УДК 517.928

С. П. Пафик (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ),
В. П. Яковець (Ун-т менеджменту освіти Нац. акад. пед. наук України, Київ)

ПРО СТРУКТУРУ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ТА УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

For a system of linear differential equations of order p with identically degenerate coefficient matrix of the leading derivatives, we establish conditions under which it has a general solution of the Cauchy type. The structure of this solution is determined. Conditions for the existence and uniqueness of a solution of the corresponding initial-value problem are also found.

Для системы линейных дифференциальных уравнений p-го порядка с тождественно вырожденной матрицей при старших производных найдены условия, при выполнении которых она имеет общее решение типа Коши. Определена структура этого решения. Установлены также условия существования и единственности решения соответствующей начальной задачи.

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$A_p(t)\frac{d^p x}{dt^p} + A_{p-1}(t)\frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} + \ldots + A_1(t)\frac{dx}{dt} + A_0(t)x = f(t), \quad t \in [a;b], \tag{1}$$

де $A_i(t)$, $i = \overline{0,p}$, — квадратні матриці n-го порядку, $f(t)$ — n-вимірний вектор, які можуть мати як дійсні, так і комплекснозначні елементи, $x(t)$ — шуканий n-вимірний вектор.

Вважатимемо, що

$$\det A_p(t) = 0 \quad \forall t \in [a;b], \tag{2}$$

тобто матриця $A_p(t)$ при старшій похідній тотожно вироджена на заданому проміжку.

Питання про структуру загального розв'язку систем даного типу, які досить часто зустрічаються в процесі розв'язання практичних задач, вивчалось іншими авторами у випадках $p = 1, 2$. Зокрема, у роботах [1, 2] знайдено умови, при виконанні яких вироджена лінійна система першого порядку зводиться до центральної канонічної форми і має загальний розв'язок типу Коші. Виходячи з цього, у [3] визначено умови, при виконанні яких загальний розв'язок типу Коші має система (1) при $p = 2$. У даній роботі ці результати узагальнюються на систему рівнянь (1) довільного порядку p.

Позначимо через

$$L_k(t) = \sum_{i=0}^{k} C_{p-i}^{k-i} A_{p-i}(t)\frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}}, \quad k = \overline{1,p}, \tag{3}$$

диференціальні оператори, що діють в унітарному просторі U^n n-вимірних вектор-функцій класу $C^k[a;b]$, $k \geq p$.

Означення 1. *Будемо говорити, що матриця $A_p(t)$ має на відрізку $[a;b]$ жорданів ланцюжок векторів завдовжки s відносно операторів $L_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, якщо існують ненульові вектори $\varphi_j(t) \in U^n$, $j = \overline{1,s}$, такі, що для всіх $t \in [a;b]$ виконуються співвідношення*

$$A_p(t)\varphi_1(t) = 0,$$

$$A_p(t)\varphi_j(t) + \sum_{k=1}^{\min(j-1,p)} L_k(t)\varphi_{j-k}(t) = 0, \quad j = \overline{2,s},$$

а рівняння

$$A_p(t)z + \sum_{k=1}^{\min(s,p)} L_k(t)\varphi_{s+1-k}(t) = 0$$

не має розв'язку в жодній точці відрізка $[a;b]$.

Якщо матриця $A_p(t)$ *має кілька жорданових ланцюжків відносно операторів* $L_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, *то вектори, які їх утворюють, називатимемо жордановим набором матриці* $A_p(t)$ *відносно операторів* $L_i(t)$, $i = \overline{1,p}$.

Нехай жорданів набір матриці $A_p(t)$ відносно операторів $L_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, складається з векторів $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, що утворюють r ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1,r}$.

