УДК 517.946

С. М. Егоров (EPAM Systems, Харьков),
Е. Я. Хруслов (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

ГЛОБАЛЬНЫЕ СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА – ФОККЕРА – ПЛАНКА

We consider a coupled system of the Navier – Stokes and Fokker – Planck equations that describes the motion of a polydisperse suspension of solid particles in a viscous incompressible liquid. We prove the existence theorem and study some properties of global weak solutions of the initial boundary-value problem for this system.

Розглядається зв'язана система рівнянь Нав'є – Стокса і Фоккера – Планка, що описує рух полідисперсної суспензії твердих часток у в'язкій нестискуваній рідині. Доведено існування і вивчено деякі властивості глобальних слабких розв'язків початково-крайової задачі для цієї системи.

Введение. Широкий круг технических приложений, а также некоторые вопросы экологии вызывают большой интерес к задаче описания движения потоков жидкостей и газов с мелкими твердыми частицами. Такие потоки встречаются как в природе (например, перенос мелкодисперсных твердых взвесей в реках и морях, песчано-пылевые бури), так и в технических устройствах (транспортные гидро- и воздухопроводы, пылеуловители и т. д.). В таких потоках твердые частицы подвержены воздействиям гидродинамических сил со стороны несущей жидкости, гравитационных сил, а также случайных толчков, вызванных броуновским движением молекул жидкости. Сами частицы также оказывают влияние на движение потока в целом. Существует большое количество математических моделей, описывающих движение таких потоков при различных соотношениях между параметрами твердой и жидкой фаз смеси. Особый интерес представляют смеси, в которых объемная концентрация твердой фазы мала, а удельная плотность вещества велика по сравнению с удельной плотностью жидкой фазы. В таких случаях движения часто описывают с помощью так называемой двухжидкостной модели: жидкая и твердая фазы представляются как две сплошные среды — две взаимопроникающие и взаимодействующие жидкости [1, 2]. Однако такая модель дает удовлетворительное описание только в том случае, когда размеры твердых частиц приблизительно одинаковы. Если же дисперсия размеров частиц велика, то в процессе движения происходит „расслоение" твердой фазы по размерам частиц и средние скорости частиц во фракциях, соответствующих разным размерам, существенно различаются. В этом случае твердую фазу нельзя представлять как одну сплошную среду, и описание всего ансамбля частиц проводится с помощью функции распределения частиц по размерам, скоростям и координатам.

Так, движение вязкой несжимаемой жидкости с твердыми мелкими частицами шарообразной формы, радиусы r_ε которых распределены в интервале $(0, \varepsilon]$ (ε — малый параметр, характеризующий размеры частиц и средние расстояния $d_\varepsilon = O(\varepsilon^{1/3})$ между ними), описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u - \nu \Delta_x u + \beta \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_3} r(u - v) f \, dv dr - \nabla_x p = g, \tag{0.1}$$

$$\operatorname{div}_x u = 0, \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v \left[\Gamma_r(u, v) f\right] = \sigma_r \Delta_v f, \quad 0 < r \le 1, \tag{0.3}$$

$$\Gamma_r(u, v) = \gamma r^{-2}(u - v) + g_1, \quad \sigma_r = \sigma \cdot r^{-5}. \tag{0.4}$$

Здесь $u = u(x,t)$ — векторное поле скоростей несущей жидкости, $p = p(x,t)$ — давление; $f = f(x,v,r,t)$ — нормированная функция распределения частиц по координатам $x \in \mathbb{R}_3$, скоростям $v \in \mathbb{R}_3$ и приведенным радиусам $r = \dfrac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \in (0,1]$ $\Big($настоящая функция распределения $f_\varepsilon(x,v,r_\varepsilon,t)$ выражается через нее с помощью равенства $f_\varepsilon(x,v,r_\varepsilon,t) = \dfrac{1}{\varepsilon^2} f\left(x, v, \dfrac{r_\varepsilon}{\varepsilon}, t\right)\Big)$; g и $g_1 = \left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho_1}\right) g$ — заданные векторы гравитационной и архимедовой сил; через Δ_x и Δ_v обозначены операторы Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}_3$ и $v \in \mathbb{R}_3$ соответственно; ∇_x — оператор градиента; точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}_3$: $u \cdot v = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$, $u \cdot \nabla_x = \sum_{i=1}^3 u_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Числовые параметры ν, β, γ, σ выражаются через характеристики составляющих смеси:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \beta = 6\pi\nu, \qquad \gamma = \frac{9\mu}{2\rho_1 \varepsilon^2}, \qquad \sigma = \frac{kT\gamma^2}{6\pi\mu\varepsilon},$$

где μ — динамическая вязкость несущей жидкости; ρ_0, ρ_1 — удельные плотности веществ жидкости и твердой фазы ($\rho_0 \ll \rho_1$); σ_r — коэффициент диффузии твердых частиц, обусловленный случайными толчками со стороны молекул несущей жидкости и определяемый формулой Эйнштейна (см. [3, 4])

$$\sigma_r = \frac{kT}{m_\varepsilon} \cdot \frac{6\pi\mu r_\varepsilon}{m_\varepsilon} = \frac{\sigma}{r^5}.$$

Здесь $m_\varepsilon = \dfrac{4\pi}{3} \rho_1 r_\varepsilon^3$ — масса частицы, r_ε — ее радиус, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Уравнения (0.1), (0.2) — возмущенные уравнения Навье – Стокса — рассматриваются в пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}_3$ ($x \in \Omega$), а уравнение Фоккера – Планка (0.3), зависящее от параметра $r \in (0,1]$, рассматривается в области $\Omega \times \mathbb{R}_3$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3$ $(x, v \in \Omega \times \mathbb{R}_3)$.

На границах этих областей подчиним вектор скорости $u(x,t)$ и функцию распределения $f(x,v,r,t)$ граничным условиям вида

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \ge 0, \tag{0.5}$$

$$f(x,v,r,t) = 0, \qquad (x,v) \in \Sigma^-, \qquad t \ge 0, \quad r \in (0,1], \tag{0.6}$$

где через Σ^- обозначена часть границы $\partial\Omega \times \mathbb{R}_3$, на которой $n(x) \cdot v < 0$, $n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$. Первое из этих равенств является условием прилипания вязкой жидкости к неподвижной границе $\partial\Omega$, а второе означает, что частицы не входят в область Ω извне, а, достигнув границы $\partial\Omega$ изнутри, остаются на ней навсегда.

Дополним систему уравнений (0.1) – (0.4) и граничные условия (0.5), (0.6) начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.7}$$

$$f(x,v,r,0) = f_0(x,v,r), \qquad (x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}_3, \quad r \in (0,1], \tag{0.8}$$

где $u_0(x)$ — заданное начальное поле скоростей жидкости, а $f_0(x,v,r)$ — заданная начальная функция распределения частиц, такая, что $f_0(x,v,r) \geq 0$ и $f_0(x,v,r) = 0$ для $(x,v) \in \Sigma^-$, $r \in (0,1]$.

Цель данной работы состоит в изучении вопроса о разрешимости задачи (0.1) – (0.8). Такие вопросы для связанных кинетических (Фоккера – Планка или Власова) и гидродинамических (Стокса, Навье – Стокса) уравнений изучены в ряде работ. Так, в работе [5] доказано существование глобальных слабых решений для системы Власова – Стокса, описывающей движение смеси с монодисперсной твердой фазой (когда радиусы твердых частиц одинаковы). В работе [6] аналогичный результат получен для системы Фоккера – Планка – Навье – Стокса, описывающей движение монодисперсного облака твердых частиц в сжимаемой жидкости. Существование глобальных слабых решений для системы Навье – Стокса – Власова и системы Навье – Стокса – Власова – Пуассона в случае полидисперсной твердой фазы доказано в работах [7, 8]. Вопросы разрешимости кинетических уравнений, связанных с уравнением Пуассона, в различных классах функций изучались во многих работах (см., например, [9 – 14]).

В данной статье мы доказываем существование глобальных слабых решений для системы (0.1) – (0.4), т. е. для полидисперсной суспензии, без ограничения снизу на радиусы частиц ($0 < r \leq 1$). Вхождение окрестности 0 в область изменения радиусов r вносит существенные трудности в исследование, поэтому в данной работе мы предполагаем, что начальная функция распределения частиц достаточно быстро убывает на $r \to 0$.

Опишем кратко структуру статьи. В п. 1 приведено определение слабого решения задачи (0.1) – (0.8) и сформулирован основной результат (теоремы 1.1 и 1.2). В п. 3 проводится регуляризация системы (0.1) – (0.4) путем срезания (ограничения) силы взаимодействия между частицами и жидкостью и ограничения скоростей частиц. Далее определяется слабое решение регуляризованной задачи. Затем строятся конечномерные аппроксимации этого решения с помощью метода Галеркина с использованием решения регуляризованного решения уравнения Фоккера – Планка и теоремы Шаудера о неподвижной точке. Для этого в п. 2 доказана теорема существования решения регуляризованной начально-краевой задачи для уравнения Фоккера – Планка и установлены его свойства.

В п. 4 доказывается компактность построенных аппроксимаций. Наконец, в п. 5 с помощью предельного перехода в интегральных тождествах для аппроксимаций по размерности аппроксимации и по параметру срезания получены требуемые интегральные тождества для слабого решения задачи (0.1) – (0.8). В п. 6 доказана теорема 2, описывающая свойства слабого решения.

1. Определение слабого решения задачи (0.1) – (0.8) и формулировка основного результата. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}_3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Введем следующие обозначения:

$$G = \Omega \times \mathbb{R}_3 \quad (x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}_3);$$

$(\cdot,\cdot)_{2\Omega}$, $(\cdot,\cdot)_{2G}$ — скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $L_2(G)$ соответственно;

$$Q = \Omega \times (0,1), \qquad D = G \times (0,1), \quad r \in (0,1);$$

$$\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}_3, \qquad \Sigma^{\pm} = \big\{(x,v) \in \Sigma,\ \pm n(x)\cdot v > 0\big\};$$

$n(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$;

$H_0^1(\Omega)$ — соболевское пространство вектор-функций, равных 0 на $\partial\Omega$;

$J = J(\Omega)$, $J_0^1 = J_0^1(\Omega)$ — замыкания соленоидальных вектор-функций из $C_0^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно;

$H_0^1(\mathbb{R}_3)$ — замыкание функций $\psi(v) \in C^1(\mathbb{R}_3)$ с компактным носителем по норме

$$\|\psi\|_1 = \|\nabla\psi\|_{L_2(\mathbb{R}_3)};$$

$L_{2\sigma_r}\big(G \times [0,T], H_0^1(\mathbb{R}_3)\big)$ — пространство функций со значениями в $H^1(\mathbb{R}_3)$, определенных на $G \times [0,T]$ и имеющих конечную L_2-норму с весом $\sigma_r = \sigma r^{-5}$:

$$\|f\|^2 = \int\limits_0^T \int\limits_Q \|f\|_1^2 \frac{\sigma}{r^5} dx dr dt.$$

Будем предполагать, что начальные данные в задаче (0.1) – (0.8) удовлетворяют условиям

$$u_0(x) \in J_0^1(\Omega), \quad f_0(x,v,r) \in L_\infty(D), \tag{1.1}$$

причем существуют $\alpha > 0$, $a \geq 2$ $\big($зависящие от $f_0 \in L_\infty(D)\big)$ такие, что

$$\sup_D \left[f_0(x,v,r) \exp\left(\frac{\alpha}{r^a}\right) \right] \leq A_0 < \infty \tag{1.2}$$

и

$$\int\limits_D \big(r^{-9} + r^3|v|^2\big) f_0(x,v,r) dx dv dr \leq A_1 < \infty, \tag{1.3}$$

где A_0, A_1 зависят от f_0.

Слабое решение задачи (0.1) – (0.8) будем искать в следующих классах функций:

$$u(x,t) \in U_T(\Omega) \equiv L_\infty\big(0,T; J(\Omega)\big) \cap L_2\big(0,T; J_0^1(\Omega)\big),$$

$$f(x,v,r,t) \in F_T(D) = L_{2\sigma_r}\big(Q \times [0,T]; H_0^1(\mathbb{R}_3)\big) \cap L_\infty\big(D \times [0,T]\big),$$

где $T > 0$.

Определение 1.1. *Пара* $(u, f) \in U_T(\Omega) \times F_T(D)$ *называется слабым решением задачи* (0.1) – (0.8), *если выполняются следующие равенства*:

$$\int_0^T \left\{ (u, \xi_t + u \cdot \nabla_x \xi)_{2\Omega} - \nu(\nabla_x u, \nabla_x \xi)_{2\Omega} - \beta \left(\int_0^1 \int_{\mathbb{R}_3} r(u - v) f dv dr, \xi \right)_{2\Omega} + (g, \xi)_{2\Omega} \right\} dt +$$

$$+(u_0, \xi(0))_{2\Omega} = 0, \tag{1.4}$$

$$\int_0^T \int_0^1 \Big\{ (f, \phi_t + v \cdot \nabla_x \phi + \Gamma_r \cdot \nabla_v \phi)_{2G} - \sigma_r (\nabla_v f, \nabla_v \phi)_{2G} \Big\} dr dt +$$

$$+ \int_0^1 \big(f_0, \phi(0) \big)_{2G} \, dr = 0 \tag{1.5}$$

для любой вектор-функции $\xi(x, t)$ *и функции* $\phi(x, v, r, t)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered} \xi \in U_T(\Omega) \cap L_\infty\big(\Omega \times [0, T]\big), \quad \xi_t \in L_2(\Omega \times [0, T], \\ \xi(x, T) = 0, \\ \phi \in F_T(D), \qquad \phi_t,\, r^{-(3/2)} \nabla_x \phi,\, r^{-(5/2)} \nabla_v \phi \in L_2(D \times [0, T], \\ \phi(x, v, r, T) = 0, \qquad \phi \,|_{\Sigma^{\pm}_{1T}} = 0 \qquad \big(\Sigma^{\pm}_{1T} = \Sigma^{\pm} \times (0, 1] \times [0, T]\big). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Если эти равенства выполняются при любом $T > 0$, *то решение* (u, f) *называется глобальным.*

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть выполняются условия* (1.1) – (1.3), *причем* $\sup a > 2$. *Тогда существует глобальное слабое решение задачи* (0.1) – (0.8).

