УДК 517.36

А. А. Мартынюк, Ю. А. Мартынюк-Черниенко (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ МНОЖЕСТВА УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

We propose a regularization procedure for a set of equations of perturbed motion with uncertain values of parameters. Using the comparison principle, we establish conditions for the existence of solutions of the original system and the regularized system.

Запропоновано процедуру регуляризації множини рівнянь збуреного руху з неточними значеннями параметрів. На основі принципу порівняння встановлено умови існування розв'язків як регуляризованої, так і вихідної системи.

1. Введение. Построение теории траекторий динамических систем восходит к классическим работам А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова. Понятие фазового пространства, введенное В. Гиббсом, позволяет рассматривать движение механической системы, как движение изображающей точки в некотором n-мерном пространстве конфигураций или, что то же самое, в фазовом пространстве с заданной метрикой. Сложные механические и электрофизические системы, рассматриваемые в последнее время, потребовали некоторого развития „инструментария” моделирования процессов в такого рода системах. Как известно, основным требованием к математической модели процесса является адекватное описание функционирования рассматриваемой системы. Один из подходов, разрабатываемых для такого рода систем, основан на рассмотрении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с многозначными правыми частями. Одним из факторов, порождающих многозначность правой части, является неточность в определении параметров системы. Учет этих обстоятельств приводит к необходимости изучения множества (пучков) траекторий системы уравнений возмущенного движения. К общим требованиям, предъявляемым к множеству систем уравнений, относятся ее замкнутость и непротиворечивость, а также корректность относительно входящих параметров. Построение такой теории находится на начальном этапе развития, и здесь имеется много открытых для исследования проблем.

В данной статье рассматриваются семейства уравнений возмущенного движения физических систем, параметры которых заданы неточно. Проводится процедура регуляризации семейства уравнений с неточными значениями параметров с последующим применением принципа сравнения в интегральной или дифференциальной форме с целью анализа решений как исходного, так и промежуточных семейств уравнений возмущенного движения.

2. Регуляризация семейства неточных уравнений. Пусть $K_c(\mathbb{R}^n)$ — семейство всех непустых компактных и выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}_+$ — конечный интервал изменения t и $X(t)$ — множество состояний системы, определяемое формулой

$$X(t) = \{X\colon\ D_H X = F(t, X, \alpha),\ \ X(t_0) = X_0,\ \ X_0 \in K_c(\mathbb{R}^n),\ \ \alpha \in \Im\}.$$

Здесь $X(t) \in K_c(\mathbb{R}^n)$ при всех $t \in I$, $F \in C(I \times K_c(\mathbb{R}^n) \times \Im, K_c(\mathbb{R}^n))$ — многозначное отображение, $D_H X$ — производная Хукухары множества состояний $X(t)$ системы в момент времени $t \in I$, $\alpha \in \Im$ — параметр неточности отображения F, $\Im$ — компактное множество в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим семейство уравнений возмущенного движения

$$D_H X = F(t, X, \alpha), \quad X(t_0) = X_0 \in K_c(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

и вычислим граничные отображения

$$F_m(t,\cdot) = \overline{\mathrm{co} \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{I}}} F(t,\cdot,\alpha),$$

$$F_M(t,\cdot) = \overline{\mathrm{co} \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{I}}} F(t,\cdot,\alpha).$$

Будем предполагать, что $F_m(t,\cdot)$ и $F_M(t,\cdot)$ принадлежат пространству $K_c(\mathbb{R}^n)$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать семейства уравнений

$$D_H Y = F_m(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0 \in K_c(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

и

$$D_H V = F_M(t, V), \quad V(t_0) = V_0 \in K_c(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Семейство уравнений

$$D_H W = F_\beta(t, W), \quad W(t_0) = W_0 \in K_c(\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

где

$$F_\beta(t,\cdot) = F_m(t,\cdot)\beta + F_M(t,\cdot)(1-\beta), \quad \beta \in [0,1],$$

будем называть регуляризованным семейством уравнений неточного семейства уравнений (1).

***Замечание* 1.** Если отображение $F(t,X,\alpha)$ разрывно по X при некоторых $\alpha \in \mathfrak{I}$, то семейство уравнений (1) может быть регуляризовано по Филиппову [10] следующим образом.

Пусть область $G \subset K_c(\mathbb{R}^n)$ разделена гладкой гиперповерхностью Σ на области σ_- и σ_+ так, что $G = \sigma_- \cup \Sigma \cup \sigma_+$. Области σ_- и σ_+ определяются выражениями

$$\sigma_-* = \{(X,\alpha) \in G\times\mathfrak{I}\colon\ H(X(t),\alpha) < 0\},$$

$$\sigma_+* = \{(X,\alpha) \in G\times\mathfrak{I}\colon\ H(X(t),\alpha) > 0\},$$

$$\Sigma* = \{(X,\alpha) \in G\times\mathfrak{I}\colon\ H(X(t),\alpha) = 0\},$$

где $H(X(t),\alpha)$ — уравнение гиперповерхности Σ. Далее определим отображения

$$F_m^-(t,X) = \lim_{\substack{X^*\in\sigma_-\\ X^*\to X}} F_m(t,X^*),$$

$$F_M^+(t,X) = \lim_{\substack{X^*\in\sigma_+\\ X^*\to X}} F_M(t,X^*), \quad X\in\Sigma.$$

Неточное семейство уравнений (1) является регуляризованным по Филиппову, если отображение $\Phi_\beta(t,X)$ определяется формулой

$$\Phi_\beta(t,X) = \begin{cases} F_m^-(t,X) & \text{при} \quad X \in \sigma_-, \\ F_m^-(t,X)\beta + F_M^+(t,X)(1-\beta) & \text{при} \quad X \in \Sigma, \\ F_M^+(t,X) & \text{при} \quad \in \sigma_+. \end{cases}$$

При этом наряду с семейством уравнений (1) рассматривается дифференциальное включение

$$D_H X \in \Phi_\beta(t,X), \quad X(t_0) = X_0 \in K_c(\mathbb{R}^n),$$

где $\Phi_\beta\colon \mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n) \to 2^{\mathbb{R}^n}$.

Целью настоящей статьи является получение оценки расстояния между решениями $Y(t)$ и $V(t)$ семейств уравнений (2), (3), ограничивающими снизу и сверху множество решений $X(t)$ семейства уравнений (1).

3. О вилке для множества решений уравнения (1). Для решения указанной задачи применяются интегральные и дифференциальные неравенства, составляющие основу принципа сравнения в качественной теории уравнений (см., например, [4, 5]).

Определение 1. *Многозначное отображение* $Y(t)\colon J \to K_c(\mathbb{R}^n)$, $J \subset I$ $(V(t)\colon J \to \to K_c(\mathbb{R}^n))$, *является решением задачи* (2) ((3)), *если оно непрерывно дифференцируемо на* J *и удовлетворяет уравнению* (2) ((3)) *при всех* $t \in J$.

Поскольку отображения $Y(t)$ и $V(t)$ непрерывно дифференцируемые,

$$Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} D_H Y(s)ds, \quad t \in J, \tag{5}$$

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} D_H V(s)ds, \quad t \in J. \tag{6}$$

Поэтому, учитывая (2), (3), получаем

$$Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} F_m(s, Y(s))ds, \quad t \in J, \tag{7}$$

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} F_M(s, V(s))ds, \quad t \in J. \tag{8}$$

В соотношениях (5) – (8) интеграл понимается в смысле Хукухары (см. [3]).

Теорема 1. *Предположим, что для уравнений* (2), (3) *выполняются следующие условия*:

1) $F_m \in C(I \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$, $F_M \in C(I \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ *и существует монотонная неубывающая по* w *функция* $g(t,w)$, $g \in C(I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, *такая, что*

$$D[F_m(t,y), F(t,X)] + D[F(t,X), F_M(t,V)] \le g(t, D[Y,X] + D[X,V])$$

при всех $Y, X, V \in K_c(\mathbb{R}^n)$ *и всех* $t \in I$;

2) *существует максимальное решение* $r(t,t_0,w_0)$ *скалярного уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g(t,w), \quad w(t_0) = w_0 \geq 0,$$

на I;

3) *начальные условия* (t_0, Y_0), (t_0, V_0) *для множества решений* $Y(t)$, $V(t)$ *уравнений* (2), (3) *таковы, что* $D[Y_0, X_0] + D[X_0, V_0] \leq w_0$.