Згідно з означенням 1 ці вектори для всіх $t \in [a;b]$ задовольняють співвідношення

$$A_p(t)\varphi_i^{(1)}(t) = 0, \quad i = \overline{1,r}, \tag{4}$$

$$A_p(t)\varphi_i^{(j)}(t) + \sum_{k=1}^{\min(j-1,p)} L_k(t)\varphi_i^{(j-k)}(t) = 0, \qquad j = \overline{2,s_i}, \quad i = \overline{1,r}. \tag{5}$$

Позначимо через $\psi_j^{(1)}(t)$, $j = \overline{1,r}$, базисні елементи нуль-простору матриці $A_p^*(t)$, спряженої до матриці $A_p(t)$. Тоді завдяки сумісності рівнянь (5) маємо

$$\left(\sum_{k=1}^{\min(j,p)} L_k(t)\varphi_i^{(j+1-k)}(t), \psi_l^{(1)}(t) \right) = 0, \qquad j = \overline{1, s_i - 1}, \quad i = \overline{1,r}, \quad t \in [a;b]. \tag{6}$$

У свою чергу з несумісності рівнянь

$$A_p(t)z + \sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t) = 0, \quad i = \overline{1,r},$$

випливає, що r-вимірні вектори

$$l_i(t) = \mathrm{col}\left[\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_1^{(1)}(t) \right), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_r^{(1)}(t) \right) \right], \quad i = \overline{1,r},$$

не дорівнюють нульовому в жодній точці відрізка $[a;b]$.

Якщо при цьому

$$\det \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_j^{(1)}(t) \right) \right\|_1^r \neq 0 \quad \forall t \in [a;b], \tag{7}$$

то, дотримуючись [2, с. 85], даний жорданів набір будемо називати повним.

Припустимо тепер, що виконуються наступні умови:

1°) $A_i(t) \in C^{3m-2}[a;b]$, $i = \overline{1,p}$;

2°) $f(t) \in C^{m-1}[a;b]$;

3°) $\operatorname{rank} A_p(t) = n - r = \text{const}$;

4°) матриця $A_p(t)$ має на відрізку $[a;b]$ повний жорданів набір векторів відносно операторів $L_i(t)$, $i = \overline{1,p}$, який складається з r ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1,r}$, де $\max s_i = m$.

Виконавши в системі (1) заміну

$$y_i = \frac{d^{i-1}x}{dt^{i-1}}, \quad i = \overline{1,p}, \tag{8}$$

і ввівши позначення

$$y = \operatorname{col}[y_1, y_2, \ldots, y_p], \tag{9}$$

зведемо її до еквівалентної системи рівнянь першого порядку

$$\widetilde{B}(t)\frac{dy}{dt} = \widetilde{A}(t)y + \widetilde{f}(t), \tag{10}$$

в якій

$$\widetilde{B}(t) = \operatorname{diag}\{E, \ldots, E, A_p(t)\}, \tag{11}$$

$$\widetilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \\ -A_0(t) & -A_1(t) & -A_2(t) & \ldots & -A_{p-2}(t) & -A_{p-1}(t) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\widetilde{f}(t) = \operatorname{col}[0, \ldots, 0, f(t)], \tag{13}$$

де E, 0 — одинична та нульова матриці n-го порядку відповідно.

Покажемо, що система (10) задовольняє умови теорем 2.1, 2.2 із [2], які гарантують її звідність до центральної канонічної форми та наявність у неї загального розв'язку типу Коші.

Дійсно, з умов $1°-3°$ одразу випливає, що $\widetilde{A}(t), \widetilde{B}(t) \in C^{3m-2}[a;b]$, $\widetilde{f}(t) \in C^{m-1}[a;b]$, $\operatorname{rank} \widetilde{B}(t) = pn - r = \text{const}$.

Знайдемо жорданів набір матриці $\widetilde{B}(t)$ відносно оператора $\widetilde{L}(t) = \widetilde{A}(t) - \widetilde{B}(t)\dfrac{d}{dt}$ у просторі U^{pn} достатньо гладких pn-вимірних вектор-функцій.

