УДК 517.9

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

For systems of nonlinear functional equations, we study asymptotic properties of their solutions continuously differentiable and bounded for $t \geq T > 0$ in a neighborhood of the singular point $t = +\infty$.

Вивчаються асимптотичні властивості неперервно диференційовних і обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків систем нелінійних функціональних рівнянь в околі особливої точки $t = +\infty$.

Отдельные функциональные уравнения вида

$$x(qt) = A(t)x(t) + F\left(t, x(t), x\big(f(t)\big)\right), \tag{1}$$

где $q = \mathrm{const}$, $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ — вещественная $(n \times n)$-матрица, $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, известны математикам около двух столетий (см. [1, 2] и приведенную в них библиографию), и в настоящее время существует ряд хорошо разработанных направлений теории таких уравнений. К ним, в частности, относится направление, основной целью которого является изучение структуры различного рода множеств решений. Активное и систематическое развитие этого направления началось после появления работ [3 – 6], в которых были исследованы важнейшие вопросы теории уравнений вида (1) в случае, когда $F \equiv 0$. В частности, в предположении, что все элементы матрицы $A(t)$ являются голоморфными в окрестности точки $t = \infty$ функциями, было построено общее решение таких систем уравнений и исследована его структура. В дальнейшем аналогичные результаты были получены для широких классов нелинейных функциональных уравнений вида (1) в окрестностях особых точек $t = 0$ и $t = \infty$ [7 – 12]. Несмотря на это для многих классов нелинейных функциональных уравнений построить общее решение и исследовать его структуру не представляется возможным. Тем не менее в некоторых случаях удается получить весьма детальное описание структуры определенных множеств решений широких классов нелинейных уравнений вида (1) и исследовать их свойства. Это справедливо также по отношению к системе уравнений

$$x(qt) = x(t) + F\left(t, x(t), x\big(f(t)\big)\right), \tag{2}$$

где $q > 0$, $q \neq 1$, $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $F\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, которая исследуется в настоящей статье. Основной целью статьи является установление условий существования непрерывного q-разностного асимптотического равновесия системы (2), которое достаточно полно характеризует структуру множества ее непрерывных решений в окрестности особой точки.

Определение 1. *Будем говорить, что система уравнений* (2) *имеет непрерывное при* $t \geq T > 0$ *q-разностное асимптотическое равновесие, если*:

а) *произвольное непрерывное и ограниченное при* $t \geq T > 0$ *решение* $x(t)$ *удовлетворяет при* $t \to +\infty$ *соотношению*

$$x(t) = \omega(t) + o(1), \tag{3}$$

где $\omega(t)$ — *непрерывная при* $t \geq T$ *вектор-функция, удовлетворяющая условию* $\omega(qt) = \omega(t)$;

b) *для произвольной непрерывной при* $t \geq T$ *вектор-функции* $\omega(t)$, *удовлетворяющей условию* $\omega(qt) = \omega(t)$, *существует непрерывное и ограниченное при* $t \geq T$ *решение* $x(t)$ *системы уравнений* (2), *удовлетворяющее при* $t \to +\infty$ *соотношению* (3).

Сначала рассмотрим случай, когда $0 < q < 1$.

Условия, гарантирующие справедливость утверждения a), устанавливаются в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *вектор-функция* $F(t, x, y)$ *является непрерывной при* $t \geq T > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $F(t, 0, 0) \equiv 0$ *и удовлетворяет соотношению*

$$\big|F(t, x', y') - F(t, x'', y'')\big| \leq \eta(t)\big(|x' - x''| + |y' - y''|\big),$$

где $\eta(t)$ — *некоторая неотрицательная непрерывная и ограниченная функция*, x', x'', y', $y'' \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;

2) *ряд*

$$H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta(q^{-i}t)$$

равномерно сходится при $t \geq T$ *и* $2H(t) \leq \theta < 1$;

3) *функция* $f(t)$ *является непрерывной при* $t \geq T$ *и* $f(t) \geq t$.

Тогда для произвольного непрерывного и ограниченного при $t \geq T$ *решения* $x(t)$ *системы уравнений* (2) *существует непрерывная при* $t \geq T$ *вектор-функция* $\omega(t)$ *такая, что* $\omega(qt) = \omega(t)$ *и при* $t \to +\infty$ *выполняется соотношение* (3).

Доказательство. Действительно, если $x(t)$ — некоторое непрерывное и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (2), то в силу условий 1 – 3 имеем тождество

$$x(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F\left(q^{-i}t, x(q^{-i}t), x\big(f(q^{-i}t)\big)\right),$$

где

$$\omega(t) = x(t) - \sum_{i=1}^{\infty} F\left(q^{-i}t, x(q^{-i}t), x\big(f(q^{-i}t)\big)\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что вектор-функция $\omega(t)$ является непрерывной и ограниченной при $t \geq T$, а решение $x(t)$ удовлетворяет условию (3).

