УДК 517.956

А. Т. Асанова
(Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

We consider a nonlocal boundary-value problem for a system of impulsive hyperbolic equations. Conditions for the existence of a unique solution of the problem are established by the method of functional parameters, and an algorithm for its determination is proposed.

Розглядається нелокальна крайова задача для системи гіперболічних рівнянь з імпульсним впливом. Методом уведення функціональних параметрів встановлено умови існування єдиного розв'язку досліджуваної задачі та запропоновано спосіб його знаходження.

Нелокальные краевые задачи для систем гиперболических уравнений исследовались многими авторами (см. [1 – 3] и приведенную в них библиографию). Наиболее изученными в теории нелокальных краевых задач являются периодические краевые задачи для уравнений в частных производных гиперболического типа [4 – 8]. Как известно, многие задачи теории автоматического управления, теории ядерных реакторов, динамических систем приводят к периодическим краевым задачам для дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. Всестороннее исследование периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями проводились в работах [9 – 12]. Вопросы существования периодических решений уравнений в частных производных гиперболического типа с импульсными воздействиями рассматривались в работах [13 – 15]. Одной из первых работ, посвященных изучению периодических решений систем гиперболических уравнений со смешанными производными, является статья [16]. В этой работе численно-аналитический метод [17, 18] развит для систем уравнений в частных производных гиперболического типа с импульсными воздействиями и установлены условия существования периодических по времени решений.

В работах [19 – 23] были исследованы вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от данных решения нелокальной краевой задачи с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. На основе метода введения функциональных параметров, являющегося обобщением метода параметризации [24, 25], были получены условия ее однозначной, корректной разрешимости в терминах коэффициентов системы и граничных матриц.

В настоящей работе метод введения функциональных параметров применяется к нелокальным краевым задачам для системы гиперболических уравнений с импульсными воздействиями. Построены алгоритмы нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи и установлены условия существования единственного решения в терминах исходных данных. Результаты работы были частично анонсированы на Украинском математическом конгрессе в 2009 г.

Рассматривается нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени на прямоугольнике $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \quad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0} + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} +$$

$$+ S_1(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=T} + S_0(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t_i-0,x)}{\partial x} = U_i(x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

где $u = \mathrm{col}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, $(n \times n)$-матрицы $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = \overline{0,2}$, $U_j(x)$, и n-вектор-функция $\varphi(x)$, $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,k}$, непрерывны на $[0,\omega]$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < T$,

$$\|u(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|, \qquad \|A(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|.$$

Решением задачи (1) – (4) будем называть кусочно-непрерывную на $\bar{\Omega}$ функцию $u(t,x)$, имеющую кусочно-непрерывные на $\bar{\Omega}$ частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}$, удовлетворяющую системе (1) при всех $(t,x) \in \Omega$, кроме линий $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, краевым условиям (2), (3) и условиям импульсного воздействия в фиксированные моменты времени (4).

Краевая задача (1) – (4) является нелокальной задачей: задается значение искомой функции на характеристике $x = 0$, даются линейная комбинация значений решения и его производных по x, t на характеристиках $t = 0$, $t = T$, а также условие возможных разрывов производной по x решения в фиксированные моменты времени — на характеристиках $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$. Такая постановка нелокальной краевой задачи исследуется впервые.

Для решения задачи (1) – (4) применяется метод введения функциональных параметров [19], разработанный для исследования и решения нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной. Суть метода заключается во введении дополнительных параметров в качестве значений искомого решения по переменной t в определенных линиях области Ω. Краевая задача для систем гиперболических уравнений сводится к эквивалентной многохарактеристической краевой задаче с функциональными параметрами, зависящими от x. Свойства решений и его частных производных переходят в свойства функциональных параметров. С помощью этого метода были получены коэффициентные условия однозначной разрешимости нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанными производными [19, 23]. Также на основе эквивалентности корректных разрешимостей краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений были установлены критерии корректной разрешимости рассматриваемой задачи [20–22].

В данной работе дополнительные параметры вводятся как значения искомой функции на характеристиках $t = t_i$, $i = \overline{0, k}$, $t_0 = 0$, $t_{k+1} = T$.

С помощью прямых $t = t_i$, $i = \overline{1, k}$, область Ω разбивается на подобласти $\Omega_r = [t_{r-1}, t_r) \times \times [0, \omega]$, $r = \overline{1, k+1}$. Через $u_r(t, x)$ обозначим сужение функции $u(t, x)$ на Ω_r, $r = \overline{1, k+1}$. Вводятся параметры $\mu_r(x) = u_r(t_{r-1}, x)$, $r = \overline{1, k+1}$, и задача (1)–(4) путем замены неизвестной функции $u(t, x) = \widetilde{u}_r(t, x) + \mu_r(x)$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, k+1}$, сводится к следующей эквивалентной многохарактеристической краевой задаче с параметрами:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}_r}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}_r}{\partial t} + C(t,x)\widetilde{u}_r + A(t,x)\dot{\mu}_r(x) +$$

$$+ C(t,x)\mu_r(x) + f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, k+1}, \tag{5}$$

$$\widetilde{u}_r(t_{r-1}, x) = 0, \quad r = \overline{1, k+1}, \tag{6}$$

$$\widetilde{u}_r(t, 0) = \psi(t) - \psi(t_{r-1}), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1, k+1}, \tag{7}$$

$$P_2(x)\dot{\mu}_1(x) + P_1(x)\frac{\partial \widetilde{u}_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + P_0(x)\mu_1(x) + S_2(x)\dot{\mu}_{k+1}(x) + S_2(x)\lim_{t \to T-0}\frac{\partial \widetilde{u}_{k+1}(t,x)}{\partial x} +$$

$$+ S_1(x)\lim_{t \to T-0}\frac{\partial \widetilde{u}_{k+1}(t,x)}{\partial t} + S_0(x)\mu_{k+1}(x) + S_0(x)\lim_{t \to T-0}\widetilde{u}_{k+1}(t,x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \tag{8}$$

$$\dot{\mu}_{i+1}(x) - \dot{\mu}_i(x) - \lim_{t \to t_i - 0}\frac{\partial \widetilde{u}_i(t,x)}{\partial x} = U_i(x)\dot{\mu}_{i+1}(x) + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, k}. \tag{9}$$