Нехай $g_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,r}$, — власні вектори матриці $\widetilde{B}(t)$, що відповідають її нульовому власному значенню. Подамо їх у вигляді $g_i^{(1)}(t) = \operatorname{col}\left[g_{i1}^{(1)}(t), g_{i2}^{(1)}(t), \ldots, g_{ip}^{(1)}(t)\right]$, $i = \overline{1,r}$, де $g_{ik}^{(1)}(t)$, $k = \overline{1,p}$, — n-вимірні вектор-стовпці. Відповідно до структури матриці $\widetilde{B}(t)$ матимемо

$$\begin{aligned} g_{ik}^{(1)}(t) &= 0, \quad k = \overline{1,p-1}, \\ g_{ip}^{(1)}(t) &= \varphi_i^{(1)}(t), \quad i = \overline{1,r}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $\varphi_i^{(1)}(t)$, $i=\overline{1,r}$, — власні вектори матриці $A_p(t)$, що відповідають її нульовому власному значенню.

Отже,

$$g_i^{(1)}(t)=\operatorname{col}\left[0,0,\ldots,0,\varphi_i^{(1)}(t)\right],\quad i=\overline{1,r}. \tag{15}$$

Зафіксуємо один із цих власних векторів і будемо шукати відповідні йому приєднані вектори. Перший із них позначимо $g_i^{(2)}(t)$ та подамо у вигляді $g_i^{(2)}(t)=\operatorname{col}\left[g_{i1}^{(2)}(t),g_{i2}^{(2)}(t),\ldots,g_{ip}^{(2)}(t)\right]$, $i=\overline{1,r}$, де $g_{ik}^{(2)}(t)$, $k=\overline{1,p}$, — n-вимірні вектор-стовпці. За означенням жорданового ланцюжка цей вектор повинен задовольняти рівняння

$$\widetilde{B}(t)g_i^{(2)}(t)=\widetilde{L}(t)g_i^{(1)}(t).$$

Врахувавши структуру матриць $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$, з нього дістанемо

$$g_{ik}^{(2)}(t)=0,\quad k=\overline{1,p-2},$$

$$g_{i,p-1}^{(2)}(t)=\varphi_i^{(1)}(t),$$

$$A_p(t)g_{ip}^{(2)}(t)+A_{p-1}(t)\varphi_i^{(1)}(t)+A_p(t)\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}=0. \tag{16}$$

Додавши та віднявши в лівій частині рівняння (16) вектор $C_{p-1}^1A_p(t)\dfrac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}$ і взявши до уваги формули (3), запишемо його у вигляді

$$A_p(t)\left(g_{ip}^{(2)}(t)-C_{p-1}^1\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}\right)+L_1(t)\varphi_i^{(1)}(t)=0.$$

Згідно з умовою 4° та співвідношеннями (5) це рівняння розв'язне при всіх $t\in[a;b]$, і з нього знайдемо

$$g_{ip}^{(2)}(t)=\varphi_i^{(2)}(t)+C_{p-1}^1\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}, \tag{17}$$

де $\varphi_i^{(2)}(t)$ — перший приєднаний вектор i-го жорданового ланцюжка матриці $A_p(t)$ відносно операторів $L_k(t)$, $k=\overline{1,p}$.

Отже,

$$g_i^{(2)}(t)=\operatorname{col}\left[0,\ldots,0,\varphi_i^{(1)}(t),\varphi_i^{(2)}(t)+C_{p-1}^1\frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}\right].$$

Аналогічно, позначивши другий приєднаний вектор через $g_i^{(3)}(t)$ і подавши його у вигляді $g_i^{(3)}(t)=\operatorname{col}\left[g_{i1}^{(3)}(t),g_{i2}^{(3)}(t),\ldots,g_{ip}^{(3)}(t)\right]$, з рівняння

$$\widetilde{B}(t)g_i^{(3)}(t)=\widetilde{L}(t)g_i^{(2)}(t)$$

дістанемо

$$g_{ik}^{(3)}(t) = 0, \quad k = \overline{1, p-3},$$

$$g_{i,p-2}^{(3)}(t) = \varphi_i^{(1)}(t),$$

$$g_{i,p-1}^{(3)}(t) = \varphi_i^{(2)}(t) + C_{p-2}^1 \frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt},$$

$$A_p(t) g_{ip}^{(3)}(t) + A_{p-2}(t)\varphi_i^{(1)}(t) + A_{p-1}(t)\varphi_i^{(2)}(t) + C_{p-1}^1 A_{p-1}(t) \frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt} +$$

$$+ A_p(t) \frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} + C_{p-1}^1 A_p(t) \frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2} = 0. \tag{18}$$