Далее, так как $x(t)$ — непрерывное и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (2), т. е. имеет место тождество

$$x(qt) \equiv x(t) + F\left(t, x(t), x\big(f(t)\big)\right),$$

то

$$\omega(qt) = x(qt) - \sum_{i=1}^{\infty} F\left(q^{-i+1}t, x(q^{-i+1}t), x\big(f(q^{-i+1}t)\big)\right) =$$

$$= x(t) + F\left(t, x(t), x\big(f(t)\big)\right) - F\left(t, x(t), x\big(f(t)\big)\right) -$$

$$-\sum_{i=2}^{\infty} F\left(q^{-i+1}t, x(q^{-i+1}t), x\big(f(q^{-i+1}t)\big)\right) =$$

$$= x(t) - \sum_{i=1}^{\infty} F\left(q^{-i}t, x(q^{-i}t), x\big(f(q^{-i}t)\big)\right) = \omega(t).$$

Тем самым теорема 1 доказана.

Теперь покажем, что при выполнении условий $1-3$ имеет место утверждение b).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* $1-3$. *Тогда для произвольной непрерывной при* $t \geq T$ *вектор-функции* $\omega(t)$, *удовлетворяющей условию* $\omega(qt) = \omega(t)$, *существует непрерывное и ограниченное при* $t \geq T$ *решение* $x(t)$ *системы уравнений* (2), *удовлетворяющее при* $t \to +\infty$ *соотношению* (3).

Доказательство. Рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$x(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F\left(q^{-i}t, x(q^{-i}t), x\big(f(q^{-i}t)\big)\right), \tag{4}$$

где $\omega(t)$ — произвольная непрерывная при $t \geq T$ вектор-функция, удовлетворяющая условию $\omega(qt) = \omega(t)$. Поскольку произвольное непрерывное и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (4) является решением системы (2) $\big($в этом можно убедиться непосредственной подстановкой (4) в (2)$\big)$ и удовлетворяет условию (3) (следует из условий $1-3$), для доказательства теоремы 2 достаточно установить существование непрерывного и ограниченного при $t \geq T$ решения системы уравнений (4). Для этого воспользуемся методом последовательных приближений, которые определим с помощью соотношений

$$x_0(t) = \omega(t),$$

$$x_m(t) = \omega(t) + \sum_{i=1}^{\infty} F\left(q^{-i}t, x_{m-1}(q^{-i}t), x_{m-1}\big(f(q^{-i}t)\big)\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

С помощью метода математической индукции нетрудно показать, что функции $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, являются непрерывными при $t \geq T$. Более того, обозначив $M = \sup_{t \geq T} |\omega(t)|$, покажем, что при $t \geq T$ и всех $m \geq 0$ выполняются неравенства

$$\big|x_m(t)\big| \leq \frac{M}{1-\theta}. \tag{6}$$

Действительно, функция $x_0(t) = \omega(t)$ удовлетворяет неравенству (6). Предположим, что функции $x_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, определенные соотношениями (5), также удовлетворяют неравенствам (6). Тогда в силу (5), (6) и условий $1-3$ получаем

$$\big|x_m(t)\big| \leq M + \sum_{i=1}^{\infty} \Big|F\big(q^{-i}t, x_{m-1}(q^{-i}t), x_{m-1}(f(q^{-i}t))\big)\Big| \leq$$

$$\leq M + \sum_{i=1}^{\infty} \eta(q^{-i}t) \left(\big|x_{m-1}(q^{-i}t)\big| + \big|x_{m-1}(f(q^{-i}t))\big|\right) \leq$$

$$\leq M + \frac{2M}{1-\theta} \sum_{i=1}^{\infty} \eta(q^{-i}t) \leq M + \frac{M}{1-\theta} \cdot \theta \leq \frac{M}{1-\theta}.$$

Следовательно, все функции $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, удовлетворяют при $t \geq T$ неравенству (6).