Тогда при всех $t \in J \subset I$ *справедлива оценка*

$$D[Y(t), V(t)] \leq r(t, t_0, w_0). \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим $m(t) = D[Y(t), X(t)] + D[X(t), V(t)]$ и выберем $(X_0, Y_0, V_0) \in \in K_c(\mathbb{R}^n)$ так, что

$$m(t_0) = D[Y_0, X_0] + D[X_0, V_0] \leq w_0.$$

Учитывая свойства расстояния Хаусдорфа (см. [3, 6]), получаем следующую последовательность оценок:

$$m(t) = D\left[Y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F_m(t, Y(t))dt,\ X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, X(t))dt\right] +$$

$$+ D\left[X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t, X(t))dt,\ V_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F_M(t, V(t))dt\right] \leq$$

$$\leq D\left[\int\limits_{t_0}^{t} F_m(t, Y(t))dt, \int\limits_{t_0}^{t} F(t, X(t))dt\right] + D[Y_0, X_0] +$$

$$+ D\left[\int\limits_{t_0}^{t} F(t, X(t))dt, \int\limits_{t_0}^{t} F_M(t, V(t))dt\right] + D[X_0, V_0] \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} D\left[F_m(t, Y(t)),\ F(t, X(t))\right] dt + D[Y_0, X_0] +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} D\left[F(t, X(t)),\ F_M(t, V(t))\right] dt + D[X_0, V_0].$$

Отсюда находим

$$m(t) \leq m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \left\{D\left[F_m(t, Y(t)),\ F(t, X(t))\right] + D\left[F(t, X(t)),\ F_M(t, V(t))\right]\right\} dt \leq$$

$$\leq m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g(s, D\left[Y(s),\ X(s)\right] + D\left[X(s),\ V(s)\right])ds =$$

$$= m(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} g(s, m(s))ds, \quad t \in J. \tag{10}$$

Из оценки (10) и теоремы 1.6.1 [5] следует, что

$$m(t) \le r(t, t_0, w_0) \quad \text{при всех} \quad t \in J.$$

Далее, учитывая, что

$$D[Y(t), V(t)] \le D[Y(t), X(t)] + D[X(t), V(t)],$$

получаем оценку (9). Оценка (9) образует вилку для множества решений $X(t)$ уравнения (1) на основе уравнений (2), (3), так как

$$F_m(t, X) \le F(t, X, \alpha) \le F_M(t, X)$$

при всех $(t, X) \in I \times K_c(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha \in \Im$.

Далее исследуем задачу об оценке расстояния между множествами решений семейства уравнений (1) и (4). Напомним, что для уравнения (4) справедливо соотношение

$$W_\beta(t) = W_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F_\beta(t, W(s))ds, \quad t \in J,$$

при всех $\beta \in [0, 1]$.

Теорема 2. *Предположим, что для уравнений* (1), (4) *выполняются следующие условия*:

1) $F_\beta \in C(I \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$, $F \in C(I \times K_c(\mathbb{R}^n) \times \Im, K_c(\mathbb{R}^n))$ *и существует монотонно неубывающая функция* $g_1(t, w)$, $g_1 \in C(I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, *такая, что*

$$D[F(t, X, \alpha), F_\beta(t, W)] \le g_1(t, D[X, W])$$

при всех $(t, Y, W) \in I \times K_c(\mathbb{R}^n) \times K_c(\mathbb{R}^n)$ *и при любом* $\alpha \in \Im$ *и* $\beta \in [0, 1]$;

2) *существует максимальное решение* $r(t, t_0, w_0)$ *скалярного уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g_1(t, w), \quad w(t_0) = w_0 \ge 0;$$

3) *начальные условия* (t_0, X_0), (t_0, W_0) *для множества решений* $X(t)$ *и* $W_\beta(t)$ *уравнений* (1), (4) *таковы, что* $D[X_0, W_0] \le w_0$.

Тогда при всех $t \in J$ *и* $\beta \in [0, 1]$ *справедлива оценка*

$$D[X(t), W_\beta(t)] \le r(t, t_0, w_0). \tag{11}$$

Доказательство. Полагая $m(t) = D[X(t), W_\beta(t)]$ и проводя вычисления, аналогичные таковым при доказательстве теоремы 1, получаем оценку (11).

Замечание 2. Условие монотонности функций $g(t, w)$ и $g_1(t, w)$ в теоремах 1, 2 может быть ослаблено, если использовать теоремы сравнения для дифференциальных неравенств.

Теорема 3. *Предположим, что для уравнений* (1), (4) *выполняются следующие условия*:

1) *в условии* 1 *теоремы* 2 *функция* $g_1(t,w) \in C(I \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *такова, что*

$$\limsup\left\{(D[X+hF(t,X,\alpha), W+hF_\beta(t,W)] - D[X,W])h^{-1} \colon h \to 0^+\right\} \leq$$

$$\leq g_1(t, D[X,W])$$

при всех $t \in I$, $\alpha \in \mathfrak{I}$ *и* $\beta \in [0,1]$;

2) *условия* 2, 3 *теоремы* 2 *выполняются при всех* $t \in J$ *и* $\beta \in [0,1]$.

Тогда оценка (11) *справедлива при всех* $t \in J$ *и* $\beta \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть $m(t) = D[X(t), W(t)]$ и $D[X_0, W_0] \leq w_0$. Для сколь угодно малого $h > 0$ существуют разности Хукухары $X(t+h) - X(t)$ и $W(t+h) - W(t)$ при всех $t \in J$ и $\beta \in [0,1]$, поэтому

$$m(t+h) - m(t) = D[X(t+h), W(t+h)] - D[X(t), W(t)] \leq$$

$$\leq D[X(t+h), X(t) + hF(t, X(t), \alpha)] + D[W(t) + hF_\beta(t, W(t)), W(t+h)] +$$

$$+ D[X(t) + hF(t,X,\alpha), W(t) + hF_\beta(t, W(t))] - D[X(t), W(t)]$$

при любом значении $\beta \in [0,1]$. Отсюда находим

$$D^+m(t) = \lim_{h\to 0^+}\sup \frac{1}{h}[m(t+h) - m(t)] \leq$$

$$\leq \lim_{h\to 0^+}\sup\left\{D[X(t) + hF(t,X,\alpha), W(t) + hF_\beta(t,W(t))] - D[X(t), W(t)]\right\} +$$

$$+ \lim_{h\to 0^+}\sup \frac{1}{h} D\left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h}, F(t,X,\alpha)\right] +$$

$$+ \lim_{h\to 0^+}\sup \frac{1}{h} D\left[F_\beta(t, W(t)), \frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right] \leq$$

$$\leq g_1(t, D[X,W]) = g_1(t, m(t)) \tag{12}$$

при всех $t \in J$, $\beta \in [0,1]$. Применяя к оценке (12) теорему 1.5.1 из монографии [5], получаем оценку (11).

Далее будем рассматривать уравнение (4) и множество $\Theta_0 \in K_c(\mathbb{R}^n)$, для которого при всех $t \geq t_0$ имеет место соотношение $F(t, \Theta_0, \alpha) = \Theta_0$ при всех $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть для уравнения* (4) *выполняются следующие условия*:

1) $F_\beta(t,W) \in C(\mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ *при всех* $\beta \in [0,1]$;

2) *существует функция* $g(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, *монотонно возрастающая по* u *и такая, что*

а) $D[F_\beta(t,W), \Theta_0] \leq g(t, D[W, \Theta_0])$ *при всех* $\beta \in [0,1]$

или

б) $\lim\limits_{h\to 0^+}\sup\dfrac{1}{h}\left\{D[W+hF_\beta(t,W),\Theta_0]-D[X,\Theta_0]\right\}\le g_1(t,D[W,\Theta_0])$, *где функция* $g_1(t,\cdot)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3;

3) *максимальное решение* $r_i(t,t_0,w_0)$, $i=1,2$, *задач*

$$\frac{dw}{dt}=g(t,w), w(t_0)=w_0\ge 0, \tag{13}$$

$$\frac{dv}{dt}=g_1(t,v), v(t_0)=v_0\ge 0,$$

существует при всех $t\ge t_0$.

Тогда при начальных условиях $D[W_0,\Theta_0]\le\min\{w_0,v_0\}=u_0$ *выполняется оценка*

$$D[W_\beta(t),\Theta_0]\le r(t,t_0,u_0)$$

при всех $t\ge t_0$ *и* $\beta\in[0,1]$, *где* $r(t,t_0,u_0)=\max\{r_1(t,t_0,w_0),r_2(t,t_0,v_0)\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Следствие **1.** *Пусть в теореме* 4 *функция*

$$g(t,D[W,\Theta_0])=\lambda(t)D[W,\Theta_0],\quad \lambda(t)\ge 0.$$

Тогда

$$D[W_\beta(t),\Theta_0]\le D[W(t_0),\Theta_0]\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right] \tag{14}$$

при всех $t\ge t_0$ *и* $\beta\in[0,1]$.