Додавши і віднявши в лівій частині рівняння (18) вектори $C_{p-1}^2 A_p(t) \dfrac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2}$ та $C_{p-1}^1 A_p(t) \dfrac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt}$, запишемо його у вигляді

$$A_p(t) \left(g_{ip}^{(3)}(t) - C_{p-1}^1 \frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} - C_{p-1}^2 \frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2} \right) + L_1(t)\varphi_i^{(2)}(t) + L_2(t)\varphi_i^{(1)}(t) = 0,$$

звідки згідно з умовою 4° та співвідношенням (6) випливає

$$g_{ip}^{(3)}(t) = \varphi_i^{(3)}(t) + C_{p-1}^1 \frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} + C_{p-1}^2 \frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2}, \tag{19}$$

де $\varphi_i^{(3)}(t)$ — другий приєднаний вектор i-го жорданового ланцюжка матриці $A_p(t)$ відносно операторів $L_k(t)$, $k = \overline{1, p}$. Отже,

$$g_i^{(3)}(t) = \operatorname{col}\left[0, \ldots, 0, \varphi_i^{(1)}(t), \varphi_i^{(2)}(t) + C_{p-2}^1 \frac{d\varphi_i^{(1)}(t)}{dt}, \varphi_i^{(3)}(t) + C_{p-1}^1 \frac{d\varphi_i^{(2)}(t)}{dt} + C_{p-1}^2 \frac{d^2\varphi_i^{(1)}(t)}{dt^2}\right].$$

Продовжуючи цей процес, методом математичної індукції встановимо, що рівняння

$$\widetilde{B}(t) g_i^{(j)}(t) = \widetilde{L}(t) g_i^{(j-1)}(t), \quad i = \overline{1, r},$$

розв'язні при $j = \overline{1, s_i}$ відносно векторів $g_i^{(j)}(t) = \operatorname{col}\big[g_{i1}^{(j)}(t), g_{i2}^{(j)}(t), \ldots, g_{ip}^{(j)}(t)\big]$, при цьому n-вимірні вектори $g_{ik}^{(j)}(t)$ виражаються через вектори $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, i-го жорданового ланцюжка матриці $A_p(t)$ відносно операторів $L_k(t)$, $k = \overline{1, p}$, за формулою

$$g_{ik}^{(j)}(t) = \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l \frac{d^l \varphi_i^{(j+k-p-l)}(t)}{dt^l}, \quad k = \overline{1, p}. \tag{20}$$

Водночас переконуємось, що рівняння $\widetilde{B}(t) z = \widetilde{L}(t) g_i^{(s_i)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, несумісні.

Отже, матриця $\widetilde{B}(t)$ має відносно оператора $\widetilde{L}(t)$ жорданів набір векторів, який складається з r ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1, r}$. Покажемо, що цей жорданів набір є повним. Для цього скористаємось наступним твердженням.

Лема 1. *При всіх $t \in [a;b]$ виконується рівність*

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_j^{(1)}(t)\right), \quad i,j=\overline{1,r}, \tag{21}$$

де $h_j^{(1)}(t)$, $\psi_j^{(1)}(t)$, $j=\overline{1,r}$, — базисні елементи нуль-просторів матриць $\widetilde{B}^*(t)$ та $A_p^*(t)$ відповідно.

Доведення. Враховуючи структуру матриці $\widetilde{B}^*(t)$, неважко переконатися, що

$$h_j^{(1)}(t) = \mathrm{col}\left[0,\ldots,0,\psi_j^{(1)}(t)\right], \quad j=\overline{1,r}. \tag{22}$$

Взявши до уваги формули (20), (22) та структуру (12), (13) матриць $\widetilde{A}(t), \widetilde{B}(t)$, будемо мати

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=0}^{\min(s_i,p-1)}\left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l A_k(t)\frac{d^l\varphi_i^{(s_i+1+k-p-l)}(t)}{dt^l}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_{p-1}^k A_p(t)\frac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}\right),\ \psi_j^{(1)}(t)\right). \tag{23}$$