Решением задачи (5)–(9) является система пар $(\mu(x), \widetilde{u}([t], x))$ с элементами $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{k+1}(x))'$, $\widetilde{u}([t], x) = (\widetilde{u}_1(t, x), \widetilde{u}_2(t, x), \ldots, \widetilde{u}_{k+1}(t, x))'$, где функции $\widetilde{u}_r(t, x)$ непрерывны на Ω_r, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t \partial x}$ на Ω_r, $r = \overline{1, k+1}$, конечный левосторонний предел $\lim_{t \to t_r - 0} \dfrac{\partial \widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $r = \overline{1, k+1}$, а функции $\mu_r(x)$ непрерывно дифференцируемы по x на $[0, w]$, удовлетворяют системе гиперболических уравнений (5) и условиям (6)–(9).

Задачи (1)–(4) и (5)–(9) эквивалентны в том смысле, что если функция $u(t, x)$ является решением задачи (1)–(4), то система пар $(\mu(x), \widetilde{u}([t], x))$, где $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{k+1}(x))'$, $\widetilde{u}([t], x) = (\widetilde{u}_1(t, x), \widetilde{u}_2(t, x), \ldots, \widetilde{u}_{k+1}(t, x))'$, $u_r(t, x) = u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_r$, $r = \overline{1, k+1}$, $\lim_{t \to T-0} u_{k+1}(t, x) = u(T, x)$, $\mu_r(x) = u_r(t_{r-1}, x)$, $\widetilde{u}_r(t, x) = u_r(t, x) - u_r(t_{r-1}, x)$, $r = \overline{1, k+1}$, будет решением задачи (5)–(9), и наоборот, если $(\mu_r(x), \widetilde{u}_r(t, x))$, $r = \overline{1, k+1}$, — решение задачи (5)–(9), то функция $u(t, x)$, определяемая равенствами

$$u(t, x) = \mu_r(x) + \widetilde{u}_r(t, x), \quad (t, x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, k+1},$$

$$u(T,x)=\mu_{k+1}(x)+\lim_{t\to T-0}\widetilde{u}_{k+1}(t,x),$$

будет решением задачи (1) – (4).

В отличие от задачи (1) – (4) здесь появились начальные условия (6) в качестве значений неизвестной функции на характеристиках $t=t_{r-1}$, $r=\overline{1,k+1}$. При фиксированных $\mu_r(x),\dot{\mu}_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, являются решениями задачи Гурса на Ω_r с условиями (6), (7).

Введя обозначения $\widetilde{v}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}_r(t,x)=\dfrac{\partial\widetilde{u}_r(t,x)}{\partial t}$, из (6), (7) получим $\widetilde{v}_r(t_{r-1},x)=0$, $\widetilde{w}_r(t,0)=\dot{\psi}(t)$, и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений

$$\widetilde{w}_r(t,x)=\dot{\psi}(t)+\int\limits_0^x\Big[A(t,\xi)\widetilde{v}_r(t,\xi)+B(t,\xi)\widetilde{w}_r(t,\xi)+C(t,\xi)\widetilde{u}_r(t,\xi)+$$

$$+f(t,\xi)+A(t,\xi)\dot{\mu}_r(\xi)+C(t,\xi)\mu_r(\xi)\Big]d\xi, \tag{10}$$

$$\widetilde{v}_r(t,x)=\int\limits_{t_{r-1}}^t\Big[A(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x)+B(\tau,x)\widetilde{w}_r(\tau,x)+C(\tau,x)\widetilde{u}_r(\tau,x)+$$

$$+f(\tau,x)+A(\tau,x)\dot{\mu}_r(x)+C(\tau,x)\mu_r(x)\Big]d\tau, \tag{11}$$

$$\widetilde{u}_r(t,x)=\psi(t)-\psi(t_{r-1})+\int\limits_{t_{r-1}}^t d\tau\int\limits_0^x\Big[A(\tau,\xi)\widetilde{v}_r(\tau,\xi)+B(\tau,\xi)\widetilde{w}_r(\tau,\xi)+$$

$$+C(\tau,\xi)\widetilde{u}_r(\tau,\xi)+f(\tau,\xi)+A(\tau,\xi)\dot{\mu}_r(\xi)+C(\tau,\xi)\mu_r(\xi)\Big]d\xi. \tag{12}$$

Вместо $\widetilde{v}_r(\tau,x)$ подставим соответствующую правую часть (11) и, повторив этот процесс ν, $\nu=1,2,\ldots,$ раз, получим представление функции $\widetilde{v}_r(t,x)$:

$$\widetilde{v}_r(t,x)=G_{\nu r}(t,x,\widetilde{v}_r)+H_{\nu r}(t,x,\widetilde{u}_r,\widetilde{w}_r)+F_{\nu r}(t,x)+D_{\nu r}(t,x)\dot{\mu}_r(x)+E_{\nu r}(t,x)\mu_r(x), \tag{13}$$

