667 – 676 (1969).
7. Yu. A. Brudnyi, *Extension of functions preserving order of moduli of continuity. Studies in function theory of several variables*, State Univ., Yaroslavl (1980).
8. С. Н. Бернштейн, *О свойствах однородных функциональных классов*, Докл. АН СССР, **57**, 111 – 114 (1947).
9. J. Marcinkiewics, A. Zygmund, *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series*, Fund. Math., **26**, 1 – 43 (1936).
10. J. Boman, *Equivalence of generalized modulus of continuity*, Ark. Mat., **18**, №1, 73 – 100 (1980).
11. R. M. Trigub, *Linear summation methods and the absolute convergence of Fourier series*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **32**, 24 – 29 (1968).
12. I. Bergh, I. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer (1976).
13. Z. Ciesielski, *Bases and K-functionals for Sobolev spaces on compact manifolds of class C^∞*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **164**, 197 – 202 (1983).
14. R. M. Trigub, *A formula for the K-functional of a couple of spaces of functions of several variables*, Studies in the Theory of Functions of Several Real Variables, Yaroslavl, 122 – 127 (1988).
15. Z. Ditzian, *A measure of smothness related to the Laplacian*, Trans. Amer. Math. Soc., **326**, 407 – 422 (1991).
16. R. M. Trigub, *Constructive characterizations of some functions classes*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **29**, 615 – 630 (1965).
17. V. V. Zhuk, *On approximation of periodic functions by linear methods of Fourier series*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **173**, 30 – 33 (1967).
18. V. V. Zhuk, *Approximation of periodic functions*, Leningrad. Univ. Press, Leningrad (1982) (in Russian).
19. E. A. Storozhenko, *On a problem of Hardy – Littlewood*, Mat. Sb., **119**, 564 – 583 (1982).
20. M. F. Timan, V. G. Ponomarenko, *On approximation of periodic functions of two variables by summs of Marcinkiewicz type*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **9**, 59 – 67 (1975).
21. E. S. Belinsky, *Approximation by the Bochner – Riesz means and spherical modulus of continuity*, Dop. Akad. Nauk Ukr. RSR, Ser. A, **7**, 579 – 581 (1975).
22. R. M. Trigub, *Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series, and polynomial approximation of functions on the torus*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **44**, 1318 – 1409 (1980).
23. O. I. Kuznetsova, R. M. Trigub, *Two-sided estimates of the approximation of functions by Riesz and Marcinkiewicz means*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **251**, 34 – 36 (1980).
24. Yu. L. Nosenko, *Approximative properties of the Riesz means of double Fourier series*, Ukr. Mat. Zh., **31**, №1, 157 – 165 (1979).
25. Z. Ditzian, K. G. Ivanov, *Strong converse inequalities*, J. Anal. Math., **61**, 61 – 111 (1993).
26. B. R. Draganov, *Exact estimates of the rate of approximation on convolution operators*, J. Approxim. Theory, **162**, 952 – 979 (2010).
27. R. M. Trigub, *Multipliers in the Hardy spaces $H_p(\mathbb{D}^m$ for $p \in (0,1]$ and approximation properties of methodes for the summation of power series*, Mat. Sb., **188**, 145 – 160 (1997).
28. A. V. Tovstolis, *Fourier multipliers in Hardy spaces in tube domains over open cones and their applications*, Methods Funct. Anal. and Topology, **4**, 68 – 89 (1998).
29. Vit. V. Volchkov, *Multipliers of power series in Hardy spaces*, Ukr. Mat. Zh., **50**, №5, 585 – 587 (1998).
30. H. S. Shapiro, *Some Tauberian theorem with applications to approximation theory*, Bull. Amer. Math. Soc., **74**, 500 – 504 (1968).
31. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton (1970).
32. E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton (1971).
33. B. M. Makarov, A. N. Podkorytov, *Real analysis: measures, integrals and applications*, St.Petersburg (2011).
34. E. Liflyand, S. Samko, R. Trigub, *The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview*, J. Anal. Math. Phys. (2012).
35. R. M. Trigub, *Multipliers of Fourier series*, Ukr. Mat. Zh., **43**, №12, 1686 – 1693 (1991).

36. R. M. Trigub, *Multipliers of Fourier and K-functionals of spaces smoothness functions*, Ukr. Mat. Visn., **2**, №2, 236 – 280 (2005).