Докажем теперь, что при $t \geq T$ и всех $m \geq 1$ имеет место оценка

$$\big|x_m(t) - x_{m-1}(t)\big| \leq M\theta^m. \tag{7}$$

В самом деле, в силу соотношений (5) и условий 1 – 3 при $m = 1$ имеем

$$\big|x_1(t) - x_0(t)\big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \big|F\big(q^{-i}t, x_0(q^{-i}t), x_0(f(q^{-i}t))\big)\big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta(q^{-i}t) \left(\big|\omega(q^{-i}t)\big| + \big|\omega(f(q^{-i}t))\big|\right) \leq$$

$$\leq 2M \sum_{i=1}^{\infty} \eta(q^{-i}t) \leq M\theta,$$

т. е. оценка (7) выполняется при $m = 1$. Предположим, что при $t \geq T$ оценка (7) имеет место при $m = 2, \ldots, k$, и докажем ее справедливость при $m = k + 1$. Действительно, используя (5), (7) и условия 1 – 3, получаем

$$\big|x_{k+1}(t) - x_k(t)\big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \big|F\left(q^{-i}t, x_k(q^{-i}t), x_k(f(q^{-i}t))\right) - F\left(q^{-i}t, x_{k-1}(q^{-i}t), x_{k-1}(f(q^{-i}t))\right)\big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta(q^{-i}t) \left(\big|x_k(q^{-i}t) - x_{k-1}(q^{-i}t)\big| + \big|x_k(f(q^{-i}t)) - x_{k-1}(f(q^{-i}t))\big|\right) \leq$$

$$\leq 2M\theta^k \sum_{i=1}^{\infty} \eta(q^{-i}t) \leq M\theta^{k+1}.$$

Таким образом, оценка (7) выполняется при $t \geq T$ и всех $m \geq 1$.

Непосредственно из (7) следует, что последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, определенных с помощью соотношений (5), равномерно сходится при $t \geq T$ и вектор-функция

$$x(t) = \lim_{m \to \infty} x_m(t)$$

является непрерывным решением системы уравнений (4), удовлетворяющим условию

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}$$

(в этом можно убедиться, если в соотношениях (6), (7) перейти к пределу при $m \to \infty$).

Теорема 2 доказана.

Замечание **1.** Нетрудно показать, что при выполнении условий 1 – 3 решение $x(t)$ системы уравнений (4), определенное соотношением $x(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t)$, является единственным в классе непрерывных и ограниченных при $t \geq T$ функций.

Непосредственным следствием доказанных выше теорем является следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $0 < q < 1$ *и выполняются условия* 1 – 3, *то система уравнений* (2) *имеет непрерывное при* $t \geq T > 0$ *q-разностное асимптотическое равновесие.*

Исследуем теперь вопрос о существовании непрерывного при $t \geq T$ q-разностного асимптотического равновесия системы уравнений (2) в случае $q > 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1, 3 *теоремы* 1 *и условие*

2′) *ряд*

$$\widetilde{H}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta(q^i t)$$

равномерно сходится при $t \geq T$ *и* $2\widetilde{H}(t) \leq \widetilde{\theta} < 1$.

Тогда для произвольного непрерывного и ограниченного при $t \geq T$ *решения* $x(t)$ *системы уравнений* (2) *существует непрерывная при* $t \geq T$ *вектор-функция* $\omega(t)$ *такая, что* $\omega(qt) = \omega(t)$ *и при* $t \to +\infty$ *выполняется соотношение* (3).

Действительно, пусть $x(t)$ — некоторое непрерывное и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (2) и, таким образом, имеет место тождество

$$x(qt) \equiv x(t) + F\left(t, x(t), x\big(f(t)\big)\right). \tag{8}$$

Тогда в силу условий 1, 2′, 3 это решение можно представить в виде

$$x(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} F\left(q^i t, x(q^i t), x\big(f(q^i t)\big)\right),$$

где

$$\omega(t) = x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} F\left(q^i t, x(q^i t), x\big(f(q^i t)\big)\right).$$

Нетрудно убедиться, что таким образом определенная вектор-функция $\omega(t)$ является непрерывной при $t \geq T$, а решение $x(t)$ удовлетворяет условию (3). Следовательно, для завершения доказательства теоремы осталось показать, что вектор-функция $\omega(t)$ удовлетворяет равенству $\omega(qt) = \omega(t)$. Действительно, принимая во внимание (8), имеем

$$\omega(qt) = x(qt) + \sum_{i=0}^{\infty} F\left(q^{i+1} t, x(q^{i+1} t), x\big(f(q^{i+1} t)\big)\right) =$$

$$= x(t) + F\left(t, x(t), x\big(f(t)\big)\right) + \sum_{i=1}^{\infty} F\left(q^i t, x\big(q^i t\big), x(f(q^i t))\right) =$$

$$= x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} F\left(q^i t, x(q^i t), x\big(f(q^i t)\big)\right) = \omega(t).$$

Теорема 4 доказана. Тем самым доказано, что при выполнении условий $1-3$ утверждение a) имеет место.

Справедливость для системы уравнений (2) утверждения b) устанавливает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $1, 2', 3$. *Тогда для произвольной непрерывной при* $t \geq T$ *вектор-функции* $\omega(t)$, *удовлетворяющей равенству* $\omega(qt) = \omega(t)$, *существует непрерывное и ограниченное при* $t \geq T$ *решение* $x(t)$ *системы уравнений* (2), *удовлетворяющее при* $t \to +\infty$ *соотношению* (3).