где

$$G_{\nu r}(t,x,\widetilde{v}_r)=\int\limits_{t_{r-1}}^t A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A(\tau_\nu,x)\widetilde{v}_r(\tau_\nu,x)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$H_{\nu r}(t,x,\widetilde{u}_r,\widetilde{w}_r)=\int\limits_{t_{r-1}}^t\Big[B(\tau_1,x)\widetilde{w}_r(\tau_1,x)+C(\tau_1,x)\widetilde{u}_r(\tau_1,x)\Big]d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{t_{r-1}}^t A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\Big[B(\tau_\nu,x)\widetilde{w}_r(\tau_\nu,x)+C(\tau_\nu,x)\widetilde{u}_r(\tau_\nu,x)\Big]d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$F_{\nu r}(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} f(\tau_1,x)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu,x)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$D_{\nu r}(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu,x)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$E_{\nu r}(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} C(\tau_1,x)d\tau_1 + \ldots + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} C(\tau_\nu,x)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,$$

$$(t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,k+1}.$$

Переходя в правой части (13) к пределу при $t \to t_r - 0$, находим $\lim_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $r = \overline{1,k+1}$, $x\in[0,\omega]$. Подставляя их в (8), (9) для неизвестных вектор-функций $\mu_r(x)$, $r = \overline{1,k+1}$, получаем систему $k+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных:

$$Q_\nu(x)\dot{\mu}(x) = -E_\nu(x)\mu(x) - F_\nu(x) - H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w}) - G_\nu(x,\widetilde{v}), \tag{14}$$

где

$$Q_\nu(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} P_2(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 & S_2(x)[I + D_{\nu(k+1)}(T,x)] \\ -I - D_{\nu 1}(t_1,x) & I - U_1(x) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -I - D_{\nu 2}(t_2,x) & I - U_2(x) & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -I - D_{\nu k}(t_k,x) & I - U_k(x) \end{matrix} \right\|,$$

I — единичная матрица размерности $n\times n$,

$$E_\nu(x) = \left\| \begin{matrix} P_0(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 & S_0(x) + S_2(x)E_{\nu(k+1)}(T,x) \\ E_{\nu 1}(t_1,x) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & E_{\nu 2}(t_2,x) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E_{\nu k}(t_k,x) & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$F_\nu(x) = \big(S_2(x)F_{\nu(k+1)}(T,x) - \varphi(x), -F_{\nu 1}(t_1,x) - \varphi_1(x), \ldots, -F_{\nu k}(t_k,x) - \varphi_k(x)\big)',$$

$$H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w}) = \big(S_2(x)H_{\nu(k+1)}(T,x,\widetilde{u}_{k+1},\widetilde{w}_{k+1}) + P_1(x)\widetilde{w}_1(0,x) + S_1(x)\widetilde{w}_{k+1}(T,x) +$$

$$+ S_0(x)\widetilde{u}_{k+1}(T,x), -H_{\nu 1}(t_1,x,\widetilde{u}_1,\widetilde{w}_1), \ldots, -H_{\nu k}(t_k,x,\widetilde{u}_k,\widetilde{w}_k)\big)',$$

$$G_\nu(x,\widetilde{v}) = \big(S_2(x)G_{\nu(k+1)}(T,x,\widetilde{v}_{k+1}), -G_{\nu 1}(t_1,x,\widetilde{v}_1), \ldots, -G_{\nu k}(t_k,x,\widetilde{v}_k)\big)'.$$

Из условий согласования в точках $(t_{r-1},0)$, $r=\overline{1,k+1}$, следует

$$\lambda_r(0) = \psi(t_{r-1}), \quad r = \overline{1, k+1}. \tag{15}$$

Если известны функции $\mu_r(x)$, $\dot{\mu}_r(x)$, $r = \overline{1, k+1}$, то, решая систему интегральных уравнений (10) – (12), находим функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$ и из системы функций $(\mu_r(x) + \widetilde{u}_r(t,x))$ получаем решение исходной задачи. Если же известны функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$, то, решая уравнение (14) при условии (15), находим $\dot{\mu}_r(x)$ $\mu_r(x)$ и снова из системы функций $(\mu_r(x) + \widetilde{u}_r(t,x))$ получаем решение задачи (1) – (4).

Здесь неизвестными являются как функции $\mu_r(x)$, $\dot{\mu}_r(x)$, так и функции $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решение функциональных соотношений (10) – (12), (14) с условием (15) находится как пределы последовательностей $\{\mu_r^{(m)}(x)\}$, $\{\dot{\mu}_r^{(m)}(x)\}$, $\{\widetilde{u}_r^{(m)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{w}_r^{(m)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(m)}(t,x)\}$, определяемых по следующему алгоритму:

Шаг 0. Предполагая в правой части (14) $\mu_r(x) = \psi(t_{r-1}), \widetilde{u}_r(t,x) = \psi(t) - \psi(t_{r-1})$, $\widetilde{w}_r(t,x) = \dot{\psi}(t), \widetilde{v}_r(t,x) = 0$ и считая, что матрица $Q_\nu(x)$ обратима при всех $x \in [0,\omega]$, из уравнения (14) находим $\dot{\mu}_r^{(0)}(x)$, $r = \overline{1, k+1}$. Используя условия (15), получаем функции $\mu_r^{(0)}(x)$: $\mu_r^{(0)}(x) = \psi(t_{r-1}) + \int_0^x \dot{\mu}_r^{(0)}(\xi)d\xi$. Из системы интегральных уравнений (10) – (12), где $\mu_r(x) = \mu_r^{(0)}(x)$, $\dot{\mu}_r(x) = \dot{\mu}_r^{(0)}(x)$, определяем функции $\widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r = \overline{1, k+1}$.

Шаг 1. Из системы (14), где в правой части $\mu_r(x) = \mu_r^{(0)}(x)$, $\widetilde{u}_r(t,x) = \widetilde{u}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x) = \widetilde{w}_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x) = \widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r = \overline{1, k+1}$, в силу обратимости $Q_\nu(x)$ при $x \in [0,\omega]$ находим $\dot{\mu}_r^{(1)}(x)$, $r = \overline{1, k+1}$. Вновь используя условия (15), получаем $\mu_r^{(1)}(x)$: $\mu_r^{(1)}(x) = \psi(t_{r-1}) + \int_0^x \dot{\mu}_r^{(1)}(\xi)d\xi$. Из систем интегральных уравнений (10) – (12), где $\mu_r(x) = \mu_r^{(1)}(x)$, $\dot{\mu}_r(x) = \dot{\mu}_r^{(1)}(x)$, определяем функции $\widetilde{u}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(1)}(t,x)$, $r = \overline{1, k+1}$, и т. д.