Оценка (14) следует из того, что для решения $r(t,t_0,w_0)$ уравнения (13) выполняется неравенство

$$r(t,t_0,w_0)\le r(t_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right],\quad t\ge t_0.$$

Если в оценке (14) $\lambda(t)=\lambda=\text{const}>0$, то

$$D[W_\beta(t),\Theta_0]\le D[W(t_0),\Theta_0]e^{-\lambda(t-t_0)}$$

при всех $t\ge t_0$ и $\beta\in[0,1]$.

Если $I=[0,\infty)$, то нетрудно видеть, что $\lim_{t\to\infty}D[W_\beta(t),\Theta_0]=0$ и, следовательно, множество решений семейства уравнений (4) стремится к стационарному решению $\Theta_0\in K_c(\mathbb{R}^n)$.

4. Условия существования множества решений. Рассмотрим задачу о существовании и единственности решения семейства уравнений (4) при условиях более слабых, чем условие Липшица.

Введем обозначения $B(W_0,a)=\{W\in K_c(\mathbb{R}^n)\colon D[W,W_0]\le a\}$, $\mathbb{T}=I\times B(W_0,a)$, $\mathbb{T}_c=I\times[0,2a]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при всех* $\beta \in [0,1]$ $\quad F_\beta(t,W) \in C(\mathbb{T}, K_c(\mathbb{R}^n))$ *и* $D[F_\beta(t,W),\Theta_0] \le M_0$, *где* $M_0 = M_0(\beta) > 0$;

2) *существует функция* $g(t,w) \in C(\mathbb{T}_c, \mathbb{R}_+)$, $g(t,w) \le M_1$ *на* $\mathbb{T}_c$ *и* $g(t,0) = 0$, *не убывающая по* w, *такая, что уравнение движения*

$$\frac{dw}{dt} = g(t,w), \quad w(t_0) = 0, \tag{15}$$

имеет нулевое решение на I;

3) *для любых* $(t,W) \in \mathbb{T}$ *справедлива оценка*

$$D[F_\beta(t,W), F_\beta(t,V)] \le g(t, D[W,V])$$

при всех $\beta \in [0,1]$.

Тогда последовательные приближения

$$W_{n+1}(t) = W_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F_\beta(s, W_n(s))ds, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{16}$$

существуют на $I_0 = I \cap [t_0, t_0+\eta]$, *где* $\eta = \min\{I, a/M\}$, $M = \max\left\{\min_{\beta\in[0,1]} M_0(\beta), M_1\right\}$, *как непрерывные функции, и равномерно сходятся к решению* $W(t)$ *задачи* (4) *при всех* $\beta \in [0,1]$.

Доказательство. При любом $n = 0,1,2,\ldots$ для элементов последовательности (16) имеем оценку

$$D[W_{n+1}(t), W_0] = D\left[W_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F_\beta(s,W_n(s))ds, W_0\right] =$$

$$= D\left[\int\limits_{t_0}^{t} F_\beta(s,W_n(s))ds, \Theta_0\right] \le \int\limits_{t_0}^{t} D\left[F_\beta(s,W_n(s)),\Theta_0\right] ds \le$$

$$\le M_0(\beta)(t-t_0) \le M_0(\beta) I \le a$$

при всех $\beta \in [0,1]$. Отсюда следует, что последовательность (16) корректно определена на $I_0 \subseteq I$.

Для начальной задачи (15) последовательные приближения $\{w_n(t)\}$ определим так:

$$w_0(t) = M(t-t_0),$$

$$w_{n+1}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g(s, w_n(s))ds$$

при всех $n = 0,1,2,\ldots$ для значений $t \in I_0$. Из условия 2 теоремы следует, что

$$0 \le w_{n+1}(t) \le w_n(t) \quad \text{при всех} \quad t \in I_0. \tag{17}$$

Из условия (17) и того, что

$$\left|\frac{dw_n}{dt}\right| \le g(t, w_{n-1}(t)) \le M_1,$$

в силу теоремы Асколи – Арцела следует предельное соотношение $\lim_{n\to\infty} w_n(t) = w(t)$ равномерно по $t \in I_0$. Функция $w(t)$ является решением задачи (15) и $w(t) \equiv 0$ при всех $t \in I_0$.

Нетрудно видеть, что

$$D[W_1(t), W_0] \le \int_{t_0}^{t} D[F_\beta(s, W_0), \Theta_0]ds \le M(t - t_0) = w_0(t).$$

Пусть для некоторого $k > 1$ выполняется оценка

$$D[W_k(t), W_{k-1}(t)] \le w_{k-1}(t)$$

при всех $t \in I_0$. Поскольку

$$D[W_{k+1}(t), W_k(t)] \le \int_{t_0}^{t} D[F_\beta(s, W_k(s)), F_\beta(s, W_{k-1}(s))]ds,$$

при всех $\beta \in [0, 1]$ получаем

$$D[W_{k+1}(t), W_k(t)] \le \int_{t_0}^{t} g(s, D[W_k(s), W_{k-1}(s)])ds \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} g(s, w_{k-1}(s))ds = w_k(t).$$

Отсюда по индукции следует неравенство

$$D[W_{n+1}(t), W_n(t)] \le w_n(t), \quad t \in I_0,$$

при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $u(t) = D[W_{n+1}(t), W_n(t)]$, $t \in I_0$. Тогда

$$D^+u(t) \le g(t, D[W_n(t), W_{n-1}(t)]) \le g(t, w_{n-1}(t)) \quad \text{при всех} \quad t \in I_0.$$

Далее, пусть $n \le m$ и $v(t) = D[W_n(t), W_m(t)]$. Учитывая последовательность (16), получаем

$$D^+v(t) \le D[D_H W_n(t), D_H W_m(t)] = D[F_\beta(t, W_{n-1}(t)), F_\beta(t, W_{m-1}(t))] \le$$

$$\le D[F_\beta(t, W_n(t)), F_\beta(t, W_{n-1}(t))] + D[F_\beta(t, W_n(t)), F_\beta(t, W_m(t))] +$$

$$+ D[F_\beta(t, W_m(t)), F_\beta(t, W_{m-1}(t))] \le g(t, w_{n-1}(t)) + g(t, w_{m-1}(t)) +$$

$$+ g(t, D[W_n(t), W_m(t)]) \le g(t, v(t)) + 2g(t, w_{n-1}(t)), \quad t \in I_0,$$

при любых значениях $\beta \in [0, 1]$. Здесь учтено то, что $g(t, w)$ — невозрастающая функция, $w_{m-1} \le w_{n-1}$, $n \le m$, и последовательность $w_n(t)$ убывает. Из принципа сравнения следует оценка

$$v(t) \leq R_n(t) \quad \text{при всех} \quad t \in I_0,$$

где $R_n(t)$ — максимальное решение скалярного уравнения

$$\frac{dr_n}{dt} = g(t, r_n) + 2g(t, w_{n-1}(t)), \quad r_n(t_0) = 0,$$

при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поскольку при $n \to \infty$ $2g(t, w_{n-1}(t)) \to 0$ равномерно по t на I_0, $R_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по t на I_0. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $W_n(t)$ к $W(t)$ при любых $\beta \in [0,1]$.

Далее понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть*

$$F_\beta \in C(I_0 \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n)) \quad \text{и} \quad G_\beta(t,r) = \bigcup_{D[W,W_0] \leq r} (D[F_\beta(t,W), \Theta_0]).$$

Предположим, что максимальное решение $R^*(t,t_0,0) = \max_{\beta \in [0,1]}(r^*_\beta(t,t_0,0))$ семейства уравнений

$$\frac{dw}{dt} = G_\beta(t,w), \quad w(t_0) = 0, \tag{18}$$

существует при всех $t \in I_0$.

Тогда для решения $W(t)$ семейства уравнений (4) *справедлива оценка*

$$D[W(t), W_0] \leq R^*(t,t_0,0) \quad \text{при всех} \quad t \in I_0.$$

Доказательство. Обозначим $m(t) = D[W(t), W_0]$ и вычислим $D^+m(t)$:

$$D^+m(t) = D[D_H W(t), \Theta_0] = D[F_\beta(t,W), \Theta_0] \leq$$

$$\leq \bigcup_{D[W,W_0] \leq r} (D[F_\beta(t,W), \Theta_0]) = G_\beta(t,r).$$

Из принципа сравнения для уравнения (18) следует, что

$$D[W(t), W_0] \leq \max_{\beta \in [0,1]} r^*_\beta(t,t_0,0) = R^*(t,t_0,0).$$

Лемма 1 доказана.

***Замечание* 3.** При выполнении условий 1 – 3 теоремы 5 и при существовании решения $w(t,t_0,w_0)$ уравнения сравнения (13), непрерывного относительно (t_0, w_0), решение $W(t)$ семейства систем (4) является непрерывным относительно (t_0, w_0). При доказательстве этого утверждения применяется лемма 1 и принцип сравнения для скалярного уравнения.

5. Основные оценки монотонной итеративной техники. В метрическом пространстве $(K_c(\mathbb{R}^n), D)$ введем частичное упорядочение. Пусть $K(K^0)$ — подмножество $K_c(\mathbb{R}^n)$ такое, что для любого $u \in X$, $X \in K_c(\mathbb{R}^n)$, выполняется условие $u_i \geq 0$ $(u_i > 0)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. При этом K будет конусом в $K_c(\mathbb{R}^n)$, а K^0 — его внутренностью.

Определение 2 [6]. *Для любых U и $V \in K_c(\mathbb{R}^n)$ будем писать $U \geq V$ $(U > V)$, если существует $Z \in K_c(\mathbb{R}^n)$ такое, что $U = V + Z$.*

Аналогично определяется упорядочение $U \leq V$ $(U < V)$.

Определение 3 [6]. *Пусть отображение $R(t) = \max_{\beta\in[0,1]} R_\beta(t)$ является решением множества уравнений* (4). *Будем говорить, что $R(t)$ — максимальное решение для множества $W(t)$ решений уравнений* (4), *если для любого $t \in I_0$ справедлива оценка*

$$W(t) \le R(t).$$

Аналогично определяется минимальное решение множества уравнений (4).

Теорема 6. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом $\beta \in [0,1]$ отображение $F_\beta(t,W)$ принадлежит $C(\mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ и при $(W,V) \in K_c(\mathbb{R}^n)$ $F_\beta(t,W) \le F_\beta(t,V)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$*;

2) *при любых $W,V \in C^1(\mathbb{R}_+, K_c(\mathbb{R}^n))$ справедливы оценки*

$$D_H W < F_\beta(t,W) \quad и \quad D_H V \ge F_\beta(t,V)$$

при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\beta \in [0,1]$;

3) $W(t_0) < V(t_0)$.

Тогда при всех $t \ge t_0$ справедлива оценка

$$\min_{\beta\in[0,1]} W_\beta(t) < \max_{\beta\in[0,1]} V_\beta(t).$$

Доказательство. Предположим, что при выполнении условий $1-3$ теоремы 6 существует пара $(t^*, \beta^*) \in I_0 \times [0,1]$ такая, что при условии 3 справедливо равенство $W_{\beta^*}(t^*) = V_{\beta^*}(t^*)$. Тогда для $t_0 < t < t^*$ и $[0,\beta^*) \subset [0,1]$ верна оценка $W_\beta(t) \le V_\beta(t)$. В силу условия 1 теоремы 6 получаем

$$D_H W(t^*) < F_{\beta^*}(t,W) \le F_{\beta^*}(t,V) \le D_H V(t^*).$$

Отсюда имеем

$$D_H(V_{\beta^*}(t) - W_{\beta^*}(t)) > 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [t_0, t^*].$$

Поскольку $V_{\beta^*}(t) - W_{\beta^*}(t)$ — неубывающая функция на $[t_0, t^*]$,

$$(V_{\beta^*}(t) - W_{\beta^*}(t)) > (V_{\beta^*}(t_0) - W_{\beta^*}(t_0)) > 0$$

и, следовательно, $W_{\beta^*}(t^*) < V_{\beta^*}(t^*)$. Это противоречит предположению о существовании пары (t^*, β^*), для которой справедливо равенство $W_{\beta^*}(t^*) = V_{\beta^*}(t^*)$.

Теорема 6 доказана.

Приведем утверждение, в котором условие 2 теоремы 6 является нестрогим.

Теорема 7. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом $\beta \in [0,1]$ отображение $F_\beta(t,W)$ принадлежит $C(\mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$, при $(W,V) \in K_c(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство $F_\beta(t,W) \le F_\beta(t,V)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и*

$$D_H W \le F_\beta(t,W), \quad D_H V \ge F_\beta(t,V);$$

2) *для любых $X,Y \in K_c(\mathbb{R}^n)$ таких, что $X \ge Y$, справедлива оценка*

$$F_\beta(t,X) \le F_\beta(t,Y) + L(X-Y)$$

для любого $\beta \in [0,1]$ и $t \in \mathbb{R}_+$, где $L > 0$;

3) $W(t_0) \le V(t_0)$.

Тогда при всех $t \ge t_0$ верна оценка

$$\min_{\beta \in [0,1]} W_\beta(t) < \max_{\beta \in [0,1]} V_\beta(t).$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\widetilde{V} = V + \beta e^{2Lt}$, где $\beta \in [0,1]$, $L = \mathrm{const} > 0$. Поскольку $W(t_0) \le V(t_0) < \widetilde{V}(t_0)$, достаточно показать, что

$$W_\beta(t) < \widetilde{V}_\beta(t) \quad \text{при всех} \quad t > t_0$$

и при любом $\beta \in [0,1]$.

Пусть существует пара $(t^*, \beta^*) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ такая, что при условии $W(t_0) < \widetilde{V}(t_0)$ справедливо равенство $W_{\beta^*}(t^*) = \widetilde{V}_{\beta^*}(t^*)$. Тогда для $t_0 < t < t^*$ и $[0, \beta^*) \subset [0,1]$ верна оценка $W_\beta(t) < V_\beta(t)$. Из условия 1 теоремы 7 следует, что

$$D_H W(t^*) \le F_{\beta^*}(t^*, W(t^*)) \le F_{\beta^*}(t^*, \widetilde{V}(t^*)) \le F_{\beta^*}(t^*, V(t^*)) + L(\widetilde{V} - V) \le$$

$$\le D_H V(t^*) + L\beta e^{2Lt^*} \le D_H V(t^*) + 2L\beta e^{2Lt^*} = D_H \widetilde{V}(t^*).$$

Отсюда имеем

$$D_H(V_{\beta^*}(t) - \widetilde{V}_{\beta^*}(t)) > 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [t_0, t^*].$$

Поскольку функция $W_{\beta^*}(t) - \widetilde{V}_{\beta^*}(t)$ не убывает на $[t_0, t^*]$,

$$(W_{\beta^*}(t) - \widetilde{V}_{\beta^*}(t)) > (W_{\beta^*}(t_0) - \widetilde{V}_{\beta^*}(t_0)) > 0,$$

и отсюда следует, что

$$\widetilde{W}_{\beta^*}(t^*) < V_{\beta^*}(t^*).$$

Это неравенство противоречит предположению о существовании пары (t^*, β^*), для которой $W_{\beta^*}(t^*) = \widetilde{V}_{\beta^*}(t^*)$.

Теорема 7 доказана.

Следствие 2. *Пусть при любом $\beta \in [0,1]$ отображение $F_\beta(t, W) = \sigma$, $\sigma \in C(\mathbb{R}_+, K_C(\mathbb{R}^n))$, и выполняются неравенства*

$$D_H W \le \sigma \quad \text{и} \quad D_H V \ge \sigma \quad \text{при всех} \quad t \ge t_0.$$

Тогда при выполнении условия 3 теоремы 7 справедлива оценка $W(t) \le V(t)$ при всех $t \ge t_0$.

6. Итеративная техника для регуляризованного семейства уравнений. Множество уравнений (1) содержит параметр неточности $\alpha \in \mathfrak{I}$, и по этой причине непосредственное применение монотонной итеративной техники для оценки решений, предложенной в монографии [6], не представляется возможным. Преобразуем множество уравнений (1) к виду

$$D_H X = F_\beta(t, X) + G(t, X, \alpha),$$
$$X(0) = X_0, \quad X_0 \in K_c(\mathbb{R}^n), \tag{19}$$

где $F_\beta(t, X) = F_m(t, X)\beta + F_M(t, X)(1 - \beta)$, $G(t, X, \alpha) \supseteq F(t, X, \alpha) - F_\beta(t, X)$ при всех $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Далее будем предполагать, что $F_\beta \in C(I \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ при всех $\beta \in [0,1]$ и $G \in C(I \times \times K_c(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{I}, K_c(\mathbb{R}^n))$, где $I \subset [0,T]$.

Для множества уравнений (19) представляет интерес исследование пар нижних и верхних решений при $\beta \in [0,1]$ и при любых $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Определение 4 [6]. *Пусть V, W принадлежат $C^1(I, K_c(\mathbb{R}^n))$. Множества V, W называются*:

а) *естественным нижним и верхним решением семейства уравнений* (19), *если*

$$D_H V \le F_\beta(t,V) + G(t,V,\alpha),$$
$$D_H W \ge F_\beta(t,W) + G(t,W,\alpha) \tag{20}$$

при всех $\beta \in [0,1]$, любых $\alpha \in \mathfrak{I}$ и $t \in I$;

б) *связанной парой нижнего и верхнего решений семейства уравнений* (19) *типа* I, *если*

$$D_H V \le F_\beta(t,V) + G(t,W,\alpha),$$
$$D_H W \ge F_\beta(t,W) + G(t,V,\alpha) \tag{21}$$

при всех $\beta \in [0,1]$, любых $\alpha \in \mathfrak{I}$ и $t \in I$;

в) *связанной парой нижнего и верхнего решений семейства уравнений* (19) *типа* II, *если*

$$D_H V \le F_\beta(t,W) + G(t,V,\alpha),$$
$$D_H W \ge F_\beta(t,V) + G(t,W,\alpha) \tag{22}$$

при всех $\beta \in [0,1]$, любых $\alpha \in \mathfrak{I}$ и $t \in I$;

г) *связанной парой нижнего и верхнего решений семейства уравнений* (19) *типа* III, *если*

$$D_H V \le F_\beta(t,W) + G(t,W,\alpha),$$
$$D_H W \ge F_\beta(t,V) + G(t,V,\alpha)$$

при всех $\beta \in [0,1]$, любых $\alpha \in \mathfrak{I}$ и $t \in I$.

Заметим, что если $V(t) \le W(t)$ при всех $t \in I$, отображение $F_\beta(t,X)$ при всех $\beta \in [0,1]$ не убывает по X при любом $t \in I$ и отображение $G_1(t,Y)$ не возрастает по Y при любом $t \in I$, то пары нижних и верхних решений, определенные в случаях а) и г), редуцируют к определению б). Отсюда следует, что достаточно рассмотреть случаи, определяемые неравенствами (21) и (22).

Теорема 8. *Предположим, что*:

1) *существует пара верхних и нижних решений, удовлетворяющая неравенствам* (21), *и, кроме того, $V_\beta(t) < W_\beta(t)$ при всех $t \in I$;*

2) *при любом $\beta \in [0,1]$ отображение F_β принадлежит $C(I \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ и F_β не убывает по X при каждом $t \in I$;*

3) *при любом $\alpha \in \mathfrak{I}$ отображение G принадлежит $C(I \times K_c(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{I}, K_c(\mathbb{R}^n))$ и $G(t,Y,\alpha)$ не возрастает по Y при любом $t \in I$;*

4) *отображения* F_β *и* G *отображают ограниченные множества в ограниченные множества в* $K_c(\mathbb{R}^n)$ *при любых* $\beta \in [0,1]$ *и* $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Тогда существуют монотонные последовательности $\{V_n(t)\}$ *и* $\{W_n(t)\}$ *в* $K_c(\mathbb{R}^n)$ *такие, что* $V_n(t) \to P(t)$ *и* $W_n(t) \to Q(t)$ *при* $n \to \infty$, *пара* $(P(t),\, Q(t))$ *является парой минимального и максимального решений для семейства уравнений* (19) *и при этом*

$$D_H P(t) = F_\beta(t,P) + G(t,Q,\alpha),$$

$$D_H Q(t) = F_\beta(t,Q) + G(t,P,\alpha)$$

при любом $\beta \in [0,1]$ *и всех* $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Доказательство. Пусть $\beta \in [0,1]$ и $\alpha \in \mathfrak{I}$. Рассмотрим пару отображений $(V_{n+1}(t), W_{n+1}(t))$, разрешающую при $n \geq 0$ семейства уравнений

$$D_H V_{n+1} = F_\beta(t,V_n) + G(t,W_n,\alpha),$$

$$D_H W_{n+1} = F_\beta(t,W_n) + G(t,V_n,\alpha)$$

при начальных условиях

$$V_{n+1}(0) = U_0 \in K_c(\mathbb{R}^n),$$

$$W_{n+1}(0) = U_0 \in K_c(\mathbb{R}^n),$$

где $V_0 \leq U_0 \leq W_0$.

Докажем последовательность неравенств

$$V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \ldots \leq V_n \leq W_n \leq \ldots \leq W_2 \leq W_1 \leq W_0$$

при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$, $\alpha \in \mathfrak{I}$. Из условий 1, 2 теоремы 8 при $V_0 \leq W_0$ получаем

$$D_H V_0 \leq F_\beta(t,V_0) + G(t,W_0,\alpha), \tag{23}$$

а из соотношения (29) при $n = 0$ следует

$$D_H V_1 = F_\beta(t,V_0) + G(t,W_0,\alpha). \tag{24}$$

Из неравенства (23), согласно теореме 7, имеем $V_0 \leq V_1$ при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$.

Аналогичными рассуждениями нетрудно показать, что $W_1 \leq W_0$ при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$.

Далее докажем, что $V_1 \leq W_1$ при всех $t \in I$. Рассмотрим семейство уравнений

$$D_H V_1 = F_\beta(t,V_0) + G(t,W_0), \tag{25}$$

$$D_H W_1 = F_\beta(t,W_0) + G(t,V_0), \tag{26}$$

$$V_1(0) = W_1(0) = U_0.$$

В силу условий 2, 3 теоремы 8 из (25), (26) получаем неравенства

$$D_H V_1 \leq F_\beta(t,W_0) + G(t,W_0,\alpha),$$

$$D_H W_1 \geq F_\beta(t, W_0) + G(t, W_0, \alpha),$$

из которых по теореме 7 следует, что $V_1 \leq W_1$ при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$. Таким образом,

$$V_0 \leq V_1 \leq W_1 \leq W_0$$

при всех $t \in I$.

Рассуждения, аналогичные приведенным, позволяют установить неравенства

$$V_j \leq V_{j+1} \leq W_{j+1} \leq W_j, \quad j > 1, \tag{27}$$

при любых $t \in I$, $\beta \in [0,1]$. Из оценки (27) следует, что последовательности $\{V_n\}$, $\{W_n\}$ равномерно ограничены на I при любом $\beta \in [0,1]$. Из того, что

$$D[V_n(t), V_n(s)] \leq M_1 \|t - s\| \quad \text{для любого} \quad s < t, \quad (t,s) \in I,$$

и

$$D[W_n(t), W_n(s)] \leq M_2 \|t - s\| \quad \text{для любого} \quad s < t, \quad (t,s) \in I,$$

где

$$M_1 = D[F_\beta(\tau, V_{n-1}(\tau) + G(\tau, W_{n-1}(\tau), \alpha)), \Theta_0],$$

$$M_2 = D[F_\beta(\tau, W_{n-1}(\tau) + G(\tau, V_{n-1}(\tau), \alpha)), \Theta_0],$$

согласно теореме Арцела – Асколи следует, что

$$\{V_n\} \to P(t) \quad \text{и} \quad \{W_n\} \to Q(t) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и

$$V_0 \leq P(t) \leq W_\beta(t) \leq Q(t) \leq W_0 \tag{28}$$

при всех $\beta \in [0,1]$, т. е. пара $(P(t), Q(t))$ является минимальным и максимальным решением для семейства уравнений (19).

Теорема 8 доказана.

Поскольку отображение $G(t,X)$ является мажорантой для разности $F(t,X,\alpha) - F_\beta(t,X)$ при любом $\alpha \in \mathfrak{I}$, представляет интерес рассмотреть некоторые свойства $G(t,X)$ в контексте теоремы 8.

Остановимся на некоторых следствиях из теоремы 8.

***Следствие* 3.** *Если в совокупности уравнений* (19) *отображение* $G(t,X,\alpha) \equiv 0$, *то* (19) *обращается в совокупность уравнений* (4) *и при дополнительном условии о неубывании функции* $F_\beta(t,X)$ *по* X *оценка* (28) *остается в силе.*

***Следствие* 4.** *Пусть в совокупности уравнений* (19) *отображение* $G(t,X,\alpha) \equiv 0$ *и* $F_\beta(t,X)$ *не является отображением, не убывающим по* X *при всех* $t \in I$ *и* $\beta \in [0,1]$. *Если существует постоянная* $M > 0$ *такая, что отображение* $\widetilde{F}_\beta(t,X) = MX + F_\beta(t,X)$ *является не убывающим по* X *при всех* $t \in I$ *и* $\beta \in [0,1]$, *то для совокупности начальных задач*

$$D_H U + MU = \widetilde{F}_\beta(t,U), \quad U(0) = U_0,$$

справедлива оценка вида (28).

***Следствие* 5.** *Пусть в системе* (19) $G(t,Y,\alpha)$ *является не возрастающей по* Y *и* $F_\beta(t,X)$ *не является монотонной при всех* $t\in I$ *и* $\beta\in[0,1]$. *Если существует постоянная* $M>0$ *такая, что* $\widetilde{F}_\beta(t,X)=MX+F(t,X)$ — *неубывающее отображение при всех* $\beta\in[0,1]$, *то для совокупности начальных задач*

$$D_HU+MU=\widetilde{F}_\beta(t,U)+G(t,U,\alpha),\quad U(0)=U_0,$$

справедливо утверждение теоремы 8.

***Следствие* 6.** *Пусть в совокупности уравнений* (19) $F\beta(t,X)$ (*не убывающая по* X *при всех* t) *и* $G(t,X)$ *не являются монотонными. Если существуют постоянная* $M>0$ *и отображение* $\widetilde{G}(t,X)$ *такие, что*

$$G(t,X,\alpha)=MX+\widetilde{G}(t,X),$$

а

$$\widetilde{G}(t,X,)=G(t,X,\alpha)-MX$$

не возрастает по X, *то для совокупности начальных задач*

$$D_H\widetilde{U}=F_\beta^0(t,\widetilde{U})+\widetilde{G}(t,\widetilde{U}),\quad \widetilde{U}(0)=U_0,$$

где $F_\beta^0(t,\widetilde{U})=F_\beta(t,\widetilde{U}e^{Mt})e^{-Mt}$, $\widetilde{G}(t,\widetilde{U})=G(t,\widetilde{U}e^{Mt})e^{-Mt}$, *справедливо утверждение теоремы* 8.

Далее рассмотрим итеративную технику для семейства уравнений (19) в случае пары решений типа II, удовлетворяющей уравнениям (22).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть выполняются условия* 2 – 4 *теоремы* 8. *Тогда для любого решения* $X_\beta(t)$ *семейства уравнений* (19) *такого, что* $V_0\le X_\beta(t)\le W_0$ *при всех* $t\in I$ *и* $\beta\in[0,1]$, *существуют последовательности* $\{V_n\}$, $\{W_n\}$ *такие, что*

$$V_0\le V_2\le\ldots\le V_{2n}\le X_\beta(t)\le V_{2n+1}\le\ldots\le V_3\le V_1,$$

$$W_1\le W_3\le\ldots\le V_{2n+1}\le X_\beta(t)\le W_{2n}\le\ldots\le W_2\le W_0$$

при всех $t\in I$ *и* $\beta\in[0,1]$ *при условии, что* $V_0\le V_2$ *и* $W_2\le W_0$ *на* I. *При этом совокупности итерационных схем*

$$D_HV_{n+1}=F_\beta(t,W_n)+G(t,V_n,\alpha),\quad V_{n+1}(0)=X_0,$$

$$D_HW_{n+1}=F_\beta(t,V_n)+G(t,W_n,\alpha),\quad W_{n+1}(0)=X_0,$$

порождают монотонные последовательности $\{V_{2n}\}$, $\{V_{2n+1}\}$, $\{W_{2n}\}$, $\{W_{2n+1}\}\in K_c(\mathbb{R}^n)$, *сходящиеся к множествам* $P(t)$, $Q(t)$, $P^*(t)$, $Q^*(t)\in K_c(\mathbb{R}^n)$ *соответственно и удовлетворяющие совокупности уравнений*

$$D_HQ=F_\beta(t,Q^*)+G(t,P(t),\alpha),\quad Q(0)=X_0,$$

$$D_HP=F_\beta(t,P^*)+G(t,Q(t),\alpha),\quad P(0)=X_0,$$

$$D_H Q^* = F_\beta(t, Q) + G(t, P^*, \alpha), \quad Q^*(0) = X_0,$$

$$D_H P^* = F_\beta(t, P) + G(t, Q^*, \alpha), \quad P^*(0) = X_0,$$

при всех $t \in I$ *и* $\beta \in [0,1]$.

Доказательство. Определим V_0 и W_0 соотношениями

$$R_0 + V_0 = Z \quad \text{и} \quad W_0 = Z + R_0,$$

где $R_0 = (R_{01}, \ldots, R_{0n}) \in K_c(\mathbb{R}^n)$ и $Z(t)$ — решение семейства уравнений

$$D_H Z = F_\beta(t, \Theta) + G(t, \Theta, \alpha), \quad Z(0) = X_0.$$

Здесь $\Theta \in K_c(\mathbb{R}^n)$ и $V_0 \le \Theta \le W_0$, $\beta \in [0,1]$. Вследствие монотонности отображений F_β и G справедлива оценка

$$D_H V_0 = D_H Z = F_\beta(t, \Theta) + G(t, \Theta, \alpha) \le F_\beta(t, W_0) + G(t, V_0, \alpha),$$

$$V_0(0) = Z(0) - R_0 < Z(0) = X_0.$$

Аналогично получаем неравенство для W_0:

$$D_H W_0 \ge F_\beta(t, V_0) + G(t, W_0, \alpha), \quad W_0(0) \ge X_0.$$

Поэтому пара $(V_0, W_0) \in K_c(\mathbb{R}^n)$ является парой нижних и верхних решений для задачи (19) на I при всех $\beta \in [0,1]$ и $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Пусть $X_\beta(t)$ — любое решение совокупности систем (19), такое, что $V_0 \le X_\beta(t) \le W_0$ при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$. Покажем, что

$$V_0 \le V_2 \le X_\beta(t) \le V_3 \le V_1,$$

$$W_1 \le W_3 \le X_\beta(t) \le W_2 \le W_0$$

при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$. Учитывая монотонность отображений F_β и G при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$, а также то, что $V_0 \le X_\beta(t) \le W_0$, имеем

$$D_H W = F_\beta(t, W) + G(t, W, \alpha) \le F_\beta(t, W_0) + G(t, V_0, \alpha), \quad W(0) = X_0,$$

$$D_H V_1 = F_\beta(t, W_0) + G(t, V_0, \alpha), \quad V_1(0) = X_0,$$

при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$. Отсюда следует, что $X_\beta(t) \le V_1$ на I при $\beta \in [0,1]$. Аналогично $W_1 \le W_\beta(t)$ на I при $\beta \in [0,1]$. Чтобы показать, что $V_2 \le X_\beta(t)$ на I при $\beta \in [0,1]$, рассматриваются совокупность начальных задач

$$D_H V_2 = F_\beta(t, W_1) + G(t, V_1, \alpha), \quad V_2(0) = X_0,$$

и неравенство

$$D_H X = F_\beta(t, X) + G(t, X, \alpha) \ge F_\beta(t, W_1) + G(t, V_1, \alpha), \quad X(0) = X_0,$$

которое приводит к оценке $V_2 \le X_\beta(t)$ на I при всех $\beta \in [0,1]$. Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, нетрудно показать, что

$$V_2 \le X_\beta(t)$$

и

$$X_\beta(t) \le W_2 \quad \text{при всех} \quad t \in I \quad \text{и} \quad \beta \in [0,1].$$

Продолжая этот процесс для $n > 2$, получаем

$$V_{2n-4} \le V_{2n-2} \le X_\beta(t) \le V_{2n-1} \le V_{2n-2},$$

$$W_{2n-3} \le W_{2n-1} \le X_\beta(t) \le W_{2n-2} \le W_{2n-4}$$

при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$.

Поскольку $V_n, W_n \in K_c(\mathbb{R}^n)$ при всех $n = 0,1,2,\ldots$, как и в теореме 8, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} V_{2n} = P(t), \quad \lim_{n\to\infty} V_{2n+1} = Q(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} W_{2n+1} = P^*(t), \quad \lim_{n\to\infty} W_{2n} = Q^*(t)$$

существуют в $K_c(\mathbb{R}^n)$ равномерно по $t \in I$ при всех $\beta \in [0,1]$ и имеют место соотношения для множеств $P(t)$, $Q(t)$, $P^*(t)$, $Q^*(t)$, указанные в теореме 9. Кроме того, нетрудно видеть, что $P(t) \le X_\beta(t) \le Q(t)$ и $P^*(t) \le X_\beta(t) \le Q^*(t)$ при всех $t \in I$ и $\beta \in [0,1]$.

Теорема 9 доказана.

7. Условия глобального существования решений. Вернемся к семейству уравнений (4) и исследуем вопрос о существовании решений $W_\beta(t)$ при всех $t \ge t_0$ и $\beta \in [0,1]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\beta \in [0,1]$ *отображения* $F_\beta \in C(\mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ *и семейство начальных задач*

$$D_H W = F_\beta(t,W), \quad W(t_0) = W_0,$$

имеют локальное решение для любых начальных значений $(t_0, W_0) \in \mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n)$;

2) *существует функция* $g(t,w)$, $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, *не убывающая по* w *и такая, что*

$$D[F_\beta(t,W), \Theta_0] \le g(t, D[W, \Theta_0])$$

при всех $\beta \in [0,1]$ *и* $(t,W) \in \mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n)$;

3) *максимальное решение* $r(t,t_0,w_0)$ *уравнения сравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g(t,w), \quad w(t_0) = w_0 \ge 0,$$

существует при всех $t \ge t_0$.

Тогда максимальным интервалом существования семейства решений $W_\beta(t)$ *при любом* $\beta \in [0,1]$ *с начальными значениями* $D[W_0, \Theta_0] \le w_0$ *является* $[t_0, w)$.

Доказательство. Пусть $\beta \in [0,1]$ и $W_\beta(t) = W(t,t_0,W_0)$ — любое решение семейства уравнений (19) с начальными условиями $D[W_0,\Theta_0] = w_0$, которое существует на интервале $[t_0,a)$, $t_0 < a < \infty$, где величина a не может быть увеличена. Согласно условиям 2, 3 теоремы 10 и принципу сравнения (см. [6]), для $m(t) = D[W_\beta(t),\Theta_0]$ получаем оценку

$$m(t) \le r(t,t_0,D[W_0,\Theta_0]), \quad t_0 \le t < a.$$

Пусть $(t_1,t_2) \in (t_0,\beta)$, $t_1 < t_2$. Тогда

$$D[W_\beta(t_1),W_\beta(t_2)] = D\left[W_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} F_\beta(s,W(s))ds,\ W_0 + \int\limits_{t_0}^{t_2} F_\beta(s,W(s))ds\right] =$$

$$= D\left[\int\limits_{t_1}^{t_2} F_\beta(s,W(s))ds,\Theta_0\right] \le \int\limits_{t_1}^{t_2} D\left[F_\beta(s,W(s)),\Theta_0\right]ds \le$$

$$\le \int\limits_{t_1}^{t_2} g(s,D[W(s),\Theta_0])ds. \tag{29}$$

Из неравенства (29) имеем

$$D[W_\beta(t_1),W_\beta(t_2)] \le \int\limits_{t_1}^{t_2} g(s,r(s,t_0,w_0))ds = r(t_2,t_0,w_0) - r(t_1,t_0,w_0)$$

при всех $\beta \in [0,1]$. По условию 3 теоремы 10 существует $\lim_{t\to a^-} = r(t,t_0,w_0)$ и является конечным. Если в пределе понимать $t \to a^-$ как $t_1,t_2 \to a^-$, то согласно критерию Коши о сходимости $\lim_{t\to a^-} W_\beta(t,t_0,w_0)$ существует при всех $\beta \in [0,1]$.

Пусть

$$W_\beta(a,t_0,w_0) = \lim_{t\to a^-} W_\beta(t,t_0,w_0).$$

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{gathered} D_H W = F_\beta(t,W), \\ W(a) = W_\beta(a,t_0,w_0). \end{gathered} \tag{30}$$

Согласно условию 1 теоремы семейство начальных задач (30) имеет локальное решение и, следовательно, решение $W_\beta(t,t_0,w_0)$ может быть продолжено за границу a. Это противоречит сделанному выше предположению.

Теорема 10 доказана.

8. Об оценке приближенного решения множества уравнений. Семейство уравнений (4) является некоторым приближением множества уравнений (1). Представляет интерес вопрос об оценке погрешности приближения решений $X(t)$ системы (1) множеством $W_\beta(t)$ решений уравнений (4).

Определение 5 [6, 3]. *Семейство функций* $W_\beta(t) \in C(\mathbb{R}_+, K_c(\mathbb{R}^n))$ *является* ε*-приближенным решением множества уравнений* (1), *если при заданном* $\varepsilon > 0$ *существует* $\beta^* \in [0,1]$ *такое, что*

$$D[X(t), W_{\beta^*}(t)] \leq \varepsilon \tag{31}$$

при всех $t \geq t_0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом* $\beta \in [0,1]$ *отображения* F_β *принадлежат* $C(\mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ *и при всех* $\alpha \in \mathfrak{I}$ *отображение* F *принадлежит* $C(\mathbb{R}_+ \times K_c(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{I}, K_c(\mathbb{R}^n))$;

2) *существует функция* $g_\beta(t,w) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *такая, что*

$$D[F_\beta(t,W), F(t,X,\alpha)] \leq g_\beta(t, D[W,X])$$

при всех $\beta \in [0,1]$ *и любом* $\alpha \in \mathfrak{I}$;

3) *существует максимальное решение* $r(t,t_0,w_0)$ *семейства начальных задач*

$$\frac{dw}{dt} = g_\beta(t,w), \quad w(t_0) = w_0,$$

при всех $t \geq t_0$;

4) *существует хотя бы одно значение* $\beta^* \in [0,1]$, *при котором* $0 < r(t,t_0,w_0) < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$.

Тогда $W_{\beta^*}(t)$ *является* ε*-приближенным решением начальной задачи* (1), *как только* $D[W_0, X_0] \leq w_0$.

Доказательство. При выполнении условий $1-3$ теоремы 11 в силу теоремы 2 имеем оценку

$$D[X(t), W_\beta(t)] \leq r(t,t_0,w_0)$$

при всех $t \geq t_0$, $\beta \in [0,1]$. При выполнении условия 4 теоремы 11 находим, что $W_{\beta^*}(t)$ принадлежит $K_c(\mathbb{R}^n)$ и является ε-приближенным решением задачи (1) в смысле определения 4.

***Замечание* 4.** Оценка (31) в определении 4 отличается от традиционной в определениях ε-приближенного решения (см. [6, 3]) тем, что в данном случае приближенным решением для множества уравнений (1) является семейство функций $W_\beta(t)$, которое, в свою очередь, является точным решением для регуляризованного уравнения (4).

9. Эйлеровы решения для регуляризованного уравнения (4). Рассмотрим начальную задачу для семейства уравнений

$$D_H W = F_\beta(t,W), \quad W(t_0) = W_0, \tag{32}$$

где $W \in K_c(\mathbb{R}^n)$ и $F_\beta \in C(I \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ при всех $\beta \in [0,1]$. Интервал $[t_0, t_0 + d]$ разделим на отрезки

$$\mathbb{T} = [t_0, t_1, \ldots, t_N = t_0 + d]$$

и рассмотрим на интервале $[t_0, t_1]$ начальную задачу

$$D_H W = F_\beta(t_0, W_0), \quad W(t_0) = W_0 \in K_c(\mathbb{R}^n),$$

при всех $\beta \in [0,1]$. Эта задача имеет решение $W(t) = W(t,t_0,w_0)$ при всех $t \in [t_0,t_1]$. В точке $t = t_1$ вычислим $W(t_1) = W_1$ и рассмотрим задачу

$$D_H W = F_\beta(t_1, W_1), \quad W_1(t_1) = W_1 \in K_c(\mathbb{R}^n),$$

для которой $W(t) = W(t,t_1,W_1)$ будет решением при всех $t \in [t_1,t_2]$. Продолжая этот процесс, получаем решение $W(t)$ на интервале $[t_0,t_0+d]$.

Пусть $\operatorname{diam}\mathbb{T} = \max\{t_i - t_{i-1} \colon 1 \le i \le N\}$ — диаметр эйлерового прямоугольника.

Определение 6. *Многозначное отображение $W(t)$ является эйлеровым решением семейства уравнений* (32), *если последовательность решений уравнений на $\mathbb{T}$ равномерно сходится при* $\operatorname{diam}\mathbb{T} \to 0$ *при $N \to \infty$ при всех $\beta \in [0,1]$.*

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *при любом $\beta \in [0,1]$ семейство многозначных отображений F_β принадлежит $C(I \times \times K_c(\mathbb{R}^n), K_c(\mathbb{R}^n))$ и существует функция $g_\beta(t,w)$, не убывающая по w и такая, что*

$$D[F_\beta(t,W),\Theta_0] \le g_\beta(t, D[W,\Theta_0])$$

при всех $(t,W) \in I \times K_c(\mathbb{R}^n)$;

2) *максимальное решение $r(t,t_0,w_0)$ семейства уравнений*

$$\frac{dw}{dt} = g_\beta(t,w), \quad w(t_0) = w_0,$$

существует на $[t_0,t_0+d]$.

Тогда:

а) *существует, по крайней мере, одно семейство отображений $W_\beta(t)$, являющееся эйлеровым решением семейства уравнений* (32);

б) *любое эйлерово решение $W_\beta(t)$ семейств уравнений* (32) *удовлетворяет оценке*

$$D[W_\beta(t),W_0] \le r(t,t_0,w_0) - w_0$$

при всех $t \in [t_0,t_0+d]$ и $\beta \in [0,1]$, как только $w_0 = D[W_0,\Theta_0]$.

Доказательство. В точках $t_i \in \mathbb{T}$ обозначим значения $W_\beta(t)$ так: $W_0, W_1, \ldots, W_N$, т. е. $W_\beta(t_i) = W_i$, $i = 0,1,\ldots,N-1$. На любом интервале (t_i,t_{i+1}) имеем

$$D[D_H W_\beta(t),\Theta_0]\big|_{\mathbb{T}} = D[F_\beta(t_i,W_i),\Theta_0] \le g_\beta(t_i, D[W_i,\Theta_0]) \tag{33}$$

в силу условия 1 теоремы 12. Поэтому

$$D[W_1(t),W_0] = D\left[W_0 + \int_{t_0}^{t} F_\beta(t_0,W_0)ds, W_0\right] = D\left[\int_{t_0}^{t} F_\beta(t_0,W_0)ds, \Theta_0\right] \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} D\left[F_\beta(t_0,W_0),\Theta_0\right] ds \le \int_{t_0}^{t} g_\beta(t_0, D[t_0,W_0])ds \le$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} g_\beta(s,r(s))ds = r(t,t_0,D[W_0,\Theta_0]) - D[W_0,\Theta_0] \leq$$

$$\leq r(t_0+d,t_0,D[W_0,\Theta_0]) - D[W_0,\Theta_0] = \Phi = \mathrm{const} > 0$$

при всех $t \in [t_0,t_1]$ и $\beta \in [0,1]$. Продолжая этот процесс, нетрудно получить оценку

$$D[W_i(t),W_0] \leq r(t_0+d,t_0,D[W_0,\Theta_0]) - D[W_0,\Theta_0] = \Phi$$

на $[t_i,t_{i+1}]$. Отсюда следует, что $D[W_\beta(t),\Theta_0]\big|_{\mathbb{T}} \leq \Phi$ при всех $t \in [t_0,t_0+d]$ и $\beta \in [0,1]$. Кроме того, из оценки (33) находим

$$D[D_H W_\beta(t),\Theta_0]\big|_{\mathbb{T}} \leq g_\beta(t_0+d,r(t_0+d)) =$$

$$= \frac{dr}{dt}(t_0+d,D[W_0,\Theta_0]) = \psi = \mathrm{const} > 0.$$

Далее, для $t_0 \leq s \leq t \leq t_0+d$ имеем

$$D[W_\beta(t),W_\beta(s)]\big|_{\mathbb{T}} \leq \int_{t_0}^{t} D\left[F_\beta(\tau,W(\tau)),\Theta_0\right]\big|_{\mathbb{T}} d\tau + \int_{t_0}^{s} D\left[F_\beta(\tau,W(\tau)),\Theta_0\right]\big|_{\mathbb{T}} d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} g_\beta(\tau,r(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s} g_\beta(\tau,r(\tau))d\tau = \int_{s}^{t} g_\beta(\tau,r(\tau))d\tau =$$

$$= r(t) - r(s) = r'(\sigma)|t-s| \leq \psi|t-s|$$

при всех $\beta \in [0,1]$ для некоторого $s \leq \sigma \leq t$. Отсюда следует, что $\{W_\beta(t)\}\big|_{\mathbb{T}}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной ψ при всех $t \in [t_0,t_0+d]$.

Пусть разделение отрезка $[t_0,t_0+d]$ такое, что $\operatorname{diam}\mathbb{T} \to 0$ при $N \to \infty$. Тогда любая „дуга" $W_\beta(t)$ на (t_i,t_{i+1}), $i = 1,2,\ldots,N$, удовлетворяет условиям

$$W_\beta(t_0)\big|_{\mathbb{T}} = W_0, \quad D[W_\beta(t),W_0]\big|_{\mathbb{T}} \leq \Phi$$

и

$$D[D_H W_\beta,\Theta_0]\big|_{\mathbb{T}} \leq \psi \quad \text{при} \quad t \in [t_0,t_0+d]$$

при всех $\beta \in [0,1]$. Отсюда следует, что семейство дуг $\{W_\beta(t)\}\big|_{\mathbb{T}}$ является непрерывным и равномерно ограниченным и поэтому в силу теоремы Асколи – Арцела существует подпоследовательность, которая равномерно сходится к многозначному отображению $W_\beta(t)$ на $[t_0,t_0+d]$ и является абсолютно непрерывной на $[t_0,t_0+d]$.

Теорема 12 доказана.

10. Комментарии и библиография. Семейство уравнений вида (1) с неточными значениями параметров рассматривалось во многих работах (см. [1, 8] и приведенную в них библиографию). В работах [2, 3] установлены условия существования решений множества систем дифференциальных уравнений в случае отсутствия в правой части параметра неточности $\alpha \in \mathfrak{I}$.

В основу этой статьи положены результаты работ [6, 7] и их развитие. В пункте 2 приведена процедура регуляризации семейства уравнений возмущенного движения и сформулированы задачи исследования. В пункте 3 рассмотрена задача о вилке Чаплыгина для множества решений семейства уравнений и установлены оценки расстояния между верхним и нижним решениями регуляризованных уравнений. В пункте 4 установлены условия существования решений регуляризованного семейства уравнений. В пункте 5 приведены некоторые оценки для множества решений, которые применяются далее при разработке монотонной итеративной техники для регуляризованного семейства уравнений. В пункте 6 изложены результаты разработки итеративной техники для системы (1) путем применения регуляризованного семейства уравнений (4). В пункте 7 приведена теорема о глобальном существовании решений семейства уравнений (4). В пункте 8 исследуется задача об оценке приближенного решения семейства уравнений (4). В пункте 9 обсуждается задача о существовании эйлеровых решений для семейства регуляризованных уравнений и устанавливаются некоторые их оценки. Полученные результаты могут оказаться полезными при исследовании некоторых моделей динамического поведения пучков заряженных частиц (см. [11] и приведенную в ней библиографию).

1. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Неточные динамические системы: устойчивость и управление движением. – Киев: Феникс, 2009.
2. *Pinto B. L., De Blasi A. J., Ievorlino F.* Uniquenees and existence theorems for differential equations with convex-valued solutions // Boll. Unione mat. ital. – 1970. – **3**. – P. 47 – 54.
3. *Плотников А. В., Скрыпник Н. В.* Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
4. *Walter W.* Differential and integral inequalities. – Berlin: Springer, 1970. – 352 p.
5. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
6. *Lakshmikantham V., Bhaskar T. G., Devi J. V.* Theory of set differential equations in metric spaces. – Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2006. – 202 p.
7. *Мартынюк А. А., Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Анализ множества уравнений нелинейной динамики: оценки решений и принцип сравнения // Дифференц. уравнения. – 2012. – **10**. – С. 1395 – 1403.
8. *Martynyuk A. A., Martynyuk-Chernienko Yu. A.* Uncertain dynamical systems: stability and motion control. – Boca Raton: CRC Press Taylor and Francis Group, 2012. – 296 p.
9. *Мартынюк А. А., Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Устойчивость движения нелинейных систем с нечеткой характеристикой параметров // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 1. – С. 50 – 70.
10. *Filippov A. F.* Differential equations with discontinuous Righand right-hand sides. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988. – 304 p.
11. *Овсянников Д. А., Егоров Н. В.* Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков. – СПб: Изд. СПб. ун-та, 1998. – 274 с.

Получено 16.10.12