УДК 517.925.5:519.216

Г. Т. Ибраева, М. И. Тлеубергенов
(Ин-т математики М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

ОБ ОСНОВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ДИФФУЗИЕЙ

Using the separation method, we obtain sufficient conditions for the solvability of the main (according to Galiullin's classification) inverse problem in the class of first-order Itô stochastic differential systems with random perturbations from the class of Wiener processes and with diffusion degenerate in a part of variables.

Методом відокремлення отримано достатні умови розв'язності основної за класифікацією А. С. Галіулліна оберненої задачі у класі стохастичних диференціальних систем Іто першого порядку з випадковими збуреннями з класу вінерових процесів і вироджуваною щодо частини змінних дифузією.

Введение. Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1 – 3] для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе [1] построено множество ОДУ, которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа впоследствии оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2, 3] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ — метод квазиобращения, предложенный в работе [3], позволяет получить необходимые и достаточные условия разрешимости. Наряду с указанным методом там же предлагаются метод разделения и метод проектирования, дающие, вообще говоря, лишь достаточные условия разрешимости обратных задач, полезные для конкретных прикладных обратных задач.

Но повышение требований к точности и работоспособности материальных систем приводит к ситуации, когда многие наблюдаемые явления уже не могут быть объяснены с позиции детерминированных процессов. Это обстоятельство требует, в частности, привлечения вероятностных законов для моделирования поведения реальных систем.

Поэтому важной представляется задача обобщения методов решения обратных задач дифференциальных систем на класс стохастических дифференциальных уравнений [4, 5].

Стохастическими дифференциальными уравнениями типа Ито описываются многочисленные и важные в приложении модели механических систем, учитывающие воздействие внешних случайных сил: например, движение искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил [6] или флуктуационный дрейф тяжелого гироскопа в кардановом подвесе [7] и многие другие.

В работах [8 – 10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены: 1) *основная обратная задача динамики* — построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, имеющих заданное интегральное многообразие; 2) *задача восстановления уравнений движения* — построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию и 3) *задача замыкания уравнений движения* — построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

1. Постановка задачи. Общая задача построения стохастических уравнений. Пусть задано множество

$$\Lambda(t): \lambda(y,z,t)=0, \qquad \text{где} \quad \lambda\in R^m, \qquad \lambda=\lambda(y,z,t)\in C^{121}_{yzt}. \tag{1}$$

Требуется построить уравнение движения в классе систем стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка вида

$$\begin{aligned}\dot y &= f_1(y,z,t),\\ \dot z &= f_2(y,z,t)+\sigma(y,z,t)\dot\xi\end{aligned} \tag{2}$$

так, чтобы множество (1) было интегральным многообразием системы уравнений (2). Здесь $y\in R^l$, $z\in R^p$, $l+p=n$; $\xi\in R^k$, $\sigma(y,z,t)$ — матрица размерности $p\times k$, $\big\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\big\}$ — система независимых винеровских процессов.

Будем говорить, что некоторая функция $g(x,t)$ принадлежит классу K, $g\in K$, если g непрерывна по t, $t\in[0,\infty]$, липшицева по x во всем пространстве $x=(y^T,z^T)^T\in R^n$,

$$\|g(x,t)-g(\widetilde x,t)\|\le B\|x-\widetilde x\| \tag{3$'$}$$

и удовлетворяет условию линейного роста по x

$$\|g(x,t)\|\le B(1+\|x\|) \tag{3$''$}$$

с некоторой постоянной B.

Предполагается, что вектор-функции f_1, f_2 и $(p\times k)$-матрица σ принадлежат классу K, что обеспечивает в произвольной окрестности множества (1) существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $\big(y(t)^T,z(t)^T\big)^T$ системы уравнений (2) с начальным условием $\big(y(t_0)^T,z(t_0)^T\big)^T=(y_0^T,z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [4, с. 107].

Поставленная задача:

1) в случае отсутствия случайных возмущений $(\sigma\equiv 0)$ достаточно полно исследована в работах [2, 3];

2) обобщает рассмотренную в [8] задачу построения стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot x = f(x,\dot x,t)+\sigma(x,\dot x,t)\dot\xi \tag{2$'$}$$

по заданному множеству

$$\Lambda(t):\ \lambda(x,\dot x,t)=0, \qquad \text{где} \quad \lambda\in R^m, \qquad \lambda=\lambda(x,\dot x,t)\in C^{121}_{x\dot x t}, \tag{1$'$}$$

так, чтобы множество ($1'$) было интегральным многообразием уравнения ($2'$).

В данной работе основная обратная задача при наличии случайных возмущений — задача построения стохастического дифференциального уравнения первого порядка типа Ито по заданным свойствам движения — решается методом разделения. В терминах коэффициентов получены достаточные условия существования заданного интегрального многообразия у построенного множества уравнений.