Доказательство. Поскольку произвольное непрерывное и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений

$$x(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} F\left(q^i t, x(q^i t), x\big(f(q^i t)\big)\right), \tag{9}$$

где $\omega(t)$ — произвольная непрерывная при $t \geq T$ вектор-функция, удовлетворяющая равенству $\omega(qt) = \omega(t)$, является решением системы уравнений (2) (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой (9) в (2)) и удовлетворяет условию (3) (следует из условий 1, $2'$, 3), для доказательства теоремы достаточно установить существование непрерывного и ограниченного при $t \geq T$ решения системы уравнений (9). Последнее, как и в случае теоремы 2, можно доказать с помощью метода последовательных приближений, которые в данном случае определяются соотношениями

$$x_0(t) = \omega(t),$$

$$x_m(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} F\left(q^i t, x_{m-1}(q^i t),\ x_{m-1}\big(f(q^i t)\big)\right), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

На основании теорем 4, 5 можно утверждать, что для системы уравнений (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Если* $q > 1$ *и выполняются условия* 1, $2'$, 3, *то система уравнений* (2) *имеет непрерывное при* $t \geq T > 0$ *q-разностное асимптотическое равновесие.*

Таким образом, для системы уравнений (2) доказана следующая теорема о существовании непрерывного при $t \geq T > 0$ q-разностного асимптотического равновесия.

Теорема 7. *Пусть выполняется одно из предположений*:

1) $0 < q < 1$ *и выполняются условия* $1-3$;
2) $q > 1$ *и выполняются условия* 1, $2'$, 3.

Тогда система уравнений (2) *имеет непрерывное при* $t \geq T > 0$ *q-разностное асимптотическое равновесие.*

Замечание **2.** Аналогично можно исследовать вопрос о существовании непрерывного при $t \in (0, T]$, $T > 0$, q-разностного асимптотического равновесия системы уравнений (2), которое в данном случае определяется следующим образом.

Определение 2. *Будем говорить, что система уравнений* (2) *имеет непрерывное при* $t \in (0, T]$, $T > 0$, *q-разностное асимптотическое равновесие*, *если*:

a') *произвольное непрерывное и ограниченное при* $t \in (0, T]$ *решение* $x(t)$ *удовлетворяет при* $t \to 0+$ *соотношению*

$$x(t) = \omega(t) + o(1), \tag{10}$$

где $\omega(t)$ — *непрерывная при* $t \in (0, T]$ *вектор-функция, удовлетворяющая условию* $\omega(qt) = \omega(t)$;

b') *для произвольной непрерывной при* $t \in (0, T]$ *вектор-функции* $\omega(t)$, *удовлетворяющей условию* $\omega(qt) = \omega(t)$, *существует непрерывное и ограниченное при* $t \in (0, T]$ *решение* $x(t)$ *системы уравнений* (2), *удовлетворяющее при* $t \to 0+$ *соотношению* (10).

1. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. – Warszawa: PWN, 1968.
2. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative functional equations // Encycl. Math. its Appl. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – **32**.
3. *Birkhoff G. D.* The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations // Proc. Amer. Acad. Arts Sci. – 1913. – **49**. – P. 521 – 568.
4. *Carmichacl R. D.* The general theory of q-difference equations // Amer. J. Math. – 1912. – **34**. – P. 147 – 168.
5. *Birkhoff G. D., Guenther P. E.* Note on a canonical form for the linear q-difference system // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1941. – **27**. – P. 218 – 222.
6. *Trjitzinsky W. J.* Analytical theory of linear q-difference equations // Acta. Math. – 1933. – **61**. – P. 1 – 38.
7. *Trjitzinsky W. J.* Theory of nonlinear q-difference system // Ann. mat. pura ed appl. – 1938. – **17**, № 4. – P. 59 – 106.
8. *Sternberg S.* Local contractions and a theorem of Poincare // Amer. J. Math. – 1957. – **79**. – P. 809 – 824.
9. *Пелюх Г. П.* О представлении решений систем нелинейных функциональных уравнений в окрестности особых точек // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – **6**. – С. 22 – 25.
10. *Пелюх Г. П.* О непрерывных и ограниченных на вещественной оси решениях систем нелинейных функциональных уравнений // Докл. АН СССР. – 1990. – **6**. – С. 1309 – 1311.
11. *Пелюх Г. П.* О существовании локально гладких решений систем нелинейных функциональных уравнений с отклонениями, зависящими от неизвестных функций // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 1. – С. 64 – 77.
12. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах непрерывных решений систем нелинейных функционально-разностных уравнений // Докл. АН. – 2002. – № 1. – С. 14 – 16.

Получено 09.11.12