УДК 517.51

О. О. Карлова, В. В. Михайлюк (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ХРЕСТ-ТОПОЛОГІЯ І ТРІЙКИ ЛЕБЕҐА

The cross topology γ on the product of topological spaces X and Y is the collection of all sets $G \subseteq X \times Y$ such that the intersection of G with every vertical line and every horizontal line is an open subset of the vertical line and the horizontal line, respectively. For spaces X and Y from a certain class that includes all spaces $\mathbb{R}^n$, we prove that there exists a separately continuous function $f\colon X \times Y \to (X \times Y, \gamma)$ that is not a pointwise limit of a sequence of continuous functions. We also prove that every separately continuous function is a pointwise limit of a sequence of continuous functions if it is defined on the product of a strongly zero-dimensional metrizable space and a topological space and acts into a topological space.

Крест-топологией γ на произведении топологических пространств X и Y называется совокупность всех множеств $G \subseteq X \times Y$, пересечение которых с каждой вертикалью и горизонталью является открытым подмножеством вертикали или горизонтали соответственно. Для пространств X и Y из некоторого класса пространств, содержащего все пространства $\mathbb{R}^n$, доказано, что существует раздельно непрерывная функция $f\colon X \times Y \to (X \times Y, \gamma)$, которая не является поточечным пределом последовательности непрерывных функций. Кроме того, установлено, что каждая раздельно непрерывная функция, заданная на произведении сильно нульмерного метризуемого и топологического пространств и принимающая значения в любом топологическом пространстве, является поточечным пределом последовательности непрерывных функций.

1. Вступ. Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Відображення $f\colon X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо $f^x\colon Y \to Z$ і $f_y\colon X \to Z$ — неперервні відображення для всіх $x \in X$ та $y \in Y$. Якщо відображення $f\colon X \to Y$ є поточковою границею послідовності неперервних відображень $f_n\colon X \to Y$, то f називається *відображенням першого класу Бера*.

У 1898 році А. Лебеґ [1] встановив, що при $X = Y = \mathbb{R}$ кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to Z$ належить до першого класу Бера. Набір топологічних просторів (X, Y, Z) з такою властивістю ми будемо називати *трійкою Лебеґа*.

Результат Лебеґа узагальнювався багатьма математиками (див. [2–6] і наведену там бібліографію). Зокрема, А. К. Каланча і В. К. Маслюченко [4] показали, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ — трійка Лебеґа, якщо Z — топологічний векторний простір. Т. Банах [5] встановив, що набір $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ є трійкою Лебеґа у випадку, коли Z — рівномірно зв'язний простір. Із [6] (теорема 3) випливає, що для метризовного лінійно зв'язного і локально лінійно зв'язного простору Z трійка $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ є лебеґівською.

У зв'язку із згаданими вище результатами В. К. Маслюченко поставив наступне питання.

***Питання* 1.1.** *Чи існує топологічний простір Z такий, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, Z)$ не є трійкою Лебеґа?*

Тут буде дано позитивну відповідь на це питання. Більше того, ми доведемо, що (X, Y, Z) не є трійкою Лебеґа для топологічних просторів X і Y з досить широкого класу, який, зокрема, містить усі простори $\mathbb{R}^n$, і простору $Z = X \times Y$, наділеного хрест-топологією (див. означення в пункті 2). У другому і третьому пунктах даної статті встановлено деякі допоміжні властивості цієї топології. Четвертий пункт містить доведення основного результату. В останньому пункті показано, що умови типу зв'язності на простори X і Y в основному результаті є істотними; при цьому доведено, що набір (X, Y, Z) є трійкою Лебеґа у випадку, коли X — сильно нульвимірний метризовний простір, а Y і Z — довільні топологічні простори.

2. Компактні множини в хрест-топології. Нехай X і Y — топологічні простори. Позначимо через γ сукупність усіх таких підмножин A добутку $X \times Y$, що для кожної точки (x, y) з A існують такі околи U та V точок x і y у просторах X і Y відповідно, що $(\{x\} \times V) \bigcup (U \times \{y\}) \subseteq A$. Система γ утворює деяку топологію на множині $X \times Y$, яку ми називаємо *хрест-топологією*. Простір $X \times Y$ з такою топологією позначаємо $(X \times Y, \gamma)$.

Для точки $p = (x, y) \in X \times Y$ через $\mathrm{cross}(p)$ позначатимемо множину $(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$.

Для довільної множини $A \subseteq X \times Y$ позначимо $\mathrm{cross}(A) = \bigcup\limits_{p \in A} \mathrm{cross}(p)$.

Твердження 2.1. *Нехай X та Y — T_1-простори і $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність точок $p_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$ такі, що $x_n \neq x_m$ і $y_n \neq y_m$ при $n \neq m$. Тоді множина $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ є γ-дискретною.*

Доведення. Оскільки одноточкові множини у просторах X і Y замкнені, то множина P є γ-замкненою, причому аналогічні міркування показують, що кожна множина $Q \subseteq P$ також γ-замкнена. Таким чином, P — замкнений дискретний підпростір простору $(X \times Y, \gamma)$.

Твердження 2.2. *Нехай X та Y — T_1-простори і $K \subseteq X \times Y$ — γ-компактна множина. Тоді існує скінченна множина $A \subseteq X \times Y$ така, що $K \subseteq \mathrm{cross}(A)$.*

Доведення. Припустимо, що $K \nsubseteq \mathrm{cross}(A)$ для довільної скінченної множини $A \subseteq X \times Y$. Візьмемо довільну точку $p_1 \in K$ і індукцією відносно $n \in \mathbb{N}$ побудуємо послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $p_n \in K$ таку, що $p_{n+1} \in K \setminus \mathrm{cross}(P_n)$, де $P_n = \{p_k : 1 \leq k \leq n\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Згідно з твердженням 2.1 множина $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ є нескінченною γ-дискретною підмножиною K, що суперечить γ-компактності K.

Твердження 2.3. *Нехай X та Y — T_1-простори і A та B — дискретні множини в X та Y відповідно. Тоді топологія добутку і топологія γ збігаються на множині $C = \mathrm{cross}(A \times B)$.*

Доведення. Зафіксуємо точку $p = (x, y) \in C$. Використовуючи дискретність множин A і B, виберемо околи U і V точок x і y у просторах X і Y відповідно такі, що $|U \cap A| \leq 1$ і $|V \cap B| \leq 1$. Тоді $C \cap (U \times V) = C \cap \mathrm{cross}(c)$ для деякої точки $c \in C$. Тому топологія добутку і топологія γ збігаються на множині $C \cap (U \times V)$.

Тепер безпосередньо з тверджень 2.2 і 2.3 випливає наступна характеризація γ-компактних множин.

Твердження 2.4. *Нехай X та Y — T_1-простори і $K \subseteq X \times Y$. Тоді множина K є γ-компактною тоді і тільки тоді, коли*:

1) *K є компактною*;

2) *$K \subseteq \mathrm{cross}(C)$ для деякої скінченної множини $C \subseteq X \times Y$.*

3. Зв'язні множини і хрест-відображення.

Твердження 3.1. *Нехай X та Y — зв'язні простори, $A \subseteq X$ — щільна в X множина, $B \subseteq Y$ — непорожня множина і $C \subseteq X \times Y$ такі, що $\mathrm{cross}(A \times B) \subseteq C$. Тоді множина C є зв'язною.*

Доведення. Нехай U і V — відкриті підмножини множини C такі, що $C = U \sqcup V$. Зі зв'язності просторів X і Y випливає, що для кожного $p \in A \times B$ виконується умова $\mathrm{cross}(p) \subseteq U$ або $\mathrm{cross}(p) \subseteq V$. Оскільки $\mathrm{cross}(p) \cap \mathrm{cross}(q) \neq \varnothing$ для довільних різних точок $p, q \in X \times Y$, то $\mathrm{cross}(A \times B) \subseteq U$ або $\mathrm{cross}(A \times B) \subseteq V$. Тепер, врахувавши, що множина $\mathrm{cross}(A \times B)$

щільна в $X \times Y$, а отже і в C, одержимо, що $C \subseteq U$ або $C \subseteq V$. Таким чином, $U = \varnothing$ або $V = \varnothing$ і C є зв'язною.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай X та Y — нескінченні зв'язні T_1-простори. Тоді доповнення до будь-якої скінченної підмножини добутку $X \times Y$ є зв'язною множиною.*

Доведення. Нехай $C \subseteq X \times Y$ — скінченна множина. Виберемо скінченні множини $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ такі, що $C \subseteq A \times B$. Зауважимо, що множини $A_1 = X \setminus A$ і $B_1 = Y \setminus B$ щільні в X і Y відповідно і $\mathrm{cross}(A_1 \times B_1) \subseteq (X \times Y) \setminus C$. Залишилось використати твердження