37. R. Askey, *Summability of Jacobi series*, Trans. Amer. Math. Soc., **179**, 71 – 81 (1973).
38. E. Liflyand, R. Trigub, *Conditions for the absolute convergence of Fourier integrals*, J. Approxim. Theory, **163**, 438 – 459 (2011).
39. S. B. Stechkin, *On the order of the best approximations of continuous functions*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **15**, №3, 219 – 242 (1951).
40. Yu. S. Kolomoitsev, R. M. Trigub, *On one nonclassical method of approximation of periodic functions by trigonometric polynomials*, Ukr. Math. Bull., **9**, №3 (2012).
41. R. M. Trigub, *The exact order of approximation to periodic functions by Bernstein – Stechkin polinomials*, Sb. Math., **204**, №12, 1819 – 1838 (2013).
42. O. V. Kotova, R. M. Trigub, *Exact order of approximation of periodic functions by one nonclassical method of summation of Fourier series*, Ukr. Math. J., **64**, №7, 1090 – 1108 (2012).
43. P. M. Tamrazov, *Smoothness and polynomial approximation*, Naukova Dumka, Kiev (1975) (in Russian).
44. Yu. S. Kolomoitsev, *Description of a class of functions with the condition $\omega_r(f;h)_p \le Mh^{r-1+\frac{1}{p}}$ for $p \in (0,1)$*, Vestnik Dnepr. Univ., Ser. Mat., **8**, 31 – 43 (2003).
45. R. Trigub, *Fourier multipliers and comparison of linear operators*, Oper. Theory: Adv. and Appl., **191**, 499 – 513 (2009).
46. Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov, *Properties of moduli of smoothness in $L_p(\mathbb{R}^d)$*, arXiv.org > математика > arXiv: 1907.12788v3[math.CA] 25 Mar 2020.
47. Yu. Kolomoitsev, *On moduli of smoothness and averaged differences of fractional order*, Fract. Calc. and Appl. Anal., **20**, №4, 988 – 1009 (2017).
48. Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, Berlin, New York (1987).
49. R. M. Trigub, *On Fourier multipliers and absolutely convergent of Fourier integrals of radial functions*, Ukr. Mat. Zh., **62**, №9, 1280 – 1293 (2010).
50. V. V. Lebedev, A. M. Olevskii, *L_p-мультипликаторы Фурье с ограниченными степенями*, Изв. РАН, сер. мат., вып. 70, №3, 129 – 166 (2006).
51. O. V. Kotova, R. M. Trigub, *Approximative properties of the summation methods of Fourier integrals*, J. Math. Sci., **211**, №5, 668 – 683 (2015).
52. Ю. А. Брудный, *Исследование свойств непериодических функций многих переменных методами теории приближений*, Успехи мат. наук, вып. 20, №5, 270 – 272 (1965).
53. A. Brudnyi, Y. Brudnyi, *Methods of geometric analysis in extension and trace problems*, Monogr. Math., **1**, 170 – 178 (2011).
54. А. М. Швецова, *Приближение частными суммами Фурье и наилучшее приближение некоторых классов функций*, Anal. Math., **27**, 201 – 222 (2001).
55. Р. М. Тригуб, *Асимптотика приближения непрерывных периодических функций линейными средними их рядов Фурье*, Изв. РАН, сер. мат., вып. 84, №3, 185 – 202 (2020).
56. K. M. Davis, Y.-C. Chang, *Lectures on Bochner – Riesz means*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **114** (1987).
57. R. M. Trigub, *Exact order of approximation of periodic functions by linear polynomials operators*, East J. Approxim., **15**, №1, 25 – 50 (2009).
58. E. S. Belinsky, *Strong summability of periodic functions and embilding theorems*, Dokl. Akad. Nauk, **332**, 133 – 134 (1993).
59. V. Totik, *Approximation by Bernstein polinomials*, Amer. J. Math., **114**, 995 – 1018 (1994).
60. Jia-ding Cao, H. Gonska, D. Kasco, *On the impossibility of certaine lower estimates for sequences of linear operators*, Math. Balkanica (N.S.), **19**, №1-2, 39 – 58 (2005).
61. R. M. Trigub, *Approximation of functions by polynomials with various constraints*, Izv. Nats. Akad. Nauk Armen. Mat., **44**, №4, 35 – 52 (2009).

Получено 24.02.20