Если же $\sup a = 2$, *то существует слабое решение* $(u, f) \in U_T(\Omega) \times F_T(G)$ *для* $T < \sup \alpha (3\gamma)^{-1}$.

Доказательство теоремы приведено в пп. 3 – 5.

В следующей теореме описываются некоторые свойства слабого решения задачи (0.1) – (0.8).

Теорема 1.2. *Слабое решение* $\big\{u(x, t), f(x, v, r, t)\big\}$ *обладает такими свойствами*:

(i) *функция* $f(x, v, r, t)$ *непрерывна по* t *в слабой топологии* $L_1(D)$;

(ii) $f(x, v, r, t) \geq 0$;

(iii) $\int_D f(x, v, r, t) dx dv dr \leq \int_D f_0(x, v, r) dx dv dr$;

(iv) *вектор-функция* $u(x, t)$ *непрерывна по* t *в слабой топологии* $L_2(\Omega)$;

(v) *справедлива оценка*

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|u\|^2_{2\Omega}+\int\limits_D r^3|v|^2 f dxdvdr\right)+\int\limits_0^T\int\limits_D r|u-v|^2 f dxdvdrdt\ +\int\limits_0^T\|\nabla_x u\|^2_{2\Omega}dt<C,$$

где постоянная C *зависит от начальных данных* $\{u_0,f_0\}$.

Доказательство теоремы приведено в п. 6.

2. Начально-краевая задача для уравнения Фоккера – Планка. Здесь мы рассмотрим задачу, которая является специальной регуляризацией начально-краевой задачи собственно для уравнения Фоккера – Планка, определяемой равенствами (0.3), (0.4), (0.6). Ее решение используется в п. 3 для построения аппроксимаций решения задачи (0.1) – (0.8).

Пусть V_R — шар в $\mathbb{R}_3$ радиуса R, а ∂V_R — его граница: $V_R=\big\{v\in\mathbb{R}_3\colon |v|<R\big\}$, $\partial V_R=\big\{v\in\in\mathbb{R}_3\colon |v|=R\big\}$. Рассмотрим в области $\Omega\times V_R\times[0,T]$ начально-краевую задачу

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\cdot\nabla_x f+\operatorname{div}_v\left[\Gamma^R_r(u,v)f\right]-\sigma_r\Delta_v f=h,\qquad (x,v)\in\Omega\times V_R,\quad t\in(0,T),\tag{2.1}$$

$$\Gamma^R_r(u,v)=\gamma_r(u-v)\Theta_R\big(|u-v|^2\big)+g_1,\tag{2.2}$$

$$f(x,v,t)=0,\qquad (x,v)\in\Omega\times\partial V_R,\quad t\in(0,T),\tag{2.3}$$

$$f(x,v,t)=0,\qquad (x,v)\in\partial\Omega\times V_R, v\cdot n(x)\le 0,\quad t\in(0,T),\tag{2.4}$$

$$f(x,v,0)=f_0(x,v)\Theta_R\big(|v|\big),\quad (x,v)\in\Omega\times V_R,\tag{2.5}$$

где $\Theta_R(s)$ — срезающая функция класса $C^2(0,\infty)$ такая, что $\Theta_R(s)=1$ при $S\le R-1$, $\Theta_R(s)=0$ при $s\ge R$, $\Theta'_R\le 0$, $\gamma_r=\gamma\cdot r^{-2}$, $\sigma_r=\sigma r^{-5}$ ($0<r\le 1$ — фиксированный параметр), $h=h(x,v,t)$ и $f_0(x,v)$ — заданные функции.

Назовем слабым решением задачи (2.1) – (2.5) функцию $f(x,v,t)\in L_2\big(\Omega\times[0,T];H^1_0(V_R)\big)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_\Omega\left\{f\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+v\cdot\nabla_x\phi\right)+\big(\Gamma^R_r(u,v)f-\sigma_r\nabla_v f\big)\cdot\nabla_v\phi\right\}dxdvdt=$$

$$=-\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_\Omega h\phi dxdvdt-\int\limits_{V_R}\int\limits_\Omega f_0\Theta_R\phi(x,v,0)dxdv\tag{2.6}$$

для любой функции $\phi(x,v,t)\in H^1\big(\Omega\times V_R\times[0,T]\big)$ такой, что $\phi(x,v,T)=0$ и $\phi(x,v,t)|_{\Sigma^+_{RT}}=0$, где $\Sigma^+_{RT}=\big\{(x,v,t)\in\partial\Omega\times V_R\times[0,T],\ n(x)\cdot v>0\big\}$, $n(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$.

Теорема 2.1. *Пусть* $h(x,v,t)\in L_2(\Omega\times V_R\times[0,T];H^{-1}(V_R))$, $u(x,t)\in L_\infty\big(\Omega\times[0,T]\big)\cap\cap L_2\big(0,T;J^1(\Omega)\big)$, $f_0(x,v)\in L_2(\Omega\times V_R)$. *Тогда при любых* r, R $(0<r\le 1,\ R>2)$ *существует единственное слабое решение задачи* (2.1) – (2.5), *принадлежащее классу*

$$Y = \left\{ f \in L_2\big(\Omega \times [0,T]; H_0^1(V_R)\big),\ \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f \in L_2(\Omega \times [0,T]; H^{-1}(V_R) \right\}.$$

Доказательство теоремы проводится методом, изложенным в работе [12], и вынесено в приложение.

Сформулируем основные свойства решения $f(x,v,r,t)$ задачи (2.1)–(2.5), которые понадобятся нам в дальнейшем.

(j) Положительность: если $f_0 \geq 0$ и $h \geq 0$, то $f \geq 0$.

(jj) L_∞-оценка: если $f_0 \in L_\infty(\Omega \times V_R)$ и $h \in L_\infty\big(\Omega \times V_R \times [0,T]\big)$, то $f \in L_\infty(\Omega \times V_R \times [0,T])$ и справедлива оценка

$$|f(t)|_\infty \leq |f_0|_\infty e^{3\gamma_r t} + \int\limits_0^t e^{3\gamma_r(t-s)} |h(s)|_\infty ds.$$

(jjj) L_1-оценка: если $f_0 \in L_1(\Omega \times V_R)$ и $h \in L_1\big(\Omega \times V_R \times [0,T]\big)$, то $f \in L_\infty\big(0,T; L_1(\Omega \times V_R)\big)$ и справедлива оценка

$$|f(t)|_1 \leq |f_0|_1 + \int\limits_0^1 |h(s)|_1 ds.$$

(jv) L_2-оценка: если $f_0 \in L_2(\Omega \times V_R)$ и $h \in L_2\big(\Omega \times V_R \times [0,T]\big)$, то $f \in L_2\big(0,T; L_2(\Omega \times V_R)\big)$ и при любом $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\big|f(t)\big|_2^2 + 2\sigma_r \int\limits_0^t \big|\nabla_v f(s)\big|^2 ds \leq \big|f_0\big|_2^2 e^{(3\gamma_r + \delta)t} + \frac{2}{\delta} \int\limits_0^t e^{(3\gamma_r+\delta)(t-s)} \big|h(s)\big|_2^2 ds.$$

Здесь и далее через $|\cdot|_\infty$, $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ обозначены нормы в пространствах $L_\infty(\Omega \times V_R)$, $L_1(\Omega \times V_R)$, $L_2(\Omega \times V_R)$ соответственно.

Мы докажем эти утверждения, предположив для простоты, что решение f задачи (2.1)–(2.5) достаточно гладкое, а именно, $f \in H^1\big(\Omega \times V_R \times [0,T]\big)$. Это будет так, если исходные данные $u(x,t)$, $f_0(x,v)$, $h(x,v,t)$ задачи (2.1)–(2.5) принадлежат тому же классу, что будет выполняться в построениях следующего пункта. В общем случае, когда $f \in Y$, доказательство требует более тонкой техники (см. [12]).

***Доказательство свойства* (j).** Представим решение f задачи (2.1)–(2.5) в виде

$$f(x,v,t) = f^+(x,v,t) + f^-(x,v,t), \tag{2.7}$$

где $f^+(x,v,t) = \max\big\{f(x,v,t), 0\big\} \geq 0$, $f^- = \min\big\{f(x,v,t), 0\big\} \leq 0$.

Ясно, что $f^\pm(x,v,t)$ непрерывны в силу (2.3), (2.4) и

$$f^\pm|_{S_R \times [0,T]} = 0, \qquad f^\pm|_{\Sigma_R^- \times [0,T]} = 0,$$

где обозначено $S_R = \Omega \times \partial V_R$, $\Sigma_R^\pm = \big\{(x,v,t) \in \partial\Omega \times V_R, \pm(n(x) \cdot v) > 0\big\}$.

Производные $\partial f^\pm = \big\{f_t^\pm, \nabla_x f^\pm, \nabla_v f^\pm\big\}$ принадлежат $L_2\big(\Omega \times V_R \times [0,T]\big)$, причем $\partial f^\pm = \partial f \chi^\pm$, где $\chi^\pm = \chi^\pm(x,v,t)$ — характеристические функции носителей функций $f^\pm(x,v,t)$.

Учитывая это, умножаем уравнение (2.1) на f^- и интегрируем по $x \in \Omega$ и $v \in V_R$. Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|f^-\big|_2^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_R^+}(f^-)^2 n(x)\cdot v d\,\Sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}(f^-)^2 \operatorname{div}_v \Gamma_r^R dxdv + \sigma_r\big|\nabla_v f^-\big|_2^2 =$$

$$= \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} h\cdot f^- dxdv. \tag{2.8}$$

Согласно (2.2) имеем

$$\operatorname{div}_v \Gamma_r^R = -3\gamma_r + \Phi_r^R\big(|u-v|^2\big), \tag{2.9}$$

где $\Phi_r^R = 3\gamma_r\big(1-\Theta_R(|u-v|^2)\big) - 2\gamma_r\Theta_R'\big(|u-v|^2\big)|u-v|^2$ — неотрицательная функция от $|u-v|^2$.

Поэтому из (2.8) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|f^-\big|_2^2 - \frac{3}{2}\gamma_r\big|f^-\big|_2^2 + \sigma_r\big|\nabla_v f\big|_2^2 \le \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} hf^- dxdv. \tag{2.10}$$

Отсюда, полагая $\tilde{f^-}(x,v,t) = e^{-\frac{3}{2}\gamma_r t} f^-(x,v,t)$, получаем неравенство для $\tilde{f^-}(x,v,t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big|\tilde{f^-}\big|_2^2 + \sigma_r\big|\nabla_v \tilde{f^-}\big|_2^2 \le e^{-\frac{3}{2}\gamma_r t}\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} h\tilde{f^-} dxdv.$$

Интегрируя его по t от 0 до s $(0 < s < T)$, имеем

$$\frac{1}{2}\big|\tilde{f^-}\big|_2^2 + \sigma_r\int\limits_0^s \big|\nabla_v \tilde{f^-}(t)\big|_2^2 dt \le \int\limits_0^s\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} e^{-\frac{3}{2}\gamma_r t} h\tilde{f^-} dxdvdt + \frac{1}{2}\big|\tilde{f^-}(0)\big|_2^2.$$

Поскольку $\tilde{f^-} \le 0$, учитывая, что $f_0 \ge 0$ и $h \ge 0$, заключаем, что правая часть этого неравенства не положительна. В то же время левая часть неотрицательна, что возможно только при $\tilde{f^-} \equiv 0$. Следовательно, $f^- \equiv 0$ и, значит, согласно (2.7), решение задачи (2.1) – (2.5) $f \ge 0$.

***Замечание* 2.1.** Свойство (j) остается справедливым, если в задаче (2.1) – (2.5) равенство нулю в граничных условиях (2.3), (2.4) заменить такими неравенствами: $f(x,v,t) \ge 0$ при $(x,v) \in \Omega \times \partial V_R$ и $(x,v) \in \Sigma_R^-$. Это используется в следующем доказательстве.

***Доказательство свойства* (jj).** Пусть $f(x,v,t)$ — решение задачи (2.1) – (2.5). Обозначим $\hat{f}_0 = |f_0|_\infty$ и $\hat{h}(s) = \big|h(\cdot,s)\big|_\infty$ и рассмотрим функцию

$$\phi(x,v,t) = \hat{f}_0 e^{3\gamma_r t} + \int\limits_0^t e^{3\gamma_r(t-s)}\hat{h}(s)ds - f(x,v,t). \tag{2.11}$$

Учитывая уравнение (2.1) для $f(x,v,t)$ и формулу (2.9), нетрудно убедиться, что $\phi(x,v,t)$ удовлетворяет в области $\Omega \times V_R \times (0,T)$ уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \phi + \mathrm{div}_v(\Gamma_r^R \phi) - \sigma_r \Delta_v \phi = H(x,v,t),$$

где функция $H(x,v,t)$ определяется формулой

$$H(x,v,t) = \hat{h}(t) - h(t) + \Phi_r^R(x,v,t)\left[\hat{f}_0 e^{3\gamma_r t} + \int\limits_0^t e^{3\gamma_r(t-s)}\hat{h}(s)ds\right]$$

и, следовательно, не отрицательна.

Кроме того, из (2.11) следует, что начальные и граничные значения функции $\phi(x,v,t)$ также неотрицательны: $\phi(x,v,0) \geq 0$ и $\phi|_{S_R \times [0,T]} \geq 0$, $\phi|_{\Sigma_R \times [0,T]} \geq 0$. Поэтому, учитывая замечание 2.1, заключаем, что $\phi(x,v,t) \geq 0$ всюду в $\Omega \times V_R \times [0,T]$ и, значит,

$$f(x,v,t) \leq \hat{f}_0 e^{3\gamma_r t} + \int\limits_0^t e^{3\gamma_r(t-s)}\hat{h}(s)ds.$$

Отсюда в силу линейности задачи (2.1) – (2.5) следует требуемая L_∞-оценка.

