УДК 519.21

И. П. Ильинская, Д. С. Негурица (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕРАХ НА ГРУППЕ ФУНКЦИЙ УОЛША С ТРИВИАЛЬНЫМ КЛАССОМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

We establish necessary and sufficient conditions for the renewal, up to a shift, of a composition of three Poisson distributions and the uniform distribution on five or six elements on the group of Walsh functions from the absolute values of their characteristic functions.

Знайдено умови, необхідні та достатні для того, щоб композиція трьох розподілів Пуассона та рівномірний розподіл на п'яти або шести елементах на групі функцій Уолша відновлювалися за модулем їх характеристичної функції з точністю до зсуву.

1. Введение. Задача о том, какие вероятностные меры на $\mathbf{R}^n$ или, в более общем случае, на локально компактной абелевой группе восстанавливаются по модулю своей характеристической функции с точностью до сдвига и центральной симметрии, возникла в физике (см. [1]). Пусть m_1 и m_2 — вероятностные меры на локально компактной абелевой группе X, $\widehat{m}_1$ и $\widehat{m}_2$ — их характеристические функции, заданные на группе характеров $Y := X^*$ группы X:

$$\widehat{m}_i(y) = \int\limits_X (x,y) m_i(dx)\,,$$

где (x,y) — значение характера $y \in Y$ на элементе x группы X. Меры m_1 и m_2 назовем *эквивалентными* ($m_1 \sim m_2$), если $|\widehat{m}_1(y)| \equiv |\widehat{m}_2(y)|$. Легко видеть, что любая мера m эквивалентна свертке $m * \delta_x$ этой меры с мерой δ_x, сосредоточенной в точке $x \in X$, и мере $\overline{m}$, определяемой равенством $\overline{m}(E) := m(-E)$ для любого борелевского множества E. Будем говорить, что мера m имеет *тривиальный класс эквивалентности*, если выполняется импликация

$$m_1 \sim m \quad \Longrightarrow \quad m_1 = m * \delta_x \quad \text{или} \quad m_1 = \overline{m} * \delta_x$$

для некоторого $x \in X$. Построению классов мер на локально компактных абелевых группах, имеющих тривиальный класс эквивалентности, посвящены работы [2 – 7]. Настоящая статья продолжает исследования, начатые в работе [7]. Она посвящена построению классов мер с тривиальным классом эквивалентности, заданных на группе функций Уолша, или, что то же самое, на прямой сумме $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\infty$ счетного числа двухэлементных групп.

2. Основные определения. Обозначим через $r_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $t \in [0,1]$, классические функции Радемахера (см. [8], § 1.1), определяемые равенством

$$r_k(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^{k+1}\pi t))\,.$$

В точках разрыва функции $r_k(t)$ будем считать непрерывными справа. Функции Уолша $w_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $t \in [0,1]$ (см. [8], гл. 1) — это всевозможные конечные произведения функций Радемахера. Нумеруются функции Уолша следующим образом. Положим $w_0(t) \equiv 1$. Представим число n в двоичной записи:

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i\,, \tag{1}$$

где $k = k(n)$ зависит от n, $\varepsilon_k = 1$, $\varepsilon_i = 0$ или 1 при $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Положим

$$w_n(t) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(t))^{\varepsilon_i} = r_k(t) \prod_{i=0}^{k-1} (r_i(t))^{\varepsilon_i}\,. \tag{2}$$

Ясно, что произведение двух функций Уолша является функцией Уолша. Функции Уолша образуют ортонормированную систему на отрезке $[0,1]$ относительно меры Лебега. Обозначим через W множество всех функций Уолша. Наделим W операцией поточечного умножения и дискретной топологией. Множество W является топологической абелевой группой относительно введенной операции. Группа W изоморфна прямой сумме $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\infty$ счетного числа двухэлементных групп. Изоморфизм (с учетом равенств (1) и (2)) устанавливается соотношением

$$w_n \to (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, 0, 0, \ldots)\,.$$

В [8] (§ 1.2) показано, что группой характеров группы W можно считать модифицированный отрезок $[0,1]^*$, который отличается от обычного отрезка $[0,1]$ тем, что у него двоично-рациональные точки $m/2^j$ раздвоены: левая точка $(m/2^j) - 0$ соответствует конечному разложению числа $m/2^j$ в двоичную дробь, а правая точка $(m/2^j) + 0$ — бесконечному разложению, в котором, начиная с некоторого места, расположены единицы. Операция сложения чисел из $[0,1]^*$ вводится так, что соответствующие двоичные знаки чисел складываются по модулю два. Функции Уолша $w_n(t)$ можно рассматривать теперь и как функции на $[0,1]^*$, доопределив их в точках $(m/2^j) - 0$ по непрерывности слева.

Обозначим через $M^1(W)$ сверточную полугруппу вероятностных мер на группе W. Поскольку W — счетное множество, каждая вероятностная мера $m \in M^1(W)$ задается набором чисел $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $a_n \geqslant 0$, $\sum_{n=0}^\infty a_n = 1$. Характеристическая функция меры m имеет вид

$$\widehat{m}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(t)\,, \qquad t \in [0,1]^*\,.$$

Мультипликативную полугруппу характеристических функций мер из $M^1(W)$ обозначим через $\widehat{M}^1(W)$. В работе [9] изучалась арифметика полугруппы $M^1(W)$. В настоящей статье будут получены условия, при которых некоторые классы мер из $M^1(W)$ (или $M^1((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\infty)$) имеют тривиальный класс эквивалентности. В действительности рассматриваемые нами меры можно считать заданными не на группе $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\infty$, а на ее конечных подгруппах $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$.

Заметим, что каждый элемент группы W обратен самому себе. Поэтому приведенное в первом пункте определение того, что мера m имеет тривиальный класс эквивалентности, формулируется следующим образом.

Определение 1. *Мера $m \in M^1(W)$ имеет тривиальный класс эквивалентности, если выполняется импликация*

$$m_1 \sim m \quad \Longrightarrow \quad m_1(E) = m(w_s E) \quad \forall E \subset W$$

для некоторого $s = 0, 1, 2, \ldots$.

В терминах характеристических функций это определение означает следующее.

Определение 2. *Характеристическая функция $\widehat{m} \in \widehat{M}^1(W)$ имеет тривиальный класс эквивалентности, если выполняется импликация*

$$|\widehat{m}_1(t)| = |\widehat{m}(t)|\,, \;\; \widehat{m}_1 \in \widehat{M}^1(W) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{m}_1(t) = w_s(t) \cdot \widehat{m}(t)\,, \quad t \in [0,1]^*\,,$$

для некоторого $s = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. не существует функций $\widehat{m}_1 \in \widehat{M}^1(W)$, отличных от функций вида $w_s \cdot \widehat{m}$, удовлетворяющих равенству $|\widehat{m}_1(t)| = |\widehat{m}(t)|$, $t \in [0,1]^*$.

Заметим, что в определении 2 достаточно требовать, чтобы равенство $|\widehat{m}_1(t)| = |\widehat{m}(t)|$ выполнялось для всех $t \in [0,1]$, за исключением двоично-рациональных точек. В силу непрерывности характеристической функции оно будет выполняться при всех $t \in [0,1]^*$.

3. Основные результаты. В работе [7] были получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы распределение Пуассона, композиция двух распределений Пуассона и композиция трех распределений Пуассона специального вида на группе W имели тривиальный класс эквивалентности. Сформулируем эти результаты. В следующих ниже теоремах мы опускаем аргумент $t \in [0,1]^*$ характеристических функций $\widehat{m}$.

Теорема A [7]. *Распределение Пуассона с характеристической функцией*

$$\widehat{m} = \exp\{a(w_i - 1)\}, \quad a > 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

имеет тривиальный класс эквивалентности.

Теорема B [7]. *Композиция двух распределений Пуассона с характеристической функцией*

$$\widehat{m} = \exp\{a(w_i - 1) + b(w_j - 1)\}, \qquad a, b > 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \qquad i \neq j,$$

имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда

$$e^{-2a} + e^{-2b} + e^{-2(a+b)} > 1\,.$$

Теорема C [7]. *Композиция трех распределений Пуассона с характеристической функцией*

$$\widehat{m} = \exp\{a(w_i - 1) + b(w_j - 1) + c(w_i w_j - 1)\},$$

$$a, b, c > 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \qquad i \neq j,$$

имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда

$$e^{-2(a+b)} + e^{-2(b+c)} + e^{-2(c+a)} > 1.$$

Кроме того, в работе [7] исследовался вопрос о тривиальности класса эквивалентности для равномерного распределения на двух, трех и четырех точках.

Теорема D [7]. *Равномерное распределение на двух и четырех точках имеет тривиальный класс эквивалентности. Равномерное распределение на трех точках имеет нетривиальный класс эквивалентности.*

Отметим, что меры в теореме A можно считать заданными на группе $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, в теоремах B и C — на группе $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, в теореме D — на группах $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$, $r = 1, 2, 3$.

В настоящей статье указаны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы композиция трех распределений Пуассона общего вида и равномерное распределение на пяти и шести точках на группе W имели тривиальный класс эквивалентности.

Теорема 1. *Композиция трех распределений Пуассона с характеристической функцией*

$$\widehat{m} = \exp\{a(w_i - 1) + b(w_j - 1) + c(w_k - 1)\}, \tag{3}$$

$$a, b, c > 0, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad k \neq i, \quad w_i w_j \neq w_k,$$

имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется или система неравенств

$$\begin{aligned} & e^{-2a} + e^{-2b} + e^{-2(a+b)} > 1\,, \\ & e^{-2b} + e^{-2c} + e^{-2(b+c)} > 1\,, \\ & e^{-2a} - e^{-2b} + e^{-2c} + e^{-2(a+b)} + e^{-2(b+c)} - e^{-2(c+a)} + e^{-2(a+b+c)} > 1\,, \end{aligned} \tag{4}$$

или одна из двух систем, получающихся из данной циклической перестановкой переменных a, b, c.

Следствие. *Композиция трех распределений Пуассона с характеристической функцией вида* (3) *при условии* $a = b = c$ *имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$e^{-6a} + e^{-4a} + e^{-2a} > 1\,.$$

Замечание. Теорема A получается из теоремы 1 при $b = c = 0$, а теорема B — при $c = 0$.

Теорема 2. *Равномерное распределение на пяти точках с характеристической функцией*

$$\widehat{m} = (1/5)(1 + w_i + w_j + w_k + w_l)\,,$$

где i, j, k, l *— попарно различные натуральные числа, имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{m} \neq (1/5)(1 + w_i + w_j + w_k + w_i w_j)\,,$$

т. е. когда никакая из функций w_i, w_j, w_k, w_l *не равна произведению двух других.*

Теорема 3. *Равномерное распределение на шести точках с характеристической функцией*

$$\widehat{m} = (1/6)(1 + w_i + w_j + w_k + w_l + w_m)\,,$$

где i, j, k, l, m *— попарно различные натуральные числа, имеет тривиальный класс эквивалентности тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{m} \neq (1/6)(1 + w_i + w_j + w_k + w_i w_j + w_i w_k)\,,$$

т. е. когда никакие две функции из w_i, w_j, w_k, w_l, w_m *не равны попарным произведениям остальных функций.*

Меры в теореме 1 можно считать заданными на группе $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$, в теоремах 2 и 3 — на группах $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ и $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^5$ соответственно.

Опишем кратко схему доказательства теоремы 1. Функцию вида (3) можно записать в виде

$$\widehat{m} = \alpha_1 + \alpha_2 w_i + \alpha_3 w_j + \alpha_4 w_k + \alpha_5 w_i w_j + \alpha_6 w_i w_k + \alpha_7 w_j w_k + \alpha_8 w_i w_j w_k \,, \qquad (5)$$

где параметры $\alpha_u > 0$ зависят от a, b, c, $\sum_{u=1}^{8} \alpha_u = 1$. Если функция $\widehat{m}_1 \in \widehat{M}^1(W)$ удовлетворяет условию

$$|\widehat{m}_1| = |\widehat{m}| \,, \qquad (6)$$

то $\widehat{m}_1$ имеет вид

$$\widehat{m}_1 = w_s(\beta_1 + \beta_2 w_i + \beta_3 w_j + \beta_4 w_k + \beta_5 w_i w_j + \beta_6 w_i w_k + \beta_7 w_j w_k + \beta_8 w_i w_j w_k) \,,$$

где $\beta_v \geqslant 0$, $\sum_{v=1}^{8} \beta_v = 1$, а i, j, k — те же, что и в (5). Поскольку функции Уолша принимают только значения 1 и -1, рассмотрим равенство (6) в следующих восьми случаях: $w_i(t) = \delta_1$, $w_j(t) = \delta_2$, $w_k(t) = \delta_3$, где δ_1, δ_2, $\delta_3 = \pm 1$. При этом равенство (6) записывается в виде $2^7 = 128$ систем из восьми линейных уравнений с восемью неизвестными β_v и восемью параметрами α_u. Для решения этих систем была составлена компьютерная программа и получено 128 решений, зависящих от параметров α_u. Далее был проведен скрупулезный и довольно громоздкий анализ этих решений для выяснения вопроса, при каких условиях на a, b, c каждая конкретная система (или группа систем): а) не имеет решения, удовлетворяющего условиям $\beta_v \geqslant 0$, б) имеет тривиальное решение, т. е. такое, при котором $\widehat{m}_1 = w_s \cdot \widehat{m}$, в) имеет нетривиальное решение. Объединение всех полученных результатов дало систему неравенств (4) и системы, получающиеся из нее циклическими перестановками переменных a, b, c.

При доказательстве теорем 2 и 3 равенство (6) дает 2^{15} и 2^{31} систем из шестнадцати и тридцати двух линейных уравнений от шестнадцати и тридцати двух неизвестных соответственно. Поскольку решения этих систем числовые, а не параметрические, вопрос о тривиальности класса эквивалентности решается после проведения вычислений на компьютере значительно легче, чем при доказательстве теоремы 1.

1. *Rosenblatt J.* Phase retrieval // Communs Math. Phys. – 1984. – **95**. – P. 317 – 343.
2. *Carnal H., Dozzi M.* On a decomposition problem for multivariate probability measures // J. Multivar. Anal. – 1989. – **31**. – P. 165 – 177.
3. *Carnal H., Fel'dman G.M.* Phase retrieval for probability measures on abelian groups, I // J. Theor. Probab. – 1995. – **8**, № 3. – P. 717 – 725.
4. *Carnal H., Fel'dman G.M.* Phase retrieval for probability measures on abelian groups, II // J. Theor. Probab. – 1997. – **10**, № 4. – P. 1065 – 1074.
5. *Карналь Г., Фельдман Г.М.* Об одном свойстве целых характеристических функций конечного порядка с вещественными нулями // Докл. АН. – 1999. – **366**, № 2. – С. 162 – 163.
6. *Carnal H., Feldman G.M.* A stability property for probability measures on abelian groups // Statist. and Probab. Lett. – 2000. – **49**. – P. 39 – 44.
7. *Ильинская И.П.* Восстановление фазы для вероятностных мер на группе характеров группы Кантора – Уолша // Доп. НАН України. – 2003. – № 8. – С. 11 – 14.
8. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
9. *Il'inskaya I. P.* The arithmetic of a semigroup of series of Walsh functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 2000. – P. 365 – 378.

Получено 14.06.12