Метод введения функциональных параметров процесс нахождения неизвестных функций разбивает на два этапа:

1) нахождение введенных функциональных параметров $\mu_r(x)$ $\dot{\mu}_r(x)$ из соотношения (14) с условием (15);

2) нахождение неизвестных функций $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$ из системы интегральных уравнений (10) – (12).

Условия следующего утверждения обеспечивают осуществимость предложенного алгоритма и однозначную разрешимость задачи (1) – (4).

Теорема 1. *Пусть при некотором* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(n(k+1) \times n(k+1))$-*матрица* $Q_\nu(x)$ *обратима при всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства*:

a) $\|[Q_\nu(x)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(x)$,

b) $q_\nu(x) = \gamma_\nu(x) \max\left(\|S_2(x)\|, \max_{i=\overline{1,k}} \|I - U_i(x)\|\right)\left[e^{\alpha(x)h} - 1 - \sum_{j=1}^{\nu} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right] \leq \chi < 1$, *где*

$\gamma_\nu(x)$ — *положительная, непрерывная по* $x \in [0,\omega]$ *функция,* $\alpha(x) = \max_{t\in[0,T]} \|A(t,x)\|$, $h = \max_{i=\overline{1,k+1}}(t_i - t_{i-1})$, χ — *константа.*

Тогда краевая задача с импульсным воздействием (1) – (4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. При предположениях относительно данных задачи имеют место неравенства

$$\|E_\nu(x)\| \leq \|P_0(x)\| + \|S_0(x)\| + \max\{\|S_2(x)\|, 1\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|,$$

$$\|F_\nu(x)\| \leq \|\varphi(x)\| + \max_{i=\overline{1,k}}\|\varphi_i(x)\| + \max\{\|S_2(x)\|, 1\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\max_{t\in[0,T]}\|f(t,x)\|,$$

$$\|H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w})\| \leq a_0(x)\max_{r=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[\|\widetilde{w}_r(t,x)\| + \|\widetilde{u}_r(t,x)\|\Big], \tag{16}$$

где

$$a_0(x) = \|P_1(x)\| + \|S_1(x)\| + \|S_0(x)\| + \max\{\|S_2(x)\|, 1\}h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\times$$

$$\times\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\|, \max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|\right\}.$$

Пусть $\tilde{C}(\Omega_r, R^n)$ — множество непрерывных и ограниченных на Ω_r функций $\widetilde{u}_r\colon \Omega_r \to R^n$.

В силу условия а) при фиксированных $\mu_r(x)$, $\widetilde{u}_r(t,x)$, $\widetilde{w}_r(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, система функций $\dot{\mu}_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, определяется единственным образом из системы уравнений (14) и

$$\dot{\mu}(x) = -[Q_\nu(x)]^{-1}\big\{E_\nu(x)\mu(x) + F_\nu(x) + H_\nu(x,\widetilde{u},\widetilde{w}) + G_\nu(x,\widetilde{v})\big\}, \quad x\in[0,\omega], \quad \mu\in R^{n(k+1)}.$$

Для любого r, $r=\overline{1,k+1}$, при фиксированных $\mu_r(x)\in C([0,\omega],R^n)$, $\dot{\mu}_r(x)\in C([0,\omega],R^n)$ система интегральных уравнений (10)–(12) имеет единственное решение $\{\widetilde{u}_r(t,x), \widetilde{w}_r(t,x), \widetilde{v}_r(t,x)\}$, где $\widetilde{u}_r$, $\widetilde{w}_r$,$\widetilde{v}_r$ принадлежат $\tilde{C}(\Omega_r,R^n)$ и справедливы оценки

$$\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\widetilde{v}_r(t,x)\| \leq \Big[e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})} - 1\Big]\|\dot{\mu}_r(x)\| +$$

$$+(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}\left\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|f(t,x)\| + \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|C(t,x)\|\|\mu_r(x)\| +\right.$$

$$\left.+\max\left(\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|B(t,x)\|, \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|C(t,x)\|\right)\right\}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[\|\widetilde{u}_r(t,x)\| + \|\widetilde{w}_r(t,x)\|\Big], \tag{17}$$

$$\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[\|\widetilde{u}_r(t,x)\| + \|\widetilde{w}_r(t,x)\|\Big] \leq \left\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\psi(t) - \psi(t_{r-1})\| +\right.$$

$$+\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|\dot{\psi}(t)\| + (1+t_r-t_{r-1})\int_0^x\Big[1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}\Big]\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|f(t,\xi)\|d\xi +$$

$$+(1+t_r-t_{r-1})\int_0^x\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}\|\dot{\mu}_r(\xi)\|d\xi + (1+t_r-t_{r-1})\times$$

$$\times \int\limits_0^x \Big[1 + \alpha(\xi)(t_r - t_{r-1}) e^{\alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})}\Big] \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|C(t,\xi)\| \|\mu_r(\xi)\| d\xi \Bigg\} \times$$

$$\times \exp\Bigg\{(1 + t_r - t_{r-1}) \int\limits_0^x \Big[1 + \alpha(\xi)(t_r - t_{r-1}) e^{\alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})}\Big] \times$$

$$\times \max\Bigg\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|B(t,\xi)\|, \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|C(t,\xi)\|\Bigg\} d\xi \Bigg\}. \qquad (18)$$