Перегрупувавши доданки у правій частині рівності (23), дістанемо

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=0}^{\min(s_i,p-1)}\left(\sum_{l=0}^{k} C_{p+l-k-1}^l A_{p+l-k-1}(t)\frac{d^l\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^l}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_{p-1}^k A_p(t)\frac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}\right),\ \psi_j^{(1)}(t)\right). \tag{24}$$

Додавши та віднявши $p-1$ раз від виразу

$$\sum_{k=0}^{\min(s_i,p-1)}\left(\sum_{l=0}^{k} C_{p+l-k-1}^l A_{p+l-k-1}(t)\frac{d^l\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^l} + C_{p-1}^k A_p(t)\frac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}\right)$$

вектор $C_{p-1}^{k+1}A_p(t)\dfrac{d^{k+1}\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^{k+1}}$, $k=\overline{0,p-2}$, перегрупувавши доданки в отриманій рівності та змінивши індекс k на $k-1$, матимемо

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)}\sum_{l=0}^{k} C_{p+l-k}^l A_{p+l-k}(t)\frac{d^l\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t)}{dt^l}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{\min(s_i,p-1)} C_{p-1}^k A_p(t)\frac{d^k\varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^k}, \psi_j^{(1)}(t)\right),$$

або

$$\left(\widetilde{L}(t)g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t)\right) = -\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t)\varphi_i^{(s_i+1-k)}(t)-\right.$$

$$- \sum_{k=1}^{\min(s_i,p-1)} C_{p-1}^k A_p(t) \frac{d^k \varphi_i^{(s_i-k)}(t)}{dt^k},\ \psi_j^{(1)}(t) \Bigg).$$

Оскільки $A_p^*(t)\psi_j^{(1)}(t) = 0$, то

$$\left(\widetilde{L}(t) g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t) \right) = -\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t) \varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_j^{(1)}(t) \right),$$

що й потрібно було довести.

З формули (21) та умови 4° одразу випливає, що

$$\det \left\| \left(\widetilde{L}(t) g_i^{(s_i)}(t), h_j^{(1)}(t) \right) \right\|_1^r =$$

$$= (-1)^r \det \left\| \left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k(t) \varphi_i^{(s_i+1-k)}(t), \psi_j^{(1)}(t) \right) \right\|_1^r \neq 0 \quad \forall t \in [a; b].$$

Отже, побудований вище жорданів набір векторів матриці $\widetilde{B}(t)$ відносно оператора $\widetilde{L}(t)$ є повним.

Таким чином, для системи рівнянь (10) виконуються всі умови теореми 2.2 із [2, с. 62]. Тоді згідно з цією теоремою загальний розв'язок системи рівнянь (10) матиме вигляд

$$y(t) = Y_{pn-s}(t)c + \widetilde{y}(t), \tag{25}$$

де $Y_{pn-s}(t)$ — матриця розмірності $pn \times (pn - s)$, стовпцями якої є $pn - s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи; c — довільний сталий $(pn - s)$-вимірний вектор; $\widetilde{y}(t)$ — частинний розв'язок системи (10); $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_r$ — сума довжин жорданових ланцюжків матриці $\widetilde{B}(t)$ відносно оператора $\widetilde{L}(t)$.

Відповідно до заміни (8) перші n координат вектора (25) утворюють розв'язок вихідної системи рівнянь (1), а наступні — його похідні до p-го порядку. Тому n-вимірні вектори $x_i(t)$, $i = \overline{1, pn - s}$, складені з перших n елементів стовпців матриці $Y_{pn-s}(t)$, є лінійно незалежними розв'язками однорідної системи рівнянь, яка відповідає (1).

Утворивши з цих векторів $(n \times (pn - s))$-матрицю

$$X_{pn-s}(t) = \left[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{pn-s}(t) \right]$$

і позначивши через $\widetilde{x}(t)$ частинний розв'язок системи рівнянь (1), складений із перших n координат вектора $\widetilde{y}(t)$, загальний розв'язок системи рівнянь (1) отримаємо у вигляді

$$x(t) = X_{pn-s}(t)c + \widetilde{x}(t), \tag{26}$$

де c — довільний сталий $(pn - s)$-вимірний вектор.

Підсумовуючи наведені викладки, можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* $1^\circ - 4^\circ$, *то загальний розв'язок системи рівнянь* (1) *визначається формулою* (26), *де* $X_{pn-s}(t)$ — *прямокутна матриця розмірності* $n \times (pn - s)$, *складена з* $pn - s$ *лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, яка відповідає* (1) $(s = s_1 + s_2 + \ldots + s_r)$, c — *довільний сталий* $(pn-s)$-*вимірний вектор*; $\widetilde{x}(t)$ — *частинний розв'язок системи* (1).

Як показано при доведенні теореми 1, при виконанні її умов матриця $\widetilde{B}(t)$ має повний жорданів набір векторів відносно оператора $\widetilde{L}(t)$, що складається з r ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1, r}$. Тоді згідно з [2, с. 55], матриця $\widetilde{B}^*(t)$ матиме повний жорданів набір векторів відносно оператора $\widetilde{L}^*(t) = \widetilde{A}^*(t) + \dfrac{d}{dt}\widetilde{B}^*(t)$, що складається з r жорданових ланцюжків такої самої довжини. Це дозволяє довести наступне твердження.

Лема 2. *Якщо виконуються умови* 3°, 4°, *то спряжена матриця* $A_p^*(t)$ *має на відрізку* $[a; b]$ *повний жорданів набір векторів відносно операторів*

$$L_k^*(t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_{p-i}^{k-i} \frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}} A_{p-i}^*(t), \quad k = \overline{1, p}, \tag{27}$$

що складається з r *жорданових ланцюжків завдовжки* s_i, $i = \overline{1, r}$.

Доведення. Як зазначалося, при виконанні умов 3°, 4° матриця $\widetilde{B}^*(t)$ матиме повний жорданів набір векторів відносно оператора $\widetilde{L}^*(t) = \widetilde{A}^*(t) + \dfrac{d}{dt}\widetilde{B}^*(t)$, що складається з r ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1, r}$. Позначимо через $h_i^{(j)}(t) = \operatorname{col}\left[h_{i1}^{(j)}(t), h_{i2}^{(j)}(t), \ldots, h_{ip}^{(j)}(t)\right]$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, відповідні вектори цього набору. Зафіксуємо i. При виконанні умов 3°, 4° система

$$\widetilde{B}^*(t) h_i^{(2)}(t) = \widetilde{L}^*(t) h_i^{(1)}(t)$$

є сумісною. Згідно з (11), (12), (22) вона набирає вигляду

$$h_{ik}^{(2)}(t) = -A_{k-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t), \quad k = \overline{1, p-1}, \tag{28}$$

$$A_p^*(t) h_{ip}^{(2)}(t) + A_{p-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t) - \frac{d}{dt}(A_p^*(t)\psi_i^{(1)}(t)) = 0. \tag{29}$$

Додавши і віднявши у лівій частині рівняння (29) вектор $C_{p-1}^1 \dfrac{d}{dt}(A_p^*(t)\psi_i^{(1)}(t))$ і взявши до уваги (27), матимемо

$$A_p^*(t) h_{ip}^{(2)}(t) + L_1^*(t)\psi_i^{(1)}(t) = 0.$$

Отже,

$$\psi_i^{(2)}(t) = h_{ip}^{(2)}(t), \tag{30}$$

де $\psi_i^{(2)}(t)$ — перший приєднаний вектор i-го жорданового ланцюжка матриці $A_p^*(t)$ відносно операторів $L_k^*(t)$, $k = \overline{1, p}$.

Аналогічно визначаємо другий приєднаний вектор $\psi_i^{(3)}(t)$ цього ланцюжка. При виконанні умов 3°, 4° система

$$\widetilde{B}^*(t)h_i^{(3)}(t) = \widetilde{L}^*(t)h_i^{(2)}(t)$$

є сумісною. Згідно з (11), (12), (28), (30) цю систему можна записати у вигляді

$$h_{ik}^{(3)}(t) = -A_{k-2}^*(t)\psi_i^{(1)}(t) - A_{k-1}^*(t)\psi_i^{(2)}(t) - \frac{d}{dt}\left(A_{k-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right), \quad k = \overline{1, p-1}, \tag{31}$$

$$A_p^*(t)h_{ip}^{(3)}(t) + A_{p-2}^*(t)\psi_i^{(1)}(t) + A_{p-1}^*(t)\psi_i^{(2)}(t) - \frac{d}{dt}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(2)}(t)\right) = 0. \tag{32}$$

У рівності (32) послідовно виконаємо такі перетворення:

1) додамо і віднімемо вектор $C_{p-1}^1\dfrac{d}{dt}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(2)}(t)\right)$;

2) використавши формулу (27), в отриманій рівності виділимо доданок $L_1^*(t)\psi_i^{(2)}(t)$;

3) підставимо замість вектора $\dfrac{d}{dt}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(2)}(t)\right)$ рівний йому вектор $-\dfrac{d}{dt}\left(A_{p-1}^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right)+$ $+\dfrac{d^2}{dt^2}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right)$;

4) додамо і віднімемо вектор $C_{p-1}^2\dfrac{d^2}{dt^2}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(1)}(t)\right)$;

5) використавши (27), в отриманій рівності виділимо доданок $L_2^*(t)\psi_i^{(1)}(t)$.

В результаті рівність (32) набере вигляду

$$A_p^*h_{ip}^{(3)}(t) + L_1^*(t)\psi_i^{(2)}(t) + L_2^*(t)\psi_i^{(1)}(t) = 0,$$

звідки

$$\psi_i^{(3)}(t) = h_{ip}^{(3)}(t).$$

Продовживши цей процес, методом математичної індукції встановимо, що матриця $A_p^*(t)$ має на відрізку $[a;b]$ r жорданових ланцюжків завдовжки s_i, $i=\overline{1,r}$, відносно операторів $L_k^*(t)$, $k=\overline{1,p}$, вектори яких $\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, пов'язані з векторами $h_{ik}^{(j)}(t)$, $k=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, такими співвідношеннями:

$$h_{ik}^{(j)}(t) = -\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j-\alpha-2} C_{l+\alpha}^{\alpha}\frac{d^l}{dt^l}\left(A_{k-\alpha-1}^*(t)\psi_i^{(j-\alpha-l-1)}(t)\right), \quad k=\overline{1,p}, \tag{33}$$

$$\psi_i^{(j)}(t) = h_{ip}^{(j)}(t). \tag{34}$$

Покажемо, що цей жорданів набір є повним. Оскільки за умовою жорданів набір матриці $\widetilde{B}^*(t)$ відносно оператора $\widetilde{L}^*(t)$ повний, то

$$\det\left\|\left(L^*(t)h_i^{(s_i)}(t), g_j^{(1)}(t)\right)\right\|_1^r \neq 0 \quad \forall t\in[a;b],$$

звідки, враховуючи (11), (12), (15), (33), (34), маємо

$$\det\left\|\left(-A_{p-1}^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t) - \sum_{\alpha=0}^{p-2}\sum_{l=0}^{s_i-\alpha-2} C_{l+\alpha}^{\alpha}\frac{d^l}{dt^l}\left(A_{p-\alpha-2}^*(t)\psi_i^{(s_i-\alpha-l-1)}(t)\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{d}{dt}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t)\right), \varphi_j^{(1)}(t)\Bigg)\Bigg\|_1^r \neq 0 \quad \forall t \in [a;b]. \tag{35}$$

Виконаємо над виразом

$$-A_{p-1}^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t) - \sum_{\alpha=0}^{p-2}\sum_{l=0}^{s_i-\alpha-2} C_{l+\alpha}^{\alpha}\frac{d^l}{dt^l}\left(A_{p-\alpha-2}^*(t)\psi_i^{(s_i-\alpha-l-1)}(t)\right) + \frac{d}{dt}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t)\right)$$

у формулі (35) $p-1$ раз $(k=\overline{1,p-1})$ наступні перетворення:

1) додамо і віднімемо вектор $C_{p-1}^k\dfrac{d^k}{dt^k}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t)\right)$;
2) використавши формулу (27), виділимо доданок $L_k^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t)$;
3) замінимо в отриманому виразі вектор $\dfrac{d^k}{dt^k}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t)\right)$ на рівний йому вектор

$$-\frac{d^k}{dt^k}\left(A_{p-1}^*(t)\psi_i^{(s_i-k)}(t)\right) + \sum_{\alpha=0}^{p-2}\sum_{l=0}^{s_i-k-\alpha-2} C_{l+\alpha}^{\alpha}\frac{d^l}{dt^l}\left(A_{p-\alpha-2}^*(t)\psi_i^{(s_i-\alpha-l-1)}(t)\right) -$$

$$-\frac{d}{dt}\left(A_p^*(t)\psi_i^{(s_i-k)}(t)\right).$$

В результаті отримаємо

$$\det\left\|\left(\sum_{k=1}^{\min(s_i,p)} L_k^*(t)\psi_i^{(s_i+1-k)}(t), \varphi_j^{(1)}(t)\right)\right\|_1^r \neq 0 \quad \forall t \in [a;b],$$

звідки випливає, що жорданів набір матриці $A_p^*(t)$ відносно операторів $L_k^*(t)$, $k=\overline{1,p}$, є повним.

Лему доведено.

Розглянемо тепер для системи (1) задачу Коші з початковими умовами

$$\frac{d^k}{dt^k}x(t)\Big|_{t=t_0} = x_0^{(k)}, \quad k=\overline{0,p-1}. \tag{36}$$

Щоб знайти умови її розв'язності, розглянемо відповідну задачу Коші для еквівалентної системи (10) першого порядку з початковою умовою

$$y(t_0) = y_0, \tag{37}$$

де $y_0 = \operatorname{col}\left[x_0^{(0)},\ldots,x_0^{(k)},\ldots,x_0^{(p-1)}\right]$.

Згідно з теоремою 2.4 із [2, с. 67] для існування і єдиності розв'язку задачі (10), (37) необхідно і достатньо, щоб вектор y_0 задовольняв умову

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{d^i}{dt^i}\left(\widetilde{A}(t)y_0 + \widetilde{f}(t), h_j^{(k-i)}(t)\right)\Big|_{t=t_0} = 0, \qquad k=\overline{1,s_j}, \quad j=\overline{1,r}. \tag{38}$$

Виразимо цю умову через коефіцієнти вихідної системи (1), вектори $\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, та початкові вектори $x_0^{(k)}$, $k=\overline{0,p-1}$. Врахувавши (12), (13), (33), (34), (37), дістанемо

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{s=1}^{p-1}\sum_{\alpha=0}^{s-1}\sum_{l=0}^{k-i-\alpha-2} C_{l+\alpha}^{\alpha}\frac{d^{l+i}}{dt^{l+i}}\Big(A_{s-\alpha-1}(t)x_0^{(s)},\psi_j^{(k-i-\alpha-l-1)}(t)\Big)-$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{p-1}\frac{d^i}{dt^i}\Big(A_s(t)x_0^{(s)},\psi_j^{(k-i)}(t)\Big)\Big|_{t=t_0}=0, \qquad k=\overline{1,s_j}, \quad j=\overline{1,r}. \tag{39}$$

На підставі еквівалентності початкових задач (1), (36) та (10), (37) приходимо до такого твердження.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* $1^\circ - 4^\circ$, *то для того, щоб задача Коші* (1), (36) *мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб початкові вектори* $x_0^{(s)}$, $s=\overline{0,p-1}$, *задовольняли умову* (39), *де* $\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, — n*-вимірні вектори, що утворюють жорданів набір матриці* $A_p^*(t)$ *відносно операторів* $L_k^*(t)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_{p-i}^{k-i}\dfrac{d^{k-i}}{dt^{k-i}}A_{p-i}^*(t)$, $k=\overline{1,p}$. *При виконанні цієї умови розв'язок задачі* (1), (36) *буде єдиним.*

1. *Самойленко А. М., Яковець В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993. – № 4. – С. 10–15.
2. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 293 с.
3. *Яковець В. П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1278–1296.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Изд. 4-е, доп. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

Одержано 21.11.12