***Доказательство свойства* (jjj).** Предположим, что в задаче (2.1) – (2.5) $f_0 \geq 0$ и $h \geq 0$. Тогда, согласно свойству (j), $f \geq 0$. Интегрируя уравнение (2.1) по $x \in \Omega$ и $v \in V_R$ и учитывая (2.3), получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} f(x,v,t)dxdv \int\limits_{\Sigma_R^+} f(n(x)\cdot v)d\Sigma_{xv} - \sigma_r \int\limits_{\partial V_R}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial n}dS_v dx =$$

$$= \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} h(x,v,t)dxdv. \tag{2.12}$$

Поскольку $f \geq 0$, из (2.4) следует, что производная по внешней нормали к ∂V_R $\dfrac{\partial f}{\partial n} \leq 0$.

Поэтому второе и третье слагаемые в левой части равенства (2.12) неотрицательны. Интегрируя его по t, получаем неравенство

$$\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} f(x,v,t)dxdv \leq \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} f_0(x,v)dxdv + \int\limits_0^t\int\limits_{V_R}\int h(x,v,s)dxdvds.$$

Отсюда в силу линейности задачи (2.1) – (2.5) следует L_1-оценка (jjj).

***Доказательство свойства* (jv).** Умножим уравнение (2.1) на $f(x,v,t)$ и проинтегрируем по $(x,v) \in \Omega \times V_R$. Тогда, учитывая (2.3), (2.4) и (2.9), интегрируем по частям и приходим к неравенству, аналогичному (2.8):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|f\right|_2^2 - \frac{3}{2}\gamma_r\left|f\right|_2^2 + \sigma_r\left|\nabla_v f\right|_2^2 \leq \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} hf dxdv.$$

Оценивая правую часть этого неравенства с помощью неравенства Юнга

$$\left|\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} hf dx dv\right| \leq \frac{\delta}{2}\left|f\right|_2^2 + \frac{1}{\delta}\left|h\right|_2^2,$$

получаем

$$\frac{d}{dt}\left|f\right|_2^2 - (3\gamma_r + \delta)\left|f\right|_2^2 + 2\sigma_r\left|\nabla_v f\right|_2^2 \leq \frac{2}{\sigma}\left|h\right|_2^2,$$

где δ — произвольное положительное число. Полагая $f = e^{(3\gamma_r+\delta)t}\tilde{f}$, приходим к такому неравенству для $\tilde{f}$:

$$\frac{d}{ds}\left|\tilde{f}(s)\right|_2^2 + 2\sigma_r\left|\nabla_v\tilde{f}(s)\right|_2^2 \leq \frac{2}{\delta}\left|h(s)\right|_2^2 e^{-(3\gamma_r+\delta)s},$$

где переменная t временно обозначена через s.

Умножим это неравенство на $e^{(3\gamma_r+\delta)t}$ и проинтегрируем по s от 0 до t. Возвращаясь к функции $f(x,v,t)$, получаем требуемую L_2-оценку (jv).

С помощью оценки (jv) нетрудно доказать, что решение $f(x,v,t)$ задачи (2.1) – (2.5) непрерывно зависит от исходных данных $f_0(x,v,t)$, $u(x,t)$ и $h(x,v,t)$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение (v). *Пусть* $f_1(x,v,t)$ *и* $f_2(x,v,t)$ — *решения задачи* (2.1) – (2.5), *соответствующие исходным данным* (f_{01},u_1,h_1) *и* (f_{02},u_2,h_2), *причем* $f_{0i} \in L_2(\Omega\times V_R)$, $u_i \in L_\infty\big(\Omega\times[0,T]\big)$, $h_i \in L_2\big(\Omega\times V_R\times[0,T]\big)$, $i=1,2$. *Тогда при любом* $\delta>0$ *выполняется неравенство*

$$\max_{0\leq t\leq T}\left\|[\,f\,]\right\|_2^2 + \sigma_r\left\|\nabla_v[\,f\,]\right\|_2^2 \leq \left(\left\|[\,f_0\,]\right\|_2^2 + \frac{2}{\delta}\left\|[\,h\,]\right\|_2^2\right)e^{(3\gamma_r+\delta)T} +$$

$$+\gamma_r^2\left\|[\,u\,]\right\|_\infty^2\left(\frac{1}{2\sigma_r}\left|f_{02}\right|_2^2 + \frac{1}{\delta\sigma_r}\left\|h_2\right\|_2^2\right)e^{(3\gamma_r+\delta)T},$$

где квадратными скобками обозначены разности $[f]=f_1-f_2$, $[u]=u_1-u_2$, $[h]=h_1-h_2$, $[f_0]=f_{01}-f_{02}$; *через* $\|\cdot\|_\infty$ *и* $\|\cdot\|_2$ *обозначены нормы в пространствах* $L_\infty(\Omega\times[0,T])$ *и* $L_2\big(\Omega\times V_R\times[0,T]\big)$ *соответственно.*

Для доказательства достаточно убедиться, что разность $[f]$ является решением задачи (2.1) – (2.5), где $u=u_1(x,t)$, $h=[h]-\gamma_2[u]\nabla_v f_2$ и $f_0=[f_0]$. Поэтому применение оценки (jv) к ее решению приводит к требуемому неравенству.

3. Построение приближенных решений. Рассмотрим следующую регуляризацию задачи (0.1) – (0.8):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla_x u - v\Delta_x u + \beta\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Theta_R\big(|u-v|^2\big)(u-v)f dv dr - \nabla_x p = g, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}_x u = 0, \qquad x\in\Omega, \quad t\in(0,T),$$

$$u = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \mathrm{div}_v \left[\Gamma_r^R(u,v) f\right] = \sigma_r \Delta_v f, \quad (x,v,t) \in \Omega \times V_R \times [0,T], \tag{3.3}$$

$$f = 0, \qquad (x,v,t) \in \partial\Omega \times V_R \times [0,T], \quad v \cdot n(x) < 0, \tag{3.4}$$

$$f = 0, \qquad (x,v,t) \in \Omega \times \partial V_R \times [0,T], \tag{3.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad f(x,v,r,0) = f_{0R}(x,v,r), \quad (x,v) \in \Omega \times V_R, \tag{3.6}$$

где V_R — шар в $\mathbb{R}_3$ радиуса $R \gg 1$, $\Theta_R(s)$ — срезающая функция, введенная в п. 2, $f_{0R}(x,v,r) = f_0(x,v,r)\Theta_R\big(|v|^2\big)$, $\Gamma_r^R = \gamma_r \Theta_R\big(|u-v|^2\big)(u-v) + g$, $\gamma_r = \gamma r^{-2}$, $\sigma_r = \sigma r^{-5}$, $0 < r \le 1$.

Слабое решение (u,f) этой задачи вводится так же, как в определении 1.1, т. е. $(u,f) \in U_T(\Omega) \times F_T(D_R)$ и выполняются интегральные тождества

$$\int_0^T \Bigg\{ (u, \xi_t + u \cdot \nabla_x \xi)_{2\Omega} - \nu(\nabla_x u, \nabla_x \xi)_{2\Omega} -$$

$$- \beta \left(\int_0^1 \int_{V_R} r\theta_R(|u-v|^2)(u-v) f dv dr, \xi \right)_{2\Omega} + (g,\xi)_{2\Omega} \Bigg\} dt + \big(u_0, \xi(0)\big)_{2\Omega} = 0, \tag{3.7}$$

$$\int_0^T \int_0^1 \Big\{ (f, \psi_t + v \cdot \nabla_x \phi + \Gamma_r^R(u,v) \cdot \nabla_v \phi)_{2G_R} - \sigma_r (\nabla_v f, \nabla_v \psi)_{2G_R} \Big\} dr dt +$$

$$+ \int_0^1 \big(f_0, \phi(0)\big)_{2G} dr = 0 \tag{3.8}$$

для любых вектор-функций $\xi(x,t)$ и функций $\phi(x,v,r,t)$, удовлетворяющих условиям (1.6), а также условию $\phi(x,v,r,t) = 0$ при $x \in \Omega$, $v \in \partial V_R$, $t \in [0,T]$, $r \in (0,1]$.

Будем строить приближенные решения $\big(u^{(n)}, f^{(n)}\big)$ задачи (3.7), (3.8), используя галеркинские аппроксимации для $u^{(n)}$. Пусть $\{\psi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, состоящий из собственных функций задачи

$$-\Delta\psi^k(x) + \nabla p^k(x) = \lambda_k \psi^k(x), \qquad \mathrm{div}\, \psi^k(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\psi^k(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Положим

$$u^{(n)}(x,t) = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)}(t) \psi^k(x), \tag{3.9}$$

где $c_k^{(n)}(t) \in C^1[0,T]$ — неизвестные функции, а $f^{(n)}$ определим как решения регуляризованной начально-краевой задачи (2.1) – (2.5) для уравнения Фоккера – Планка при $u(x,t) = u^{(n)}(x,t)$.

Для нахождения $c_k^{(n)}(t)$ потребуем, чтобы тождество (3.7) выполнялось для $u = u^{(n)}$ и $f = f^{(n)}$ на всех вектор-функциях $\xi(x,t) = h(t)\psi^k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $h(t) \in C^1[0,T]$, $h(T) = 0$.

Это приводит к соотношениям

$$\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + u^{(n)} \cdot \nabla_x u^{(n)} + \beta \int\limits_0^1 \int\limits_{V_R} r\Theta_R(|u^{(n)} - v|^2)(u^{(n)} - v) f^{(n)} dv dr, \psi^k\right)_{2\Omega} -$$

$$-\nu\big(\nabla_x u^{(n)}, \nabla_x \psi^k\big)_{2\Omega} = \big(g, \psi^k\big)_{2\Omega}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.10}$$

которые представляют собой систему дифференциально-функциональных уравнений для коэффициентов $c_k^{(n)}(t)$:

$$\frac{dc_k^{(n)}}{dt} + \sum_{l,m=1}^{n} \beta_{klm} c_l^{(n)} c_m^{(n)} + \sum_{l=1}^{n} \gamma_{kl} c_l^{(n)} +$$

$$+\beta \left(\int\limits_0^1 \int\limits_{V_R} r\Theta_R \left(\left|\sum_{l=1}^{n} c_l^{(n)} \psi^l - v\right|^2\right) \left(\sum_{l=1}^{n} c_l^{(n)} \psi^l - v\right) f^{(n)} dv dr, \psi^k\right)_{2\Omega} = g_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.11}$$

с начальными условиями

$$c_k^{(n)}(0) = c_{0k}, \qquad u_0^{(n)}(x, 0) = \sum_{k=1}^{n} c_{0k} \psi^k. \tag{3.12}$$

Здесь числа $\beta_{klm} = \beta_{kml}$, $\gamma_{kl} = \gamma_{lm}$, g_k определяются равенствами

$$\beta_{klm} = \big(\psi^l \cdot \nabla_x \psi^m, \psi^k\big)_{2\Omega}, \qquad \gamma_{lm} = \nu\big(\nabla_x \psi^k, \nabla_x \psi^m\big)_{2\Omega}, \quad g_k = \big(g, \psi^k\big)_{2\Omega},$$

а c_{0k} — коэффициенты разложения $u_0(x)$ по базису $\{\psi^k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} \psi^k(x). \tag{3.13}$$

Лемма 3.1. *Справедлива следующая априорная оценка*:

$$\max_{0 \le t \le T} \left(\|u^{(n)}\|_{2\Omega} + \frac{\beta}{\gamma} \int\limits_{D_{1R}} r^3 |v|^2 f^{(n)} dx dv dr\right) +$$

$$+2\beta \int\limits_0^T \int\limits_{D_{1R}} r\Theta_R\big(|u^{(n)} - v|^2\big)\big|u^{(n)} - v\big|^2 f^{(n)} dx dv dr dt +$$

$$+\nu \int\limits_0^T \big\|\nabla u^{(n)}\big\|_{2\Omega}^2 dt \le e^{\sigma T} \left(\|u_0\|_{2\Omega}^2 + \frac{\beta}{\gamma} \int\limits_{D_{1R}} r^3 |v|^2 f_0 dx dv dr\right) +$$

$$+\frac{e^{\delta T}-1}{\delta}\left\{\frac{12\beta\sigma}{\gamma}\int\limits_{D_{1R}} r^{-2}f_0dxdvdr+\frac{2}{\lambda\nu}\|g\|^2_{2\Omega}+\frac{4\beta g_1^2}{\gamma\delta}\int\limits_{D_{1R}} r^3f_0dxdvdr\right\}, \tag{3.14}$$

где $D_{1R}=\Omega\times V_R\times(0,1)$, δ — *произвольное положительное число*, λ — *наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области* Ω *с нулевым граничным условием на* $\partial\Omega$.