Из нулевого и первого шага построенного выше алгоритма следуют оценки

$$\max_{r=\overline{1,k+1}} \|\dot\mu_r^{(0)}(x)\| \le \gamma_\nu(x) \Bigg(\|E_\nu(x)\| \max_{r=\overline{1,k+1}} \|\psi(t_{r-1})\| + \|F_\nu(x)\| +$$

$$+ a_0(x) \max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \Big[\|\dot\psi(t)\| + \|\psi(t) - \psi(t_{r-1})\|\Big]\Bigg) = d_1(x),$$

$$\max_{r=\overline{1,k+1}} \|\mu_r^{(0)}(x) - \psi(t_{r-1})\| \le \int\limits_0^x d_1(\xi) d\xi = d_2(x),$$

$$\max_{r=\overline{1,k+1}} \|\dot\mu_r^{(1)}(x) - \dot\mu_r^{(0)}(x)\| \le \gamma_\nu(x) \|E_\nu(x)\| d_2(x) + \chi d_2(x) +$$

$$+ \gamma_\nu(x) \Big[e^{b_1(x)} a_0(x) + a_1(x)\Big] \max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \Big[\|\dot\psi(t)\| + \|\psi(t) - \psi(t_{r-1})\|\Big] +$$

$$+ \gamma_\nu(x) \Bigg[a_2(x) e^{b_1(x)} (1+h) \int\limits_0^x \Big(1 + \alpha(\xi) h e^{\alpha(\xi)h}\Big) \max_{t\in[0,T]} \|f(t,\xi)\| d\xi +$$

$$+ a_1(x) \max_{t\in[0,T]} \|f(t,x)\|\Bigg] + \gamma_\nu(x) e^{b_1(x)} \Big[(1+h) a_2(x) b_2(x) + a_1(x) \max_{t\in[0,T]} \|C(t,x)\|\Big] \times$$

$$\times \Bigg(\max_{r=\overline{1,k+1}} \|\psi(t_{r-1})\| + \int\limits_0^x \|d_2(\xi)\| d\xi \Bigg) = d(x),$$

где

$$a_1(x) = h \max(\|S_2(x)\|, 1) \left[e^{\alpha(x)h} - 1 - \ldots - \frac{(\alpha(x)h)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\right],$$

$$a_2(x) = \|P_1(x)\| + \|S_1(x)\| + \|S_0(x)\| +$$

$$+ \max\{\|S_2(x)\|, 1\} h e^{\alpha(x)h} a_0(x) \max\left[\max_{t\in[0,T]} \|B(t,x)\|, \max_{t\in[0,T]} \|C(t,x)\|\right],$$

$$b_1(x) = \int\limits_0^x [1 + \alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})}] \max \left[\max_{t\in[0,T]} \|B(t,\xi)\|, \max_{t\in[0,T]} \|C(t,\xi)\| \right] d\xi.$$

Из интегрального уравнения (11) с помощью неравенства Беллмана – Гронуолла для разностей последовательных приближений $\widetilde{v}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{v}_r^{(m-1)}(t,x)$ получаем оценку

$$\|\widetilde{v}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{v}_r^{(m-1)}(t,x)\| \leq \left[e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})} - 1\right] \|\dot{\mu}_r^{(m)}(x) - \dot{\mu}_r^{(m-1)}(x)\| +$$

$$+(t - t_{r-1})e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})} \Bigg(\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \max\{\|B(t,x)\|, \|C(t,x)\|\} \times$$

$$\times \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \left[\|\widetilde{w}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{w}_r^{(m-1)}(t,x)\| + \|\widetilde{u}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{u}_r^{(m-1)}(t,x)\| \right] +$$

$$+ \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|C(t,x)\| \|\mu_r^{(m)}(x) - \mu_r^{(m-1)}(x)\| \Bigg), \quad r = \overline{1, k+1}. \tag{19}$$

Для разностей последовательных приближений $\mu_r^{(m)}(x) - \mu_r^{(m-1)}(x)$, $\widetilde{u}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{u}_r^{(m-1)}(t,x)$, $\widetilde{w}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{w}_r^{(m-1)}(t,x)$, $r = \overline{1, k+1}$, $m = 1, 2, \ldots$, с учетом неравенств (17) – (19) справедливы оценки

$$\|\mu_r^{(m)}(x) - \mu_r^{(m-1)}(x)\| \leq \int\limits_0^x \|\dot{\mu}_r^{(m)}(\xi) - \dot{\mu}_r^{(m-1)}(\xi)\| d\xi, \tag{20}$$

$$\max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \left[\|\widetilde{w}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{w}_r^{(m-1)}(t,x)\| + \|\widetilde{u}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{u}_r^{(m-1)}(t,x)\| \right] \leq$$

$$\leq \int\limits_0^x b_2(\xi,x) \max_{r=\overline{1,k+1}} \|\dot{\mu}_r^{(m)}(\xi) - \dot{\mu}_r^{(m-1)}(\xi)\| d\xi, \tag{21}$$

где

$$b_2(\xi,x) = e^{b_1(x)}(1 + t_r - t_{r-1}) \left[\alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})} + b_3(x) \right],$$

$$b_3(x) = \int\limits_0^x \left[1 + \alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r - t_{r-1})} \right] \max_{t\in[0,T]} \|C(t,\xi)\| d\xi.$$

Отсюда следует

$$\|\widetilde{v}_r^{(m)}(t,x) - \widetilde{v}_r^{(m-1)}(t,x)\| \leq \left[e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})} - 1\right] \|\dot{\mu}_r^{(m)}(x) - \dot{\mu}_r^{(m-1)}(x)\| +$$

$$+(t - t_{r-1})e^{\alpha(x)(t-t_{r-1})} \int\limits_0^x \left[\max\left\{ \max_{t\in[0,T]} \|B(t,x)\|, \max_{t\in[0,T]} \|C(t,x)\| \right\} b_2(\xi,x) + \right.$$

$$+\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|\Big]\,\|\dot{\mu}_r^{(m)}(\xi)-\dot{\mu}_r^{(m-1)}(\xi)\|d\xi.$$