Для решения поставленной задачи построения системы уравнений (2) по заданному интегральному многообразию (1) по правилу Ито дифференцирования сложной функции [11, с. 201] $\lambda = \lambda(y, z, t)$ в случае винеровского процесса имеем

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + S + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma \dot{\xi}, \tag{4}$$

где $S = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z} : \sigma \sigma^T$, а под $\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z} : D$, следуя [11], понимается вектор, элементами которого являются следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y, z, t)$ вектора $\lambda(y, z, t)$ по компонентам z на матрицу D

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z} : D = \begin{bmatrix} \operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z \partial z} D \right) \\ \vdots \\ \operatorname{tr}\left(\dfrac{\partial^2 \lambda_m}{\partial z \partial z} D \right) \end{bmatrix},$$

и вводятся произвольные типа Н. П. Еругина [1] m-мерная вектор-функция и $(m \times k)$-матрица B, имеющие свойство $A(0, y, z, t) \equiv 0$, $B(0, y, z, t) \equiv 0$:

$$\dot{\lambda} = A(\lambda, y, z, t) + B(\lambda, y, z, t) \dot{\xi}. \tag{5}$$

Сравнивая уравнения (4) и (5), приходим к соотношениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial z} f_2 + S = A, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} \sigma = B. \end{gathered} \tag{6}$$

Следуя методу разделения [3, с.21], предварительно матрицы $\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}$, σ и вектор-функцию f_2 представим в виде

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = (G_1, G_2), \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} f_2' \\ f_2'' \end{pmatrix},$$

где G_1 — матрица размерности $m \times m$, G_2 — $(m \times (p - m))$-матрица, σ' — $(m \times k)$-матрица, σ'' — $((p - m) \times k)$-матрица, f_2' — m-вектор, f_2'' — $(p - m)$-вектор.

Тогда систему (6) можно представить в виде

$$\begin{gathered} G_1 f_2' + G_2 f_2'' = A - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} f_1 + S \right), \\ G_1 \sigma' + G_2 \sigma'' = B. \end{gathered} \tag{7}$$

Предположим, что $\det\, G_1 \neq 0$, тогда решение данной системы (7) можно представить в виде

$$f_2' = G_1^{-1}\left(A - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + S\right) - G_2 f_2''\right), \tag{8}$$

$$\sigma' = G_1^{-1}(B - G_2\sigma''). \tag{9}$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы множество* (1) *было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений* (2), *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *квадратная подматрица* G_1 *матрицы* $\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}$ *была невырожденной,* $\det G_1 \neq 0$;

2) *при произвольно заданных* $f_1, f_2'' \in K$ *первые* m *координат* f_2' *вектора* f_2 *имели вид* (8);

3) *при произвольно заданных* $\sigma'' \in K$ *подматрица* σ' *матрицы* σ *имела вид* (9).

2. Линейный случай стохастической общей задачи. По заданному линейному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda \equiv G_1(t)y + G_2(t)z + l(t) = 0, \qquad \lambda \in R^m, \quad y \in R^l, \quad z \in R^p, \tag{10}$$

требуется построить линейную по сносу стохастическую систему уравнений первого порядка с вырожденной по части переменных диффузией вида

$$\dot{y} = \Phi_1(t)y + \Psi_1(t)z + b_1(t), \qquad \dot{z} = \Phi_2(t)y + \Psi_2(t)z + b_2(t) + T\dot{\xi}, \tag{11}$$

для которой множество (10) являлось бы интегральным многообразием, т. е. по заданным матрицам $G_1(t)$, $G_2(t)$ и m-мерной функции $l(t)$ определить матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ и вектор-функции $b_1(t)$ и $b_2(t)$, а также матрицу $T(t)$ так, чтобы для построенной системы уравнений (11) заданные свойства (10) были интегральным многообразием.

В рассматриваемой задаче уравнение возмущенного движения (4) имеет вид

$$\dot{\lambda} = \dot{G}_1(t)y + \dot{G}_2(t)z + \dot{l}(t) + G_1(t)\,[\,\Phi_1(t)y + \Psi_1(t)z + b_1(t)\,] +$$

$$+G_2(t)\,[\Phi_2(t)y + \Psi_2(t)z + b_2(t)] + G_2T\dot{\xi}, \tag{12}$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции $B_1(\lambda, y, z, t)$ со свойством $B_1(0, y, z, t) \equiv 0$ имеем

$$\dot{\lambda} = A_1\lambda + B_1\dot{\xi}. \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) следуют равенства

$$\dot{G}_1(t)y + \dot{G}_2(t)z + \dot{l}(t) + G_1(t)\Phi_1(t)y + G_1(t)\Psi_1(t)z + G_1(t)b_1(t) +$$

$$+G_2(t)\Phi_2(t)y + G_2(t)\Psi_2(t)z + G_2(t)b_2(t) = A_1\,[G_1(t)y + G_2(t)z + l(t)],$$

$$G_2(t)T(t) = B_1,$$

которые преобразуются к виду

$$G_2(t)\Phi_2(t) = A_1G_1(t) - \dot{G}_1(t) - G_1(t)\Phi_1(t), \qquad G_2(t)\Psi_2(t) = A_1G_2(t) - \dot{G}_2(t) - G_1(t)\Psi_1(t),$$

$$G_2(t)b_2(t) = A_1l(t) - \dot{l}(t) - G_1(t)b_1(t), \qquad G_2(t)T(t) = B_1. \tag{14}$$

Для применения метода разделения [3, с. 21] предварительно введем обозначения $M_1 = A_1G_1(t) - \dot{G}_1(t) - G_1(t)\Phi_1(t)$, $M_2 = A_1G_2(t) - \dot{G}_2(t) - G_1(t)\Psi_1(t)$, $M_3 = A_1l(t) - \dot{l}(t) - G_1(t)b_1(t)$ и, далее, систему (14) представим в виде

$$G_2'\Psi_2' + G_2^{''}\Psi_2'' = M_1, \qquad G_2'\Psi_2' + G_2^{''}\Psi_2'' = M_2,$$
$$G_2'b_2(t)' + G_2^{''}b_3(t)'' = M_3, \qquad G_2'T' + G_2^{''}T'' = B_1, \tag{15}$$

где матрицы G_2, Φ_2, Ψ_2, T и вектор-функция $b_2(t)$ разбиты на соответствующие подматрицы:

$$G_2 = (G_2', G_2''), \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix}\Phi_2'\\ \Phi_2''\end{pmatrix}, \qquad \Psi_2 = \begin{pmatrix}\Psi_2'\\ \Psi_2''\end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix}T'\\ T''\end{pmatrix}, \quad b_2(t) = \begin{pmatrix}b_2'(t)\\ b_2''(t)\end{pmatrix}.$$

Здесь G_2' — $(m \times m)$-матрица, $G_2^{''}$ — $(m \times (p-m))$-матрица, Φ_2' — $(m \times l)$-матрица, Φ_2'' — $((p-m) \times l)$-матрица, Ψ_2' — $(m \times p)$-матрица, Ψ_2'' — $((p-m) \times p)$-матрица, T' — $(m \times r)$-матрица, T'' — $((r-m) \times r)$-матрица, $b_2'(t)$ — m-вектор-функция, $b_2''(t)$— $(p-m)$-вектор-функция.

Предположим, что $\det G_2' \neq 0$, тогда из (15) следуют соотношения

$$\Phi_2' = (G_2')^{-1}(M_1 - G_2^{''}\Phi_2''(t)), \qquad \Psi_2' = (G_2')^{-1}(M_2 - G_2^{''}\Psi_2''),$$
$$b_2'(t) = (G_2')^{-1}(M_3 - G_2^{''}b''(t)), \qquad T' = (G_2')^{-1}(B_1 - G_2^{''}T''). \tag{16}$$

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы линейное множество* (10) *было интегральным многообразием системы линейных по сносу дифференциальных уравнений* (11), *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *квадратная подматрица G_2' прямоугольной матрицы G_2 имела свойство $detG_2' \neq 0$*;

2) *при произвольно заданных непрерывных матрицах Φ_1, Φ_2'', Ψ_1, Ψ_2'' T'' матрицы Φ_2', Ψ_2', T' и первые m координат b_2' непрерывной вектор-функции b_2 имели вид* (16).

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. математика и механика. – 1952. – **10**, вып. 6. – С. 659 – 670.
2. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. – М., 1986. – 224 с.
3. *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. – М., 1986. – 88 с.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М., 1969. – 368 с.
5. *Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O.* Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations // World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A. – 2011. – **78**. – 312 p.
6. *Сагиров П.* Стохастические методы в динамике спутников // Механика: Период. сб. переводов иностр. статей. – 1974. – № 5(147). – С. 28–47; № 6(148). – С. 3 – 38.
7. *Синицын И. Н.* О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе //Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 3. – С. 23 – 31.
8. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений //Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. – 1998. – № 3. – С. 55 – 61.
9. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем //Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 5. – С. 714 – 716.
10. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче замыкания //Докл. МН-АН РК. – 1999. – № 1. – С. 53 – 60.
11. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М., 1990. – 632 с.

Получено 08.11.11,
после доработки — 06.11.12