Доказательство. Умножая k-е соотношение (3.11) на $c_k^{(n)}(t)$ и суммируя по k от 1 до n, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\|u^{(n)}\big\|^2_{2\Omega}+\nu\big\|\nabla u^{(n)}\big\|_{2\Omega}+$$

$$+\beta\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Theta_R(|u^{(n)}-v|^2)(u^{(n)}-v)f^{(n)}dvdr, u^{(n)}\right)_{2\Omega}=(g,u^{(n)})_{2\Omega}. \tag{3.15}$$

Теперь умножим уравнение (3.3) для $u=u^{(n)}$ и $f=f^{(n)}$ на $r^3|v|^2$ и проинтегрируем по $x\in\Omega$, $v\in V_R$, $r\in(0,1]$. Тогда, после интегрирования по частям с учетом (3.4), получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_{1R}} r^3|v|^2f^{(n)}dxdvdr-2\gamma\int\limits_{D_{1R}} r\Theta_R\big(|u^{(n)}-v|^2\big)(u^{(n)}-v)vf^{(n)}dxdvdr+$$

$$+2\int\limits_{D_{1R}} r^3g_1\cdot vf^{(n)}dxdvdr+\int\limits_{\Sigma^+_{1R}} r^3|v|^2n_x\cdot vf^{(n)}dS_xdvdr=$$

$$=6\sigma\int\limits_{D_{1R}} r^{-2}f^{(n)}dxdvdr+\sigma\int\limits_{\Gamma_{1R}} r^{-2}R^2\frac{\partial f^{(n)}}{\partial n_v}dxdS_vdr, \tag{3.16}$$

где $\Sigma^+_{1R}=\partial\Omega\times V_R\times(0,1)\colon n_x\cdot v\geq 0$; $\Gamma_{1R}=\Omega\times\partial V_R\times(0,1)$, n_x — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, n_v — внешняя нормаль к ∂V_R.

В силу свойств решения задачи (2.1)–(2.5) $f^{(n)}\geq 0$ всюду, $f^{(n)}=0$ на Γ_{1R} и, значит, $\dfrac{\partial f}{\partial n_v}\leq 0$ на Γ_{1R}. Поэтому последнее слагаемое в левой части равенства (3.16) неотрицательно, а второе слагаемое в правой части не положительно. Учитывая это, из (3.15) и (3.16) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}A^{(n)}-\delta A^{(n)}+\beta\int\limits_{D_{1R}} r\Sigma_R\big(|u^{(n)}-v|^2\big)|u^{(n)}-v|^2f^{(n)}dxdvdr+\frac{\nu}{2}\big\|\nabla u^{(n)}\big\|^2_{2\Omega}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\nu\lambda}\|g\|^2_{2\Omega}+\frac{\beta g_1^2}{\gamma\delta}\int\limits_{D_{1R}} r^3f^{(n)}dxdvdr+\frac{3\beta\delta}{\gamma}\int\limits_{D_{1R}} r^{-2}f^{(n)}dxdvdr, \tag{3.17}$$

где

$$A^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\left\|u^{(n)}\right\|_{2\Omega}^2 + \frac{\beta}{\gamma}\int\limits_{D_{1R}} r^3|v|^2 f^{(n)}dxdvdr\right),$$

а δ — любое положительное число.

При этом мы воспользовались неравенством Юнга

$$\int\limits_{D_{1R}} r^3 g_1 v f^{(n)}dxdvdr \leq \delta \int\limits_{D_{1R}} r^3|v|^2 f^{(n)}dxdvdr + \frac{|g_1|^2}{4\delta}\int\limits_{D_{1R}} r^3 f^{(n)}dxdvdr$$

и неравенством Фридрихса

$$\|u\|_{2\Omega}^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left\|\nabla u^{(n)}\right\|_{2\Omega}^2, \quad u^{(n)} \in H_0^1(\Omega).$$

Выполняя в (3.17) замену $A^{(n)} = \tilde{A}^{(n)}e^{\delta t}$ и учитывая свойства (j), (jjj) решения $f^{(n)}$ задачи (2.1) – (2.5), получаем неравенство

$$e^{\delta T}\frac{d\tilde{A}^{(n)}}{dt} + \beta\int\limits_{D_{1R}} r\Theta_R\big(|u^{(n)} - v|^2\big)|u^{(n)} - v|^2 f^{(n)}dxdvdr + \frac{\nu}{2}\left\|\nabla u^{(n)}\right\|_{2\Omega}^2 \leq$$

$$\leq e^{\delta(T-t)}\left(\frac{1}{2\nu\lambda}\|g\|_{2\Omega}^2 + \frac{\beta g_1}{\gamma\delta}\int\limits_{D_{1R}} r^3 f_0 dxdvdr + \frac{3\beta\delta}{\gamma}\int\limits_{D_{1R}} r^{-2} f_0 dxdvdr\right),$$

где $0 < t \leq T$.

Теперь, интегрируя по t в пределах $0 < t \leq t'$ $(\forall t' < T)$, получаем требуемую оценку.

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *При любых* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $R > 2$ *существует решение* $c^{(n)}(t) = \big\{c_1^{(n)}(t), \ldots$ $\ldots, c_n^{(n)}(t)\big\} \in \big(C^1(0,T)\big)^n$ *задачи* (3.11), (3.12), *в которой* $f^{(n)}(x,v,r,t)$ *определено как решение начально-краевой задачи* (2.1) – (2.5) *при* $u = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)}(t)\psi^k(x)$ *начальной функции* $f_0(x,v,r)$, *удовлетворяющей условиям* (1.1) – (1.3). *При этом величина интервала* $(0,T)$ *определяется так же, как в теореме* 1.1.

Доказательство. Обозначим через $\big(C[0,T]\big)^n$ пространство непрерывных n-мерных вектор-функций $w = \big\{w_1(t), \ldots, w_n(t)\big\}$ с нормой

$$|w| = \max_{[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^n w_k^2(t)\right\}^{1/2},$$

а через K ограниченное замкнутое выпуклое множество в $\big(C[0,T]\big)^n$:

$$K = \big\{w\colon |w| \leq C(R,T),\ w_k(0) = c_{0k},\ k = 1, \ldots, n\big\},$$

где постоянная $C(R,T)$ будет выбрана ниже, а c_{0k} — коэффициенты в разложении (3.13).

Возьмем произвольный элемент $w^0 = \big\{w_1^0(t), \ldots, w_n^0(t)\big\}$ из K. Образуем вектор $u^0(x,t) = \sum_{k=1}^n w_k^0(t)\psi^k(x)$ и решим задачу (2.1) – (2.5) при $u = u^0$ с начальной функцией $f_{0R}(x,v,r)$.

Поскольку $u^0 \in C\big(0,T;\, W_1^2(\Omega)\big)$ $\big($в силу известных свойств собственных функций $\psi^k(x)\big)$, такое решение существует при любом $r>0$. Обозначим его через $f_R^0(x,v,r,t)$. По заданной $f_R^0(x,v,r,t)$ найдем вектор-функцию $w^1(t)=\big\{w_1^1(t),\ldots,w_n^1(t)\big\}$ как решение линеаризованной системы уравнений (3.11) вида

$$\frac{dw_k^1}{dt}+\sum_{l,m=1}^{n}\beta_{klm}w_l^0w_m^1+\sum_{l=1}^{n}\gamma_{kl}w_l^1=$$

$$=g_k-\beta\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Theta_R\left(\Big|\sum_{k=1}^{n}w_k^0\psi^k-v\Big|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n}w_k^0\psi^k-v\right)f_R^0dvdr,\psi^k\right)_{2\Omega} \tag{3.18}$$

с начальными условиями

$$w_k^1(0)=c_{0k}. \tag{3.19}$$

Эта задача Коши для линейной системы обыкновенных уравнений однозначно разрешима, и тем самым определен оператор $\Lambda\colon K\to\big(C[0,T]\big)^n$, сопоставляющий вектор-функции $w^0(t)$ вектор-функцию $w^1(t)$. Используя теорему о непрерывной зависимости решения задачи Коши (3.18), (3.19) от коэффициентов и правой части, а также свойство (jv) из п. 2, нетрудно показать, что этот оператор непрерывен.

Покажем, что постоянную $C(R,T)$ в определении множеств K можно выбрать так, что Λ будет отображать K в себя. Запишем задачу (3.18), (3.19) в терминах вектор-функций $u^1(x,t)=$ $=\sum_{k=1}^n w_k^1(t)\psi^k(x)$ следующим образом:

$$\left(\frac{du^1}{dt}+u^0\cdot\nabla_xu^1+\beta\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Theta_R\big(|u^0-v|^2\big)(u^0-v)f_R^0dvdr,\psi^k\right)_{2\Omega}+\nu(\nabla u^1,\nabla\psi^k)_{2\Omega}=$$

$$=(g,\psi^k)_{2\Omega},\quad k=1,\ldots,n, \tag{3.20}$$

$$u^1(x,0)=u_0^{(n)}(x), \tag{3.21}$$

где $u^0=\sum_{k=1}^n w_k^0(t)\psi^k$, $u_0^{(n)}(x)$ определено равенством (3.12).

Умножим k-е уравнение (3.20) на $w_k^1(t)$ и просуммируем по k. В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\|u^1\big\|_{2\Omega}^2+\nu\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}=(g,u^1)_{2\Omega}-\beta\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Theta_R\big(|u^0-v|^2\big)(u^0-v)f_R^0dvdr,u^1\right)_{2\Omega}. \tag{3.22}$$

Поскольку $u(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)$ $\forall t\geq 0$, первое слагаемое в правой части (3.22) можно оценить следующим образом:

$$\big|(g,u^1)_{2\Omega}\big|\leq\frac{\nu}{4}\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}^2+\frac{1}{\nu\lambda}\big\|g\big\|_{2\Omega}^2, \tag{3.23}$$

где λ — наименьшее собственное значение оператора Δ в области Ω при нулевом граничном условии.

Аналогичным образом, с учетом свойства (jj) решения f_R^0 задачи (2.1)–(2.5), оцениваем и второе слагаемое:

$$\left|\beta\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Omega_R\big(|u^0-v|^2\big)(u_0-v)f_R^0 dvdr, u^1\right)_{2\Omega}\right| \le$$

$$\le \frac{\nu}{4}\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}^2 + \frac{\beta^2R^2|v_R|}{\nu\lambda}\max_{D_{1R}}(e^{3\gamma_r T}f_0)\int\limits_{D_{1R}} f_0 dxdvdr \le$$

$$\le \frac{\nu}{4}\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}^2 + C_0(R,T), \tag{3.24}$$

где постоянная $C_0(R,T)$ зависит от начальной функции $f_0(x,v,r)$ и в силу свойств (1.1)–(1.3) $C_0(R,T)<\infty$ при всех $T>0$, если $a>2$, и $C_0(R,T)<\infty$ только при $T<\dfrac{\alpha}{3\gamma}$, если $a=2$.

Из (3.22), (3.23) и (3.12), (3.13) следует, что

$$\max_{0\le t\le T}\big\|u^1\big\|_{2\Omega}^2 + \nu\int\limits_0^T\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}^2 \le \frac{2T}{\nu\lambda}\big\|g\big\|_{2\Omega}^2 + 2TC_0(R,T) + \big\|u_0\big\|_{2\Omega}^2 \equiv C^2(R,T).$$

Отсюда, учитывая, что в силу равенства Парсеваля

$$\big\|u^1\big\|_{2\Omega}^2 = \sum_{k=1}^n\big(w_k^1(t)\big)^2 = |w^1(t)|^2,$$

заключаем, что при таком выборе $C(R,T)$ $w^1(t)$ принадлежит K.

Покажем теперь, что отображение $\Lambda\colon K\to K$ компактно. Для этого получим оценки производных $\dfrac{dw_k^1}{dt}$. Умножим k-е уравнение системы (3.20) на $\dfrac{dw_k^1}{dt}$ и просуммируем по k от 1 до n:

$$\big\|u_t^1\big\|_{2\Omega}^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}^2 = (g,u_t^1)_{2\Omega} - \big(u^0\cdot\nabla_x u^1, u_t^1\big)_{2\Omega} -$$

$$-\beta\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Theta_R\big(|u^0-v|^2\big)(u^0-v)f_R^0 dvdr, u_t^1\right)_{2\Omega}.$$

Отсюда, оценивая слагаемые в правой части с помощью неравенства Юнга, получаем

$$\frac{1}{4}\big\|u_t^1\big\|_{2\Omega}^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}^2 \le \big\|g\big\|_{2\Omega}^2 + |u^0|_{C(\Omega)}^2\big\|\nabla u^1\big\|_{2\Omega}^2 + C_0(R,T), \tag{3.25}$$

где $C_0(R,T)$ — постоянная, зависящая от начальной функции $f_0(x,v,r)$ (см. (3.24)).

Интегрируя это неравенство по $t\in[0,T]$, находим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T \|u_t^1\|_{2\Omega}^2 dt + \frac{\nu}{2}\|\nabla u^1(T)\|_{2\Omega}^2 \le T\|g\|_{2\Omega}^2 +$$

$$+|u^0|_\infty^2 \int\limits_0^T \|\nabla u^1\|_{2\Omega}^2 dt + C_0(R,T)T + \frac{\nu}{2}\|\nabla u^1(0)\|_{2\Omega}^2. \tag{3.26}$$

Учитывая, что $w^0(t)$, $w^1(t)$ принадлежат K, и, значит, в силу свойств собственных функций $\psi^k(x) \in H_0^1(\Omega)$ нормы $|u^0|_\infty = \max_{0<t\le T}|u^0|_{C(\Omega)}$ и $\max_{0<t\le T}\|\nabla u^1\|_{2\Omega}$ конечны (но зависят от n), из (3.26) получаем

$$\int\limits_0^T \|u_t^1\|_{2\Omega}^2 dt \le C_n,$$

откуда согласно равенству Парсеваля следует

$$\int\limits_0^T \sum_{k=1}^n \left(\frac{dw_k^1}{dt}\right)^2 dt \le C_n.$$

Поэтому, в силу компактности вложения $H^1[0,T]$ в $C[0,T]$, образ множества K при отображении Λ компактен в $C[0,T]$.

Таким образом, отображение Λ удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера и, значит, оно имеет на множестве K неподвижную точку $c(t) = \{c_1(t),\ldots,c_n(t)\}$, которая является решением задачи (3.11), (3.12) или, в терминах функции $u^{(n)}(x)$, задачи (3.10), (3.12). Из (3.9) следует, что $c(t)$ принадлежит $C^1[0,T]$.