Тогда для разности $\dot{\mu}_r^{(m+1)}(x)-\dot{\mu}_r^{(m)}(x)$, учитывая оценку (16), имеем

$$\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^{(m+1)}(x)-\dot{\mu}_r^{(m)}(x)\|\le\|[Q_\nu(x)]^{-1}\|\left[\|E_\nu(x)\|\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\mu_r^{(m)}(x)-\mu_r^{(m-1)}(x)\|+\right.$$

$$+a_0(x)\max_{r=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[\|\widetilde{w}_r^{(m)}(t,x)-\widetilde{w}_r^{(m-1)}(t,x)\|+\|\widetilde{u}_r^{(m)}(t,x)-\widetilde{u}_r^{(m-1)}(t,x)\|\Big]+$$

$$+\max\left(\|S_2(x)\|,\max_{i=\overline{1,k}}\|I-U_i(x)\|\right)\times$$

$$\left.\times\max_{r=\overline{1,k+1}}\left\{\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}\alpha(x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}\alpha(x)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\alpha(x)\|\widetilde{v}_r^{(m)}(\tau_\nu,x)-\widetilde{v}_r^{(m-1)}(\tau_\nu,x)\|d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1\right\}\right].$$

Подставляя сюда (18) и вычисляя повторные интегралы, а также принимая во внимание оценки (20), (21), получаем

$$\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^{(m+1)}(x)-\dot{\mu}_r^{(m)}(x)\|\le\chi\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^{(m)}(x)-\dot{\mu}_r^{(m-1)}(x)\|+$$

$$+\int\limits_0^x a_3(\xi,x)\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^{(m)}(\xi)-\dot{\mu}_r^{(m-1)}(\xi)\|d\xi, \tag{22}$$

где

$$a_3(\xi,x)=\gamma_\nu(x)\left\{\max\{\|S_2(x)\|,\max_{i=\overline{1,k}}\|I-U_i(x)\|\}h\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}+\right.$$

$$+a_0(x)b_0(\xi,x)+\max\left\{\|S_2(x)\|,\max_{i=\overline{1,k}}\|I-U_i(x)\|\right\}h\left(e^{\alpha(x)h}-\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right)\left[\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|+\right.$$

$$\left.\left.+\max\left\{\max_{t\in[0,T]}\|B(t,x)\|,\max_{t\in[0,T]}\|C(t,x)\|\right\}a_0(\xi,x)\right]\right\}.$$

Для функции $\Lambda_m(x)=\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^{(m+1)}(x)-\dot{\mu}_r^{(m)}(x)\|$ на основе (22) установим неравенство

$$\Lambda_m(x)\le\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{(m-j)!j!}\chi^{m-j}\frac{1}{j!}\left(\int\limits_0^x a_3(\xi,x)d\xi\right)^j\max_{x\in[0,\omega]}d(x)\le$$

$$\leq \chi^m \sum_{j=0}^{m} \frac{m!}{(m-j)!j!} \frac{1}{j!} \left(\frac{\tilde{a}_3}{\chi}\right)^j \tilde{d}, \tag{23}$$

где $\tilde{a}_3 = \max_{x\in[0,\omega]} \int_0^x a_3(\xi,x)d\xi$, $\tilde{d} = \max_{x\in[0,\omega]} d(x)$. Поскольку $\chi \in (0,1)$, выберем число $\theta \in (0,(1-\chi)/\chi)$ и рассмотрим последовательность $z_m = \dfrac{1}{m!}\left(\dfrac{\tilde{b}_1}{\theta\chi}\right)^m$. Несложно проверить, что $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$, т. е. $z^* = 0$. Согласно следствию теоремы Теплица из теории пределов, отсюда следует, что $\tilde{z}_m = \dfrac{1}{(1+\theta)^m}\sum_{j=0}^m \dfrac{m!}{(m-j)!j!}\theta^j z_j \to 0$ при $m\to\infty$. Тогда существует число $d_3 > 0$, ограничивающее последовательность $\tilde{z}_k$, и из (23) получаем основную оценку $\Lambda_m(x) \leq \chi^m(1+\theta)^m\tilde{z}_m\tilde{d} \leq \chi_1^m\tilde{d}d_3$, где $\chi_1 = \chi(1+\theta) < 1$, т. е. последовательность $\{\Lambda_m(x)\}$ мажорируется геометрической прогрессией. Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum_{m=1}^\infty \Lambda_m(x)$ при $x\in[0,\omega]$, обеспечивающая равномерную сходимость последовательности $\{\dot{\mu}_r^{(m)}(x)\}$ к непрерывной на $x\in[0,\omega]$ функции $\dot{\mu}_r^*(x)$ при всех $r=\overline{1,k+1}$. Из неравенства (20) вытекает равномерная сходимость последовательности $\{\mu_r^{(m)}(x)\}$ к функции $\mu_r^*(x)\in C([0,\omega],R^n)$. На основе оценок (21), (19) следует равномерная относительно $(t,x)\in\Omega_r$ сходимость последовательностей $\{\widetilde{u}_r^{(m)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{w}_r^{(m)}(t,x)\}$, $\{\widetilde{v}_r^{(m)}(t,x)\}$, $r=\overline{1,k+1}$, соответственно к функциям $\widetilde{u}_r^*(t,x)$, $\widetilde{w}_r^*(t,x)$, $\widetilde{v}_r^*(t,x)$, принадлежащим $\tilde{C}(\Omega_r,R^n)$. Очевидно, что функция $u^*(t,x)$, получаемая из систем функций $(\mu_r^*(x)+\widetilde{u}_r^*(t,x))$, является решением задачи (1)–(4).