Тем самым мы построили приближенные решения $u^{(n)}(x,t)$, $f^{(n)}(x,v,r,t)$, которые удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int\limits_0^T \Bigg\{ \big(u^{(n)}, \xi_t^{(m)}\big)_{2\Omega} - \nu\big(\nabla_x u^{(n)}, \nabla\xi^{(m)}\big)_{2\Omega} -$$

$$-\beta\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} r\Theta_R\big(|u^{(n)}-v|^2\big)(u^{(n)}-v)f^{(n)}dvdr, \xi^{(m)}\right)_{2\Omega} + (g,\xi^{(m)})_{2\Omega}\Bigg\} dt +$$

$$+\big(u_0^{(n)}, \xi^{(m)}(0)\big)_{2\Omega} = 0, \tag{3.27}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Big\{ (f^{(n)}, \phi_t + v\cdot\nabla_x\phi + \Gamma_r^R(u^{(n)},v)\cdot\nabla_v\phi)_{2G} + \sigma_r(\nabla_v f^{(n)}\cdot\nabla_v\phi)_{2G}\Big\} drdt +$$

$$+\int\limits_0^1 \big(f_{0R}, \phi(0)\big)_{2G} dr = 0 \tag{3.28}$$

для произвольной вектор-функции $\xi^{(m)}(x,t)$ вида

$$\xi^{(m)}(x,t)=\sum_{k=1}^{m}h_k^{(m)}(t)\psi^k(x), \qquad h_k^{(m)}\in C^1[0,T], \qquad h_k^{(m)}(T)=0 \quad \forall m\le n \tag{3.29}$$

и произвольной функции $\phi(x,t)$, удовлетворяющей сформулированным выше условиям (см. (1.6)).

Если в этих тождествах выполнить предельный переход при $n\to\infty$ и $R\to\infty$, то мы придем к тождествам (1.4), (1.5), т. е. к слабому решению задачи (0.1) – (0.8). Но для этого необходимо изучить свойства компактности решений $(u^{(n)},f^{(n)})$.

4. Компактность приближений $\{\boldsymbol{u^{(n)}},\boldsymbol{f^{(n)}}\}$. Далее всюду будем считать, что $R=n$, сохраняя за приближениями те же обозначения и предполагая, что $f^{(n)}$ продолжено нулем при $|v|>n$.

Из леммы 3.1, L_∞-оценки (j), L_2-оценки (jv) (п. 2) и предполагаемых оценок начальных данных (1.2), (1.3) следует, что:

1) последовательность вектор-функций $\{u^{(n)}(x)\}$ $*$-слабо компактна в $L_\infty\big([0,T];J(\Omega)\big)$ и слабо компактна в $L_2\big([0,T);J^1(\Omega)\big)$;

2) последовательность функций $f^{(n)}(x,v,r,t)$ $*$-слабо компактна в $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$ и слабо компактна в $L_{2\sigma_r}\big(Q\times[0,T];H_0^1(R_3)\big)$.

Однако, вследствие нелинейности задачи, этой информации недостаточно для выполнения предельного перехода в интегральных тождествах (3.27), (3.28). Поэтому докажем еще компактность последовательности $\{u^{(n)}(x,t)\}$ в $L_2\big(\Omega\times[0,T]\big)$.

Лемма 4.1. *При любом δ, $0<\delta<T$, справедлива оценка*

$$\int_0^{T-\delta}\big\|u^{(n)}(t+\delta)-u^{(n)}(t)\big\|_{2\Omega}^2dt\le C\delta^{1/2}, \tag{4.1}$$

где C не зависит от n и δ.

Доказательство. Зафиксируем δ и t: $0<\delta<T$, $0<t<T-\delta$ и запишем равенство (3.10) в виде

$$\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}+u^{(n)}\cdot\nabla_x u^{(n)}+\beta\int_0^1\int_{V_n}r\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)(u^{(n)}-v)f^{(n)}dvdr,\eta^{(n)}\right)_{2\Omega}+$$

$$+\nu\big(\nabla_x u^{(n)},\nabla_x\eta^{(n)}\big)_{2\Omega}=\big(g,\eta^{(n)}\big), \tag{4.2}$$

где $\eta^{(n)}$ — вектор-функция вида $\eta^{(n)}(x,t)=\sum_{k=1}^n h_k(t)\psi^k(x)$, $h_k(t)\in C[0,T]$.

Проинтегрируем равенство (4.2) по τ от t до $t+\delta$, а затем положим $\eta^{(n)}(x,t)=u^{(n)}(x,t+\delta)-u^{(n)}(x,t)$ $\big($это допустимо в силу построения $u^{(n)}(x,t)\big)$. В результате получим

$$\big\|u^{(n)}(t+\delta)-u^{(n)}(t)\big\|_{2\Omega}^2=-\int_t^{t+\delta}\Bigg\{r\Big(u^{(n)}(\tau),u^{(n)}(\tau)\cdot\nabla_x\big[u^{(n)}(t+\delta)-u^{(n)}(t)\big]\Big)_{2\Omega}+$$

$$+\nu\Big(\nabla_x u^{(n)}(\tau), \nabla_x\big[u^{(n)}(t+\delta) - u^{(n)}(t)\big]\Big)_{2\Omega} - \big(g, u^{(n)}(t+\delta) - u^{(n)}(t)\big)_{2\Omega} +$$

$$\left.+\beta\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_n} r(\Theta_n f^{(n)}\big(u^{(n)}(\tau) - v\big)dvdr, u^{(n)}(t+\delta) - u^{(n)}(t)\right)_{2\Omega}\right\} d\tau.$$

Отсюда следует

$$\big\|u^{(n)}(t+\delta) - u^{(n)}(t)\big\|^2_{2\Omega} \le \sum_{k=1}^4 \Big(I_k^{(n)}(t+\delta) + I_k^{(n)}(t)\Big), \tag{4.3}$$

где

$$I_1^{(n)}(t) = \int\limits_t^{t+\delta}\int\limits_\Omega \big|u^{(n)}(x,\tau)\big|^2\big|\nabla_x u^{(n)}(x,t)dxd\tau,$$

$$I_2^{(n)}(t) = \int\limits_t^{t+\delta}\int\limits_\Omega |\nabla_x u^{(n)}(x,\tau)||\nabla_x u^{(n)}(x,t)|dxd\tau,$$

$$I_3^{(n)}(t) = \int\limits_t^{t+\delta}\int\limits_\Omega g\big|u^{(n)}(x,t)\big|dxd\tau,$$

$$I_4^{(n)}(t) = \beta\int\limits_t^{t+\delta}\int\limits_\Omega\int\limits_0^1\int\limits_{V_R} rf^{(n)}\Theta_n\big(|u^{(n)}|^2\big)||u^{(n)}(x,t)|dvdrdxd\tau.$$

Проинтегрируем неравенство (4.3) по t от 0 до $T-\delta$ и покажем, что для каждого слагаемого в правой части справедлива оценка

$$\int\limits_0^{T-\delta}\big(I_k(t+\delta) + I_k(t)\big)dt \le C_k\delta^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, 4,$$

где постоянные C_k не зависят от n и δ. Использовав неравенство Коши и теорему вложения $H^1(\Omega)$ в $L_4(\Omega)$, запишем

$$\int\limits_0^{T-\delta} I_1^{(n)}(t)dt \le \int\limits_0^{T-\delta}\int\limits_t^{t+\delta}\left(\int\limits_\Omega\big|u^{(n)}(x,\tau)\big|^4dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega\big|\nabla_x u^{(n)}(x,t)\big|^2\right)^{1/2} d\tau dt \le$$

$$\le C\int\limits_0^{T-\delta}\int\limits_t^{t+\delta}\big\|\nabla_x u^{(n)}(\tau)\big\|^2_{2\Omega}\big\|\nabla_x u^{(n)}(t)\big\|_{2\Omega}d\tau dt.$$

Поменяем порядок интегрирования по τ и t (положив $u^{(n)}(x,t) = 0$ при $t < 0$):

$$\int\limits_0^{T-\delta} I_1(t)dt \le C \int\limits_0^T \left\|\nabla_x u^{(n)}(\tau)\right\|_{2\Omega}^2 \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau} \left\|\nabla_x u^{(n)}(t)\right\|_{2\Omega} dt d\tau.$$

Теперь, применяя к интегралу по t неравенство Коши, получаем

$$\int\limits_0^{T-\delta} I_1^{(n)}(t)dt \le C\delta^{1/2} \left(\int\limits_0^T \left\|\nabla u^{(n)}(t)\right\|_{2\Omega}^2 dt \right)^{3/2}. \tag{4.4}$$

Аналогично оцениваются интегралы для $I_2^{(n)}(t)$ и $I_3^{(n)}(t)$:

$$\int\limits_0^{T-\delta} I_2^{(n)}(t)dt \le \int\limits_0^{T-\delta} \int\limits_t^{t+\delta} \left\|\nabla_x u^{(n)}(\tau)\right\|_{2\Omega} \left\|\nabla u^{(n)}(t)\right\|_{2\Omega} \le$$

$$\le T^{1/2}\delta^{1/2} \int\limits_0^T \|\nabla u^{(n)}(t)\|_{2\Omega}^2 dt, \tag{4.5}$$

$$\int\limits_0^{T-\delta} I_3^{(n)}(t)dt \le g\left|\Omega\right|^{1/2} \delta \max_{0<t<T} \left\|u^{(n)}(t)\right\|_{2\Omega}. \tag{4.6}$$

Из (4.5), (4.6), используя лемму 3.1, получаем требуемые оценки для интегралов от $I_k^{(n)}$, $k = 1, 2, 3$.

Более сложно оценивается интеграл для $I_4^{(n)}(t)$. Применяя неравенство Коши по переменным $v \in V_n$ и $r \in (0, 1]$, получаем

$$I_4(t) \le \beta \int\limits_t^{t+\delta} \int\limits_\Omega \left|u^{(n)}(x,t)\right| \left\{ \int\limits_0^1 \int\limits_{V_n} r f^{(n)} dv dr \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^1 \int\limits_{V_n} r f^{(n)} \Theta_n\left(|u^{(n)} - v|^2\right) \left|u^{(n)} - v\right|^2 dv dr \right\}^{1/2} dx d\tau.$$

Для оценки интеграла по области Ω воспользуемся неравенством Гельдера с показателями 6, 3, 2. В результате получим

$$I_4(t) \le \beta \int\limits_0^{t+\delta} \left\{ \int\limits_\Omega \left|u^{(n)}(x,t)\right|^6 dx \right\}^{1/6} \times \left\{ \int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^1 \int\limits_{V_n} r f^{(n)}(x,v,r,t) dv dr \right)^{3/2} dx \right\}^{1/3} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 \int\limits_{V_n} r f^{(n)} \Theta_n\left(|u^{(n)} - v|^2\right) \left|u^{(n)} - v\right|^2 dv dr dx \right\}^{1/2} d\tau. \tag{4.7}$$

Оценим второй сомножитель в (4.7). Для этого умножим и разделим подынтегральную функцию на $r^{-2}\big(1+r^6|v|^2\big)^{2/3}$, а затем применим к интегралу по переменным v и r неравенство Гельдера с показателями 3 и $\dfrac{3}{2}$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_n} rf^{(n)}dvdr\right)^{3/2}dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_n} r^{-3}\big(1+r^6|v|^2\big)\big(f^{(n)}\big)^{3/2}dvdr\right)\left(\int\limits_0^1\int\limits_{V_n}\frac{r^9dvdr}{\big(1+r^6|v|^2\big)^2}\right)^{1/2}dx \leq$$

$$\leq C\big|f^{(n)}\big|_{\infty}^{1/2}\left(\int\limits_0^1 r^{-3}\big|f^{(n)}\big|_1 dr+\int\limits_G r^3|v|^2f^{(n)}dvdrdx\right). \tag{4.8}$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}_3}\frac{r^9dvdr}{\big(1+r^6|v|^2\big)^2}=\int\limits_{\mathbb{R}_3}\frac{dw}{\big(1+|w|^2\big)^2}=C<\infty, \tag{4.9}$$

которое легко получить заменой переменной $w=r^3w\in\mathbb{R}_3$.

Используя неравенства (4.7), (4.8), оценки (jj), (jjj), лемму 3.1 и учитывая свойства начальной функции $f_0(x,v,r,t)$ (см. (1.2), (1.3)), получаем

$$I_4^{(n)}(t)\leq C_1\delta^{1/2}\left\{\int\limits_{\Omega}\big|u^{(n)}(x,t)\big|^6dx\right\}^{1/6}\left\{\int\limits_0^T\int\limits_G rf^{(n)}\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)\big|u^{(n)}-v\big|^2dvdrdxdt\right\}^{1/2},$$

откуда в силу теоремы вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$ и леммы 3.1 следует, что

$$\int\limits_0^{T-\delta} I_4^{(n)}(t)dt\leq C_2\delta^{1/2}\left\{\int\limits_0^T\big\|\nabla u^{(n)}(t)\big\|_{2\Omega}^2dt\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^T\int\limits_G rf^{(n)}\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)\big|u^{(n)}-v\big|^2dvdrdxdt\right\}^{1/2}\leq C_3\delta^{1/2},$$

где постоянные $C_i,\ i=1,2,3,$ не зависят от n. Точно так же оцениваются интегралы от $I_k^{(n)}(t+\delta)$.

Лемма 4.1 доказана.

Из лемм 3.1 и 4.1 следует компактность последовательности $\big\{u^{(n)}(x,t)\big\}$ в $L_2\big(\Omega\times[0,T]\big)$ (см. [15, 16]).

5. Предельный переход в интегральных тождествах (3.27), (3.28). Положив $R = n$ и использовав результаты предыдущего пункта, выполним предельный переход в тождествах (3.27), (3.28) при $n \to \infty$.

***5.1. Предельный переход в тождестве* (3.27).** Выполним его сначала на пробных вектор-функциях $\xi^{(m)}$ вида (3.29) при любом фиксированном m (для простоты будем обозначать $\xi^{(m)} = \xi$).

Согласно леммам 3.1 и 4.1, последовательность аппроксимирующих вектор-функций $\{u^{(n)}(x,t)\}$ слабо компактна в $L_2\big([0,T]; H_0^1(\Omega)\big)$ и сильно компактна в $L_2\big(\Omega \times [0,T]\big)$, а по построению последовательность начальных функций $\{u_0^{(n)}(x)\}$ сильно сходится в $L_2(\Omega)$ к $u_0(x)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой вектор-функции $u(x,t)$, и обычным образом выполнить предельный переход на этой подпоследовательности в линейных относительно $u^{(n)}$ членах тождества (3.27). Столь же просто выполняется предельный переход в квадратичном относительно $u^{(n)}$ члене. Действительно, из равенства

$$\int_0^T \Big(u^{(n)}, u^{(n)} \cdot \nabla_x \xi\Big)_{2\Omega} dt = \int_0^t \big(u, u \cdot \nabla_x \xi\big)_{2\Omega} dt + \int_0^T \Big(u^{(n)} - u, u \cdot \nabla_x \xi\Big)_{2\Omega} dt +$$

$$+ \int_0^T \Big(u^{(n)}, (u^{(n)}, (u^{(n)} - u) \cdot \nabla_x \xi\Big)_{2\Omega} dt$$

и сильной сходимости подпоследовательности $\{u^{(n)}\}$ к u в $L_2\big(\Omega, [0,T]\big)$ следует

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big(u^{(n)}, u^{(n)} \cdot \nabla_x \xi\Big)_{2\Omega} dt = \int_0^T \Big(u, u \cdot \nabla_x \xi\Big)_{2\Omega} dt. \tag{5.1}$$

Для простоты сходящиеся подпоследовательности всюду обозначаются тем же индексом u, что и исходные последовательности.

Предельный переход в слагаемом, содержащем $f^{(n)}(x,v,r,t)$, требует более сложного анализа. Прежде всего заметим, что для любого $\delta > 0$ найдется такое R_δ ($R_\delta \to \infty$ при $\delta \to 0$), что

$$I^{(n)}(R_\delta) = \int_0^T \int_{G \cap \{|v| > R_\delta\}} r f^{(n)} \Theta_n\big(|u^{(n)} - v|^2\big)|u^{(n)} - v||\xi| dx dv dr dt < \delta \tag{5.2}$$

равномерно относительно n ($\xi = \xi^{(m)}$, m фиксировано).

Действительно, учитывая, что $\xi \in L_\infty\big(\Omega \times [0,T]\big)$, и повторяя рассуждения из п. 4, проведенные при оценке $I_4(t)$, получаем неравенство

$$I^{(n)}(R_\delta) \le C \int_0^1 \int_{|v| > R_\delta} \frac{r^9 dv dr}{\big(1 + r^6 |v|^2\big)^2},$$

в котором постоянная C не зависит от n (зависит от f_0 и m).

Отсюда в силу абсолютной сходимости интеграла (4.9) следует (5.2) при достаточно большом R_δ.

Зафиксируем $\delta > 0$, $R_\delta < \infty$ и обозначим

$$\hat{I}^{(n)}_{R_\delta} = \int\limits_0^T \int\limits_{G_\delta} r f^{(n)} \Theta\big(|u^{(n)} - v|^2\big)\big(u^{(n)} - v\big) \cdot \xi dx dv dr dt, \tag{5.3}$$

$$\hat{I}_{R_\delta} = \int\limits_0^T \int\limits_{D_\delta} r f (u - v) \cdot \xi dx dv dr dt, \tag{5.4}$$

где $D_\delta = D \cap \big\{v\colon |v| < R_\delta\big\}$, $D = \Omega \times R_3 \times (0,1]$, $f = f(x,v,r,t)$ — $*$-слабый предел $f^{(n)}(x,v,r,t)$ в $L_\infty\big(D \times [0,T]\big)$ а $u = u(x,t)$ — сильный предел $u^{(n)}(x,t)$ в $L_2\big(\Omega \times [0,T]\big)$ по выделенной подпоследовательности.

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}^{(n)}_{R_\delta} = \hat{I}_{R_\delta}. \tag{5.5}$$

Представим разность $\hat{I}^{(n)}_{R_\delta} - \hat{I}_{R_\delta}$ в виде

$$\hat{I}^{(n)}_{R_\delta} - \hat{I}_{R_\delta} = \sum_{i=1}^4 B_i^{(n)}, \tag{5.6}$$

где

$$B_1^{(n)} = \int\limits_0^T \int\limits_{D_\delta} r\big(f^{(n)} - f\big)(u - v) \cdot \xi dx dv dr dt,$$

$$B_2^{(n)} = \int\limits_0^T \int\limits_{D_\delta} r f^{(n)} \Big[\Theta_n\big(|u^{(n)} - v|^2\big) - \Theta_n\big(|u - v|^2\big)\Big](u^{(n)} - v) \cdot \xi dx dv dr dt,$$

$$B_3^{(n)} = \int\limits_0^T \int\limits_{D_\delta} r f^{(n)} \Big[\Theta_n\big(|u - v|^2\big) - 1\Big](u^{(n)} - v) \cdot \xi dx dv dr dt,$$

$$B_4^{(n)} = \int\limits_0^T \int\limits_{D_\delta} r f^{(n)} \big(u^{(n)} - u\big) \cdot \xi dx dv dr dt.$$

Поскольку $f^{(n)} \to f$ $*$-слабо в $L_\infty\big(D \times [0,T]\big)$, то $B_1^{(n)}$ стремится к нулю, так как функция $\big(u(x,t) - v\big) \cdot \xi(x,t) \in L_1\big(D_\delta \times [0,T]\big)$, а значит, продолжая ее нулем при $|v| > R_\delta$, получаем функцию из $L_1\big(D \times [0,T]\big)$.

Прежде чем оценить $B_2^{(n)}$, покажем, что при любых $R_\delta < \infty$ и $\kappa \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{|v|\le R_\delta}\int_\Omega\Big|\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)-\Theta_n\big(|u-v|^2\big)\Big|^\kappa dxdvdt=0. \tag{5.7}$$

Для этого воспользуемся неравенствами

$$\Big|\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)-\Theta_n\big(|u-v|^2\big)\big|\le 1,$$

$$\Big|\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)-\Theta_n\big(|u-v|^2\big)\Big|\le\hat\Theta\big||u^{(n)}-v|^2-|u-v|^2\big|\le$$

$$\le\hat\Theta\big|u^{(n)}-u\big|\big(|u^{(n)}|+|u|+2|v|\big),$$

где $\hat\Theta=\max_{\rho>0}|\Theta(\rho)|$ не зависит от x, v и n. Тогда при $\kappa\ge 1$ получаем

$$\int_0^T\int_{|v|\le R_\delta}\int_\Omega\Big|\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)-\Theta_n\big(|u-v|^2\big)\Big|^\kappa dxdvdt\le$$

$$\le\frac{4\pi R_\delta^3}{3}\hat\Theta\left\{\int_0^T\big\|u^{(n)}-u\big\|_{2\Omega}^2dt\right\}^{1/2}\left\{\left(\int_0^T\big\|u^{(n)}\big\|_{2\Omega}^2dt\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^T\|u\|_2^2dt\right)^{1/2}+2R_\delta\big|\Omega^{1/2}\big|T^{1/2}\right\}.$$

Отсюда в силу сходимости $u^{(n)}$ к u в $L_2\big(\Omega\times[0,T]\big)$ следует (5.7).

Теперь оценим $B_2^{(n)}$. Учитывая, что ξ принадлежит $L_\infty\big(\Omega\times[0,T]\big)$, а последовательность $f^{(n)}$ ограничена в $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$, получаем

$$B_2^{(n)}\le C\left\{\int_0^T\int_{|v|<R_\delta}\int_\Omega\Big|\Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)-\Theta_n\big(|u-v|^2\big)\Big|^2dxdvdt\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{R_\delta^{3/2}\left(\int_0^T\big\|u^{(n)}\big\|_{2\Omega}^2\right)^{1/2}+R_\delta^{5/2}|\Omega|^{1/2}T^{1/2}\right\},$$

где постоянная C не зависит от n и δ.

Отсюда в силу (5.7) и ограниченности норм $u^{(n)}$ в $L_2\big(\Omega\times[0,T]\big)$ следует, что $B_2^{(n)}\to 0$ при $n\to\infty$. Для оценки интеграла $B_3^{(n)}$ разобьем область $\Omega_T=\Omega\times[0,T]$ на две части:

$$\Omega_T^{1A}=\Big\{(x,t)\in\Omega_T\colon|u(x,t)|<A\Big\},\qquad\Omega_T^{2A}=\Omega_T\setminus\Omega_T^{1A},$$

где A — некоторое положительное число.

Поскольку $u(x,t)$ принадлежит $L_2(\Omega_T)$, то $\operatorname{mes}\Omega_T^{2A} \to 0$ при $A \to \infty$. Теперь представим интеграл $B_3^{(n)}$ в виде суммы

$$B_3^{(n)} = B_{31}^{(n)} + B_{32}^{(n)}, \tag{5.8}$$

где

$$B_{3i}^{(n)} = \int\limits_{\Omega_T^{iA}} \int\limits_0^1 \int\limits_{|v|<R_\delta} rf^{(n)} \Big[\Theta_n\big(|u-v|^2\big) - 1\Big](u^{(n)} - v) \cdot \xi dvdrdxdt, \quad i = 1, 2.$$

Так как при (x,t), принадлежащем Ω_T^{1A}, и $|v| < R_\delta$ $|u-v| \le (A + R_\delta)^2$, при достаточно больших n $\big(n^2 \ge (A+R_i)^2 + 1\big)$ $\Theta_n\big(|u-v|^2\big) = 1$, а значит, $B_{32}^{(n)} = 0$.

Далее, замечая, что последовательность функций $\Big\{rf^{(n)}\left[\Theta_n - 1\right]\Big\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $L_\infty\big(D\times$ $\times\, [0,T]\big)$, с помощью неравенств Коши получаем

$$B_{32}^{(n)} \le CR_\delta^3 \left\{\int\limits_{\Omega_T} |\xi|^2 dxdt\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_0^T \big\|u^{(n)}\big\|_{2\Omega}^2\right\}^{1/2} + \big|\Omega_T^{2A}\big| T^{1/2} R_\delta,$$

где $|\Omega_T^{2A}| = \operatorname{mes}\Omega_T^{2A}$, а C не зависит от δ, A и n.

Поскольку $\xi(x,t) \in L_2(\Omega_T)$, отсюда следует, что равномерно относительно n $B_{32}^{(n)} \to 0$ при $A \to \infty$, и, значит, согласно (5.8) $B_3^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогично оцениваем интеграл $B_4^{(n)}$:

$$B_4^{(n)} \le CR_\delta^3 \left\{\int\limits_0^T \big\|u^{(n)} - u\big\|_\Omega^2 dt\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_0^T \big\|\xi\big\|^2 dxdt\right\}^{1/2},$$

откуда в силу сильной сходимости $u^{(n)}$ к u в $L_2\big(\Omega\times[0,T]\big)$ следует, что и $B_4^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, все слагаемые $B_i^{(n)}$ в правой части (5.6) стремятся к нулю при $n \to \infty$ и, значит, (5.5) доказано.

Теперь, учитывая (5.2) – (5.6), выполняем переход при $n \to \infty$ в равенстве (3.27) в слагаемом, содержащем $f^{(n)}$, и приходим к требуемому тождеству (1.4) для вектор-функций $\xi = \xi^{(m)}(x,t)$ вида (3.29). Остается только заметить, что множество таких вектор-функций слабо плотно в пространстве $H^1\big(\Omega \times [0,T]\big)$ в множестве вектор-функций, удовлетворяющих условиям (1.6). Следовательно, тождество (1.4) установлено.

***5.2. Предельный переход в тождестве* (3.28).** Обозначим через D_δ^ε и Q_δ^ε такие подобласти D:

$$D_\delta^\varepsilon = D \cap \big\{r > \varepsilon,\, |v| < R(\delta)\big\}, \qquad Q_\delta^\varepsilon = D \setminus D_\delta^\varepsilon.$$

Учитывая вид вектор-функции $\Gamma_r^R\big(u^{(n)}, v\big)$ (см. (2.2)) и ограниченность последовательности $\big\{f^{(n)}\big\}$ в $L_\infty\big(D \times [0,T]\big)$, записываем

$$I^\varepsilon_{1\delta} \equiv \int\limits_0^T \int\limits_{Q^\varepsilon_\delta} f^{(n)} \big| \Gamma^n_r \cdot \nabla_v \phi \big| dxdvdrdt \leq$$

$$\leq C \left\{ \int\limits_0^T \int\limits_D r f^{(n)} \Theta_n\big(|u^{(n)} - v|^2\big) \big| u^{(n)} - v \big|^2 dxdvdrdt \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_0^T \int\limits_{Q^\varepsilon_\delta} \frac{|\nabla_v \phi}{r^5} dxdvdrdt \right\}^{1/2}$$

и

$$I^\varepsilon_{2\delta} \equiv \int\limits_0^T \int\limits_{Q^\varepsilon_\delta} f^{(n)} |v \cdot \nabla_x \phi| dxdvdrdt \leq$$

$$\leq C \left\{ \int\limits_0^T \int\limits_D r^3 |v|^2 f^{(n)} dxdvdrdt \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_0^T \int\limits_{Q^\varepsilon_\delta} \frac{|\nabla_x \phi|^2}{r^3} dxdvdrdt \right\}^{1/2},$$

где постоянная C не зависит от n, $R(\delta)$ и ε.

В силу свойств функций $\phi(x, v, r, t)$ (см. (1.6)) из этих неравенств и леммы 3.1 следует, что при любом $\delta > 0$ существуют такие $R(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, что

$$I^\varepsilon_{1\delta} < \delta, \qquad I^\varepsilon_{2\delta} < \delta. \tag{5.9}$$

Зафиксируем достаточно малое $\delta > 0$ и подходящие $\varepsilon(\delta)$, $R(\delta)$ и продолжим вектор-функции $\Gamma^n_r(u^{(n)}, v)$, $\nabla_x \phi$ и $\nabla_v \phi$ нулем на внешность области D_δ. Тогда, учитывая $*$-слабую сходимость $f^{(n)}(x, v, r, t)$ в $L_\infty\big(\Omega \times [0, T]\big)$ и сильную сходимость $u^{(n)}$ в $L_2\big(\Omega \times [0, T]\big)$, выполняем предельный переход при $n \to \infty$ в первом интеграле тождества (3.28) по ограниченной области $D^\varepsilon_\delta \times [0, T]$ так же, как и в тождестве (3.27). После этого переходим к пределу при $\delta \to 0$ ($\varepsilon(\delta) \to 0$, $R(\delta) \to \infty$) с учетом (5.9).

Наконец, в силу слабой сходимости $f^{(n)}$ к f в пространстве $L_{2\sigma_r}\big(D \times [0, T]; H^1_0(R_3)\big)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \sigma_r \Big(\nabla_v f^{(n)}_0, \nabla_v \phi \Big)_D drdt = \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \sigma_r \big(\nabla_v f, \nabla_v \phi \big)_D drdt.$$

Таким образом, тождество (1.5) также установлено и тем самым теорема 1.1 доказана полностью.

6. Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\phi(x, v, r)$ — произвольная функция из $L_\infty(D)$ $\big(D = \Omega \times \mathbb{R}_3 \times (0, 1]\big)$. Рассмотрим функцию

$$\psi^{(n)}(t) = \int\limits_D f^{(n)}(x, v, r, t) \phi(x, v, r) dxdvdr, \tag{6.1}$$

где $f^{(n)}$ — решение задачи (2.1) – (2.5), в которой $u = u^{(n)}(x, t)$ и $R = n$.

Лемма 6.1. *Функции $\phi^{(n)}(t)$ непрерывны по t равностепенно относительно n и ограничены в $C[0,T]$ равномерно по n.*

Доказательство. Равномерная ограниченность функций $\psi^{(n)}(t)$ следует из свойства (jjj) решения задачи (2.1) – (2.5) (см. п. 2). Для доказательства равностепенной непрерывности воспользуемся обозначениями $D_\delta = D \cap \big\{|v| < R(\delta)\big\}$ и $Q_\delta = D \cap \big\{|v| \geq R(\delta)\big\} = D \setminus D_\delta$ и введем функцию $\phi_{\varepsilon\delta}(x,v,r) \in C_0^2(D_\delta)$ с компактным носителем в D_δ такую, что

$$\|\phi - \phi_{\varepsilon\delta}\|_{L_1(D\times[0,T])} \leq \frac{\varepsilon}{2A}, \tag{6.2}$$

где $A = \sup_n \|f^{(n)}\|_{L_\infty(D\times[0,T])}$.

Это возможно, поскольку $\phi \in L_\infty(D)$, область $D_\delta \subset D$ ограничена и, согласно (jj) и (1.6), последовательность $\{f^{(n)}\}$ ограничена в $L_\infty\big(D \times [0,T]\big)$.

Теперь представим функцию (6.1) в виде

$$\psi^{(n)}(t) = \int\limits_{D_\delta} f^{(n)}\phi_{\varepsilon\delta}dxdvdr + \int\limits_{D_\delta} f^{(n)}(\phi - \phi_{\varepsilon\delta})dxdvdr + \int\limits_{Q_\delta} f^{(n)}\phi dxdvdr. \tag{6.3}$$

Из (6.2) следует такая оценка для второго интеграла в правой части (6.3):

$$\sup_n \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int\limits_{D_\delta} f^{(n)}(\phi - \phi_{\varepsilon\delta})dxdv \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.4}$$

Оценим еще третий интеграл. Умножая и деля подынтегральное выражение на $r^{-6}\big(1 + r^{12}|v|^2\big)^{2/3}$, с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\left| \int\limits_{Q_\delta} f^{(n)}\phi dxdvdr \right| \leq |\phi|_\infty \big|f^{(n)}\big|_\infty^{1/3} \big|\Omega\big|^{1/3} \left\{ \int\limits_{Q_\delta} \big(r^{-9} + r^3|v|^2\big) f^{(n)} dxdvdr \right\}^{2/3} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^1 \int\limits_{|v|\geq R(\delta)} \frac{r^{18}}{\big(1 + r^{12}|v|^2\big)^2} dvdr \right\}^{1/3}. \tag{6.5}$$

Поскольку интеграл

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}_3} \frac{r^{18}}{\big(1 + r^{12}|v|^2\big)^2} dvdr = \int \frac{dw}{\big(1 + |w|^2\big)^2}$$

сходится, последний сомножитель в (6.5) можно сделать сколь угодно малым, если выбрать $R(\delta)$ достаточно большим. Поэтому, учитывая оценки (jj) и (jjj) для $f^{(n)}(x,v,r,t)$, свойства начальной функции f_0 (1.6) и лемму 3.1, заключаем, что для любого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int\limits_{Q_\delta} f^{(n)}\phi dxdvdr \right| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{6.6}$$

Из (6.3), (6.4) и (6.6) следует, что

$$\left|\psi^{(n)}(t+\Delta t)-\psi^{(n)}(t)\right| \le \int\limits_{D_\delta} |f^{(n)}(t+\Delta t)-f^{(n)}(t)||\phi_{\varepsilon\delta}|dxdvdr+\varepsilon+\delta. \qquad (6.7)$$

Учитывая, что функция $f^{(n)}(x,v,r,t)$ является решением задачи (2.1) – (2.5) (где $u=u^{(n)}$ и $R=n$), а $\phi_{\varepsilon\delta}$ принадлежит $C_0^2(D_\delta)$, из (6.4) получаем

$$\left|\psi^{(n)}(t+\Delta t)-\psi^{(n)}(t)\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_{D_\delta} f^{(n)}\Big[v\cdot\nabla_x\phi_{\varepsilon\delta}+\Gamma_r^n(u^{(n)},v)\cdot\nabla_v\phi_{\varepsilon\delta}+\sigma_r\Delta_v\phi_{\varepsilon\delta}\Big]dxdvdrdt\right|+\varepsilon+\delta.$$

Отсюда с учетом того, что область D_δ ограничена, $\phi_{\varepsilon\delta}\in C_0^2(D_\delta)$ и последовательности $\{f^{(n)}\}$ и $\{u^{(n)}\}$ ограничены в $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$ и $L_\infty\big([0,T];L_2(\Omega)\big)$, приходим к неравенству

$$\left|\psi^{(n)}(t+\Delta t)-\psi^{(n)}(t)\right| \le C(\varepsilon,\delta)|\Delta t|+\varepsilon+\delta,$$

где $C(\varepsilon,\delta)$ не зависит от n.

Поскольку $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ можно выбрать сколь угодно малыми, из этого неравенства следует, что функции $\psi^{(n)}$ непрерывны по t равностепенно по n.

Лемма 6.1 доказана.

Из этой леммы следует, что из последовательности функций $\{\psi^{(n)}\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к некоторой непрерывной функции $\psi(t)$ равномерно по $t\in[0,T]$. Далее за этой подпоследовательностью сохраним то же обозначение $\{\psi^{(n)}(t)\}$. Покажем, что предельная функция $\psi(t)$ представляется интегралом

$$\psi(t)=\int\limits_D f(x,v,r,t)\phi(x,v,r)dxdvdr, \qquad (6.8)$$

где $f(x,v,r,t)$ — $*$-слабый предел последовательности $\{f^{(n)}\}$ в $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$.

Пусть a, b ($b>a$) — произвольные точки отрезка $[0,T]$, а $\chi_{[a,b]}(t)$ — характеристическая функция $[a,b]$. Тогда, учитывая, что $\phi_{\varepsilon\delta}(x,v,r)\chi_{[a,b]}(t)\in L_1\big(D\times[0,T]\big)$, а $f^{(n)}$ сходится $*$-слабо в $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$ к $f(x,v,r,t)$, с помощью равенства (6.7) и оценок (6.4), (6.6) получаем

$$\left|\int\limits_0^T\psi(t)\chi_{[a,b]}(t)dt-\int\limits_0^T\int\limits_{D_\delta}f\phi_{\varepsilon\delta}\chi_{[a,b]}dxdvdrdt\right|\le\frac{\varepsilon+\delta}{2}(b-a).$$

Поскольку f принадлежит $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$, из (6.2) следует, что в этом неравенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$ и получить

$$\left|\int\limits_0^T\psi(t)\chi_{[a,b]}(t)dt-\int\limits_0^T\int\limits_{D_\delta}f\phi\chi_{[a,b]}dxdvdrdt\right|\le\frac{\delta}{2}(b-a). \qquad (6.9)$$

Так как при $\delta \to 0$ $R(\delta) \to \infty$ и, значит, области D_δ исчерпывают область D, из (6.9) следует равенство

$$\int_0^T \psi(t)\chi_{[a,b]}(t)dt = \int_0^T\int_D f\phi\chi_{[a,b]}dxdvdrdt$$

для произвольных a, $b \in [0,T]$. Тем самым равенство (6.8) установлено. Из этого равенства следует, что предельная функция $f(x,v,r,t)$ непрерывна по t в слабой топологии $L_1(D)$ и, значит, утверждение (i) теоремы 1.2 установлено.

Утверждение (ii) следует из $*$-слабой сходимости функций $f^{(n)}(x,v,r,t)$ к $f(x,v,r,t)$ в $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$ и неотрицательности $f^{(n)}(x,v,r,t)$ (см. свойство (j), п. 2).

Для того чтобы установить утверждение (iii), заметим, что из (6.1) и леммы 6.1 следует, что последовательность $\big\{f^{(n)}(x,v,r,t)\big\}$ сходится к $f(x,v,r,t)$ равномерно по $t\in[0,T]$ в слабой топологии $L_1(D)$. Поэтому равномерно по $t\in[0,T]$

$$\int_D f(x,v,r,t)dxdvdr = \lim_{n\to\infty}\int_D f^{(n)}(x,v,r,t)dxdvdr,$$

откуда с учетом свойства (jjj) получаем утверждение (iii).

Теперь установим свойство (iv) вектор-функции $u(x,t)$, которая является пределом в $L_2\big(\Omega\times$ $\times\,[0,T]\big)$ галеркинских приближений (3.9), где коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$ определяются из равенств (3.10), (3.11). Покажем, что при любом фиксированном k функции $c_k^{(n)}$ равностепенно (относительно n) непрерывны по $t\in[0,T]$ и равномерно (по n) ограничены в $C[0,T]$. Равномерная ограниченность следует из равенства Парсеваля, леммы 3.1 и свойств (1.6) начальных данных:

$$\max_{0\le t\le T}\sum_{k=1}^n \big|c_k^{(n)}(t)\big|^2 = \max_{0\le t\le T}\big\|u^{(n)}\big\|_{2\Omega}^2 < C(u_0,f_0), \tag{6.10}$$

где постоянная $C(u_0,f_0)$ не зависит от n.

Равностепенную непрерывность докажем с помощью равенства (3.10). Учитывая, что

$$\dot c_k^{(n)}(\tau) = \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\tau},\psi^k\right)_{2\Omega},$$

интегрируя (3.10) по τ от t до $t+\Delta t$ и оценивая остальные слагаемые по неравенству Коши, получаем

$$\big|c_k^{(n)}(t+\Delta t) - c_k^{(n)}(t)\big| \le |\Delta t|g\|\psi^k\|_{2\Omega}+$$

$$+\sqrt{|\Delta t|}\left(\nu\big\|\nabla\psi^k\big\|_{2\Omega} + |\psi^k|_\Omega\max_t\big\|u^{(n)}\big\|_{2\Omega}\right)\left(\int_0^T\big\|\nabla_x u^{(n)}\big\|_{2\Omega}^2 d\tau\right)^{1/2} +$$

$$+\beta\sqrt{|\Delta t|}|\psi^k|_\Omega \left(\max_{0<\tau\le T} \int\limits_D f^{(n)} dxdvdr \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^T \int\limits_D r f^{(n)} \Theta_n\big(|u^{(n)}-v|^2\big)\big|u^{(n)}-v\big|^2 dxdvdrd\tau \right)^{1/2}.$$

Отсюда в силу леммы 3.1 и свойства (jj) функции $f^{(n)}(x,v,r,t)$, а также свойства базисных функций ϕ^k следует, что

$$\big|c_k^{(n)}(t+\Delta t) - c_k^{(n)}(t)\big| \le C(k,u_0,f_0)\sqrt{|\Delta t|}, \tag{6.11}$$

где постоянная $C(k,u_0,f_0)$ не зависит от n.

Таким образом, согласно (6.10) и (6.11) при любом k последовательность функций $\big\{c_k^{(n)}(t)\big\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Используя диагональный процесс, можно выделить подпоследовательность $\{n_j\}$ такую, что при любом k подпоследовательность $\big\{c_k^{(n_j)}\big\}$ сходится равномерно на $[0,T]$ к некоторой непрерывной функции $c_k(t)$. Далее сохраняем за этой подпоследовательностью прежнее обозначение $\big\{c_k^{(n)}(t)\big\}$.

Покажем теперь, что соответствующая подпоследовательность

$$u^{(n)}(x,t) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)}(t)\psi^k(x)$$

сходится равномерно по t в слабой топологии $L_2(\Omega)$. Пусть $\phi(x)$ — произвольная вектор-функция из $L_2(\Omega)$, а ϕ_k — ее коэффициенты Фурье по системе $\big\{\psi^k(x)\big\}$.

Для любого N нетрудно получить неравенство

$$\sup_{0\le t\le T}\left| \int\limits_\Omega u^{(n)}(x,t)\cdot\phi(x)dx - \int\limits_\Omega u^{(m)}(x,t)\cdot\phi(x)dx \right| \le$$

$$\le \sup_{0\le t\le T}\left| \sum_{k=1}^{N} \phi_k\big(c_k^{(n)}(t) - c_k^{(m)}(t)\big) \right| + \sup_{0\le t<T}\big(\|u^{(n)}\|_{2\Omega} + \|u^{(m)}\|_{2\Omega}\big)\times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega |\phi(x) - \sum_{k=1}^{N}\phi_k\psi^k(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

В силу леммы 3.1 правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой, выбрав сначала достаточно большое N, а затем достаточно большие n и m.

Таким образом, последовательность непрерывных функций

$$\hat\phi^{(n)}(t) = \int\limits_\Omega u^{(n)}(x,t)\cdot\phi(x)dx$$

фундаментальна в $C[0,T]$ и, значит, сходится к некоторой непрерывной функции $\hat{\phi}(t)$. Учитывая, что $u^{(n)}(x,t)$ сходится в $L_2\big(\Omega\times[0,T]\big)$ к $u(x,t)$, заключаем, что

$$\hat{\phi}(t)=\int\limits_{\Omega}u(x,t)\cdot\phi(x)dx.$$

Тем самым утверждение (iv) теоремы 1.2 установлено.

Осталось убедиться в справедливости оценки (v). Это следует из неравенства (3.14). Действительно, неравенство (3.14) сохраняется, если в нем в левой части R заменить любым фиксированным числом $R'\le R$. После этого, переходя к пределу при $R=n$ и $n\to\infty$ и учитывая, что $u^{(n)}$ сходится к u в $L_2\big(D\times[0,T]\big)$, а также слабо в $L_2\big([0,T],J^1(\Omega)\big)$ и равномерно по t в слабой топологии $L_2(\Omega)$, а $f^{(n)}$ сходится $*$-слабо в $L_\infty\big(D\times[0,T]\big)$ и равномерно по t в слабой топологии $L_1(D)$, получаем

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|u\|_{2\Omega}+\frac{\beta}{\gamma}\int\limits_{D_{1R'}}r^3|v|^2fdxdvdr\right)+$$

$$+2\beta\int\limits_0^T\int\limits_{D_{1R'}}r\Theta_{R'}\big(|u-v|^2\big)|u-v|^2fdxdvdrdt+\nu\int\limits_0^T\big\|\nabla u\big\|_{2\Omega}^2dx\le$$

$$\le e^{\delta T}\left(\big\|u_0\big\|_{2\Omega}^2+\frac{\beta}{\gamma}\int\limits_D r^3|v|^2f_0dxdvdr\right)+$$

$$+\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}\left\{\frac{12\beta\sigma}{\gamma}\int\limits_D r^{-2}f_0dxdvdr+\frac{2}{\lambda\nu}\big\|g\big\|_{2\Omega}^2+\frac{4\beta g_1^2}{\gamma\delta}\int\limits_D r^3f_0dxdvdr\right\},$$

где все обозначения соответствуют лемме 3.1.

Поскольку в этом неравенстве R' можно выбирать произвольно, из него в силу свойств начальных данных u_0 и f_0 (см. (1.2), (1.3)) следует требуемая оценка (v).

А. *Доказательство теоремы* 2.1. Воспользуемся методом работы [12], основанным на применении следующей теоремы Ж.-Л. Лионса [17].

Теорема А.1. *Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$, $M\subset H$ — пространство с нормой $\|\cdot\|$, причем вложение M в H непрерывно.*

Пусть $E(\cdot,\phi):M\times M\to R$ — билинейная форма, такая, что $E(\cdot,\phi)$ непрерывно в H и $E(\phi,\phi)\ge a\|\phi\|$ $\forall\phi\in M$, $a>0$. Тогда для данной линейной формы $L\in M'$ существует решение $f\in H$ задачи

$$E(f,\phi)=L(\phi)\quad\forall\phi\in M. \tag{A.1}$$

Определим пространства H и M следующим образом: $H=L_2\big([0,T]\times\Omega;H_0^1(V_R)\big)$ и $M=\mathcal{D}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\times\overline{V_R}\,\big)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $[0,T)\times(\overline{\Omega}\times V_R)\setminus\Sigma_R^+$, где $\Sigma_R^+=\big\{(u,v)\in\partial\Omega\times V_R\colon(v,n(x))\ge 0\big\}$.

Норма в пространстве M задается формулой

$$\|\phi\|_M^2 = \|\phi\|_H^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} \phi^2(x,v,0)dxdv,$$

где $\|\cdot\|_H$ — норма в $L_2\big([0,T]\times\Omega;\ H_0^1(V_R)\big)$.

Определим билинейную и линейную формы следующим образом:

$$E(f,\phi) = \int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} f\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t} - v\cdot\nabla_x\phi + \lambda\phi - \big(\Gamma_r^R(u,v)f - \sigma_r\nabla_v f\big)\cdot\nabla_v\phi\right]dxdvdt,$$

$$L(\phi) = -\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} h'\phi dxdvdt - \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} f_0\Theta_R\big(|v|^2\big)\phi(x,v,0\big)dxdv,$$

где $\lambda > \dfrac{3\beta}{2r^2}$, $h' = he^{-\lambda t}$.

Ясно, что $E(\cdot,\phi)$ непрерывна в $L_2\big([0,T]\times\Omega; H_0^1(V_R)\big)$. Учитывая, что $\operatorname{supp}\phi \in [0,T)\times$ $\times\,(\overline{\Omega}\times V_R)\setminus\Sigma_R^+$, получаем

$$E(\phi,\phi) = \int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}\left[\Big(\lambda - \frac{3\beta}{2r^2}\Big)\phi^2 + \sigma_r|\nabla_v\phi|^2\right]dxdvdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}\phi^2(x,v,0)dxdv - \int\limits_{\Sigma_R^-}\phi^2\big(v,n(x)\big)dS_x dv,$$

где $\Sigma_R^- = \Big\{(x,v)\in\partial\Omega\times V_R\colon \big(v,n(x)\big) < 0\Big\}$.

Поскольку $\lambda - \dfrac{3\beta}{2r^2} > 0$ и $\big(v,n(x)\big) < 0$ на Σ_R^-, то

$$E(\phi,\phi) \geq a\left(\|\phi\|_H^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}\phi^2(x,v,0)dxdv\right) = a\big\|\phi\big\|_M^2, \quad a > 0.$$

Таким образом, условия теоремы Ж.-Л. Лионса выполнены и, согласно этой теореме, существует функция $\tilde{f}\in L_2\big([0,T]\times\Omega; H_0^1(V_R)\big)$, удовлетворяющая уравнению (А.1), т. е.

$$\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}\left\{\tilde{f}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + v\cdot\nabla_x\phi - \lambda\phi + \Gamma_r^R\cdot\nabla_v\phi\right] - \sigma_r\nabla_v\tilde{f}\cdot\nabla_v\phi\right\}dxdvdt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} h'\phi dxdvdt + \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} f_0\Theta_R\phi(x,v,0)dxdv \qquad \forall\phi\in M. \tag{A.2}$$

Отсюда следует, что функция $\tilde f$ удовлетворяет в области $\Omega \times V_R \times [0,T]$ уравнению

$$\frac{\partial \tilde f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x \tilde f + \lambda \tilde f + div_v\Big[\Gamma_r^R(u,v)\tilde f\Big] - \sigma_r \Delta_v \tilde f = h' \tag{A.3}$$

в смысле распределений.

Учитывая, что $\tilde f \in H = L_2\big([0,T]\times\Omega; H_0^1(V_R)\big)$, $h' \in L_2\big(\Omega\times V_R\times[0,T]\big)$ и $\Gamma_r^R \in L_\infty\big(\Omega\times$ $\times V_R\times[0,T]\big)$, с помощью (A.3) и (2.2) имеем

$$\frac{\partial \tilde f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x \tilde f \in L_2\big(\Omega\times[0,T]; H^{-1}(V_R)\big),$$

т. е. $\tilde f \in F$.

В работе [12] показано, что функции $\tilde f \in F$ имеют следы $\tilde f(x,v,0)$, $\tilde f(x,v,T) \in L_2(\Omega\times V_R)$

$$\tilde f|_{\partial\Omega\times V_R\times[0,T]} \in L_2\Big(\partial\Omega\times V_R\times[0,T], \big|v\cdot n(x)\big| dS_x dv dt\Big).$$

Учитывая это, получаем формулу Грина

$$\left\langle \frac{\partial \tilde f}{\partial t} + v\cdot\nabla_v \tilde f,\, \tilde\phi \right\rangle_{H'H} + \left\langle \frac{\partial \tilde \phi}{\partial t} + v\cdot\nabla_x \tilde \phi,\, \tilde f \right\rangle_{H'H} =$$

$$= \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} \tilde f(x,v,T)\tilde\phi(x,v,T)dxdv - \int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} \tilde f(x,v,0)\tilde\phi(x,v,0)dxdv +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Sigma_R^-} \tilde f\tilde\phi v\cdot n(x) dS_x dv dt, \tag{A.4}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'H}$ — билинейная форма $H'\times H \to R$, $\tilde f, \tilde\phi \in F \subset H$.

Полагая в этой формуле $\tilde\phi = \phi \in M$, с помощью (A.2), (A.3) получаем

$$\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} (\tilde f(x,v,0) - f_0(x,v)\cdot\Theta_R\big(|v|^2\big)\phi dxdv + \int\limits_0^T\int\limits_{\Sigma_R^-} \tilde f\phi v\cdot n(x)dS_x dv dt = 0.$$

Поскольку ϕ — произвольная функция из M, отсюда следует, что $\tilde f$ удовлетворяет граничному условию (2.4) в смысле $L_2\big(\Sigma_R^-\times[0,T]\big)$ и начальному условию (2.1) в смысле $L_2(\Omega\times V_R)$.

Поскольку $\tilde f$ принадлежит $L_2\big(\Omega\times[0,T]; H_0^1(V_R)\big)$, заключаем, что $\tilde f$ является решением задачи (2.1)–(2.5) с заменой уравнения (2.1) уравнением (A.3).

Покажем, что это решение единственно. Пусть $\tilde f$ — решение задачи (A.3), (2.2)–(2.5) для $h' = 0$ и $f_0 = 0$. Применяя формулу Грина (A.4) для $\tilde\phi = \tilde f$ и учитывая (A.3) и (2.2), получаем

$$0 = \left\langle \frac{\partial \tilde f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x \tilde f, \tilde f \right\rangle_{H'H} + \lambda\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega} \tilde f^2 dxdvdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}\Gamma_r^R(u,v)\cdot\nabla_v\tilde{f}^2dxdvdt+\sigma_r\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}|\nabla_v\tilde{f}|^2dxdvdt \ \geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}f^2(x,v,T)dxdv+\int\limits_0^T\int\limits_{\Sigma_R^+}f^2v\cdot n(x)dS_xdvdt+$$

$$+\left(\lambda-\frac{3\beta}{2r^2}\right)\int\limits_0^T\int\limits_{V_R}\int\limits_{\Omega}\tilde{f}^2dxdvdt.$$

Так как $\lambda>\dfrac{3\beta}{2r^2}$, отсюда следует, что $\tilde{f}\equiv 0$. Теперь, полагая $f(x,v,t)=\tilde{f}(x,v,t)e^{\lambda t}$, заключаем, что $f(x,v,t)$ — единственное слабое решение задачи (2.1) – (2.5).

Теорема доказана.

1. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, № 2. – С. 184 – 195.
2. *Крайко А. И. , Стернин Л. Е.* К теории течения двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, № 3. – С. 418 – 429.
3. *Gardiner C. W.* Handbook of stochastic methods of Physics, Chemistry and Natural Sciences. – Berlin etc.: Springer, 1981.
4. *Van Kampen N. G.* Stochastic processes in Physics and Chemistry. – Amsterdam etc.: North-Holland, 1990.
5. *Hamdache K.* Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov – Stokes equations // Jap. J. Industr. Appl. Math. – 1998. – **15**. – P. 51 – 73.
6. *Mellet A., Vasseur A.* Global weak solution for a Vlasov – Fokker – Planck/Navier – Stokes equations // Math. Mod. Meth., Appl. Sci. – 2007. – **17**, № 7. – P. 1039 – 1063.
7. *Anoshchenko O. A., Boutet de Monvel-Berthier A.* The existence of a global generalized solution of the system of equations describing suspension motion // Math. Meth., Appl. Sci. – 1997. – **20**. – P. 495 – 519.
8. *Anoshchenko O. A., Khruslov E., Stephan H.* Global weak solutions to the Navier – Stokes – Vlasov – Poisson system // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2010. – **6**. – P. 143 – 182.
9. *Арсеньев А. А.* Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – **15**, № 1. – P. 136 – 147.
10. *Bardos C., Degond P.* Global existence for the Vlasov – Poisson equation in 3 space variables with small initial data // Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire. – 1985. – **2**, № 2. – P. 101 – 118.
11. *Schaeffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov – Poisson system in three dimensions // Commun. Partial Different. Equat. – 1991. – **16**, № 8-9. – P. 1313 – 1335.
12. *Degond P.* Global existence of smooth solutions for the Vlasov – Fokker – Planck equations in 1 and 2 space dimensions // Ann. sci. Ecole norm. super. – 1986. – **19**, Ser. 4. – P. 519 – 542.
13. *Bouchut F.* Existence and uniqueness of a global smooth solution for the Vlasov – Poisson – Fokker – Planck system in three dimensions // J. Funct. Anal. – 1993. – **111**. – P. 239 – 258.
14. *Carrillo J. A., Soler J.* On the initial value problem for the Vlasov – Poisson – Fokker – Planck system with initial data in L^p-spaces // Math. Meth. Appl. Sci. – 1995. – **18**. – P. 825 – 839.
15. *Антонцев С. Н., Кожиков А. В., Монахов В. К.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983.
16. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
17. *Lions J. L.* Equations differentielles et problemes aux limites. – Berlin: Springer, 1961.

Получено 26.04.12