Докажем единственность решения задачи (1)–(4). Пусть существуют два решения $u^*(t,x)$ и $u^{**}(t,x)$. Тогда соответствующие им системы пар $(\mu_r^*(x),\widetilde{u}_r^*(t,x))$, $(\mu_r^{**}(x),\widetilde{u}_r^{**}(t,x))$, $r=\overline{1,k+1}$, будут решениями многохарактеристической краевой задачи с параметрами (5)–(9). Функции $\mu_r^*(x)$, $\mu_r^{**}(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, удовлетворяют системам

$$\dot{\mu}^*(x) = -[Q_\nu(x)]^{-1}\Big\{E_\nu(x)\mu^*(x) + F_\nu(x) + H_\nu(x,\widetilde{u}^*,\widetilde{w}^*) + G_\nu(x,\widetilde{v}^*)\Big\}, \tag{24}$$

$$\dot{\mu}^{**}(x) = -[Q_\nu(x)]^{-1}\Big\{E_\nu(x)\dot{\mu}^{**}(x) + F_\nu(x) + H_\nu(x,\widetilde{u}^{**},\widetilde{w}^{**}) + G_\nu(x,\widetilde{v}^{**})\Big\}. \tag{25}$$

Аналогично (17), (18) из системы интегральных уравнений (10)–(12) получаем

$$\sup_{t\in[r-1,t_r)}\|\widetilde{v}_r^*(t,x)-\widetilde{v}_r^{**}(t,x)\| \leq \Big[e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}-1\Big]\|\dot{\mu}_r^*(x)-\dot{\mu}_r^{**}(x)\|+$$

$$+(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|C(t,x)\|\|\mu_r^*(x)-\mu_r^{**}(x)\|+$$

$$+(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(x)(t_r-t_{r-1})}\max\left\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|B(t,x)\|,\ \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|C(t,x)\|\right\}\times$$

$$\times\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[\|\widetilde{u}_r^*(t,x)-\widetilde{u}_r^{**}(t,x)\|+\|\widetilde{w}_r^*(t,x)-\widetilde{w}_r^{**}(t,x)\|\Big],$$

$$\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\Big[\|\widetilde{u}_r^*(t,x)-\widetilde{u}_r^{**}(t,x)\|+\|\widetilde{w}_r^*(t,x)-\widetilde{w}_r^{**}(t,x)\|\Big] \leq$$

$$\leq \left\{(1+t_r-t_{r-1})\int\limits_0^x \alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}\|\dot{\mu}_r^*(\xi)-\dot{\mu}_r^{**}(\xi)\|d\xi+\right.$$

$$\left.+(1+t_r-t_{r-1})\int\limits_0^x \left[1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})}\right]\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|C(t,\xi)\|\|\mu_r^*(\xi)-\mu_r^{**}(\xi)\|d\xi\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\int\limits_0^x (1+\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})e^{\alpha(\xi)(t_r-t_{r-1})})\max\left\{\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|B(t,\xi)\|,\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|C(t,\xi)\|\right\}d\xi\right\}.$$

Аналогично (20), (21) имеем

$$\|\mu_r^*(x)-\mu_r^{**}(x)\|\leq\int\limits_0^x \|\dot{\mu}_r^*(\xi)-\dot{\mu}_r^{**}(\xi)\|d\xi,$$

$$\max_{r=\overline{1,k+1}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\left[\|\widetilde{u}_r^*(t,x)-\widetilde{u}_r^{**}(t,x)\|+\|\widetilde{w}_r^*(t,x)-\widetilde{w}_r^{**}(t,x)\|\right]\leq$$

$$\leq\int\limits_0^x b_2(\xi,x)\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^*(\xi)-\dot{\mu}_r^{**}(\xi)\|d\xi. \qquad (26)$$

Тогда из систем (24), (25) для разностей $\dot{\mu}_r^*(x)-\dot{\mu}_r^{**}(x)$ следует оценка

$$\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^*(x)-\dot{\mu}_r^{**}(x)\|\leq\chi\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^*(x)-\dot{\mu}_r^{**}(x)\|+\int\limits_0^x a_3(\xi,x)\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^*(\xi)-\dot{\mu}_r^{**}(\xi)\|d\xi,$$

откуда

$$\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^*(x)-\dot{\mu}_r^{**}(x)\|\leq\frac{1}{1-\chi}\int\limits_0^x \bar{a}_3(\xi)\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^*(\xi)-\dot{\mu}_r^{**}(\xi)\|d\xi, \qquad (27)$$

где $\bar{a}_3(\xi)=\max_{x\in[0,\omega]}a_3(\xi,x)$.

Из (27) с помощью неравенства Гронуолла – Беллмана получаем $\max_{r=\overline{1,k+1}}\|\dot{\mu}_r^*(x)-\dot{\mu}_r^{**}(x)\|=0$. В силу соотношений $\mu_r^*(x)=\psi(t_{r-1})+\int_0^x\dot{\mu}_r^*(\xi)d\xi$, $\mu_r^{**}(x)=\psi(t_{r-1})+\int_0^x\dot{\mu}_r^{**}(\xi)d\xi$ имеем $\mu_r^*(x)=\mu_r^{**}(x)$, $r=\overline{1,k+1}$. Тогда из неравенства (26) следует, что $\widetilde{u}_r^*(t,x)=\widetilde{u}_r^{**}(t,x)$ при всех $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, и $u^*(t,x)=u^{**}(t,x)$.

Теорема доказана.

Основным условием однозначной разрешимости исследуемой задачи является существование числа $\nu\in\mathbb{N}$, при котором матрица $Q_\nu(x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$. Поскольку $(n(k+1)\times n(k+1))$-матрица $Q_\nu(x)$ имеет специальную блочно-ленточную структуру, то справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть матрицы* $I - U_i(x)$ (*или* $I + D_{\nu i}(t_i, x)$), $i = \overline{1,k}$, *обратимы для всех* $x \in [0, \omega]$. $(n(k+1) \times n(k+1))$-*Матрица* $Q_\nu(x)$ *при* $x \in [0, \omega]$ *обратима тогда и только тогда, когда обратима* $(n \times n)$-*матрица*

$$M_\nu(x) = P_2(x) + S_2(x)[I + D_{\nu(k+1)}(T, x)] \prod_{s=k}^{1} [I - U_s(x)]^{-1}[I + D_{\nu s}(t_s, x)]$$

$$\left(\text{или} \quad L_\nu(x) = P_2(x) \prod_{s=1}^{k} [I + D_{\nu s}(t_s, x)]^{-1}[I - U_s(x)] + S_2(x)[I + D_{\nu(k+1)}(T, x)]\right).$$

Лемма 2. *Если матрица* $M_\nu(x)$ (*или* $L_\nu(x)$) *обратима, то* $[Q_\nu(x)]^{-1} = \{g_{ij}(x)\}$, $i, j = \overline{1, k+1}$, *где*

$$g_{11}(x) = M_\nu^{-1}(x),$$

$$g_{1l}(x) = -M_\nu^{-1}(x) S_2(x) \prod_{s=k}^{l-1} [I + D_{\nu s}(t_s, x)][I - U_s(x)]^{-1}, \quad 1 < l \le k+1,$$

$$g_{rl}(x) = [I - U_{r-1}(x)]^{-1}[I + D_{\nu, r-1}(t_{r-1}, x)] g_{r-1,l}(x), \quad l \ne r,$$

$$g_{rr}(x) = [I - U_{r-1}(x)]^{-1}[I + D_{\nu, r-1}(t_{r-1}, x)] g_{r-1,r}(x) + [I - U_{r-1}(x)]^{-1}, \ \ r = 2, 3, \ldots, k+1,$$

$$\Bigg(\text{или} \quad g_{k+1,1}(x) = L_\nu^{-1}(x),$$

$$g_{k+1,l}(x) = L_\nu^{-1}(x)(-1)^l \prod_{s=1}^{l-1} [I + D_{\nu s}(t_s, x)]^{-1}, \quad 1 < l \le k+1,$$

$$g_{rl}(x) = -[I + D_{\nu, r}(t_r, x)]^{-1}[I - U_r(x)] g_{r+1,l}(x), \quad l \ne r+1,$$

$$g_{r,r+1}(x) = -[I + D_{\nu, r}(t_r, x)]^{-1}[I - U_r(x)] g_{r+1,r}(x) - [I + D_{\nu, r}(t_r, x)]^{-1}, \quad r = 1, 3, \ldots, k\Bigg).$$

Из леммы 1 следует, что достаточно проверить обратимость матриц $I - U_i(x)$ (или $I + D_{\nu i}(t_i, x)$), $i = \overline{1,k}$, размерности которых совпадают с размерностью исходной системы. Если матрицы $I - U_i(x)$ (или $I + D_{\nu i}(t_i, x)$), $i = \overline{1,k}$, обратимы, то можно найти их обратные и получить оценку. Как видно из рекуррентных формул леммы 2, величина $\gamma_\nu(x)$ вычисляется через обратные матриц $I - U_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, и нормы матриц $S_2(x)$, $[I + D_{\nu s}(t_s, x)]$, $s = \overline{1,k}$ (или через обратные матриц $I + D_{\nu i}(t_i, x)$, $i = \overline{1,k}$, и нормы матриц $[I - U_s(x)]$, $s = \overline{1,k}$).

Таким образом, теорема дает достаточные условия существования единственного решения задачи (1)–(4) в терминах исходных данных: коэффициентной матрицы $A(t, x)$, граничных матриц $S_2(x)$, $P_2(x)$, матриц импульсного воздействия $U_i(x)$ и линий возможных разрывов $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$.

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
3. *Kiguradze T.* Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 1 – 144.
4. *Cesari L.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Proc. Int. Symp. Nonlinear Vibrations (Kiev, 1961). – Kiev: Izd. Akad. Nauk Ukr. SSR, 1963. – **2**. – P. 440 – 457.
5. *Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V. et al.* Partial differential equations: time-periodic solutions. – Prague etc.: Martinus Nijhoff Publ., 1982. – 358 p.
6. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
7. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. – М.: Наука, 1998. – 191 с.
8. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Периодические и ограниченные на плоскости решения систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 562 – 572.
9. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
10. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. – New York etc.: Halsted Press,1989. – 345 p.
11. *Hu S., Lakshmikantham V.* Periodic boundary value problems for second order impulsive differential systems // Nonlinear Anal. – 1989. – **13**, № 1. – P. 75 – 85.
12. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 434 p.
13. *Rogovchenko S. P.* Periodic solutions for hyperbolic impulsive systems (in Russian). – Kiev, 1988. – 20 p. – (Preprint/ Ukr. Acad. Sci. Inst. Math. № 88.3).
14. *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with pulse influense // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 4. – P. 601 – 605.
15. *Bainov D. D., Minchev E., Myshkis A.* Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems // Commun. Appl. Anal. – 1997. – **1**, № 4. – P. 1 – 14.
16. *Tkach A. B.* Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial differential equations with pulse influence // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 2. – P. 278 – 288.
17. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 16 – 23.
18. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 2. – С. 9 – 18.
19. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 10. – С. 1343 – 1354.
20. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Докл. РАН. – 2003. – **391**, № 3. – С. 295 – 297.
21. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений //Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 3. – С. 337 – 446.
22. *Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.* Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 7 – 11.
23. *Asanova A. T.* On a boundary-value problem with data on non-characteristic intersecting lines for a system of hyperbolic equations with mixed derivative // Nonlinear Oscillations. – 2012. – **15**, № 1. – P. 3 – 12.
24. *Джумабаев Д. С.* Метод параметризации решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. АН КазССР. – 1988. – № 1. – С. 48 – 52.
25. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50 – 66.

Получено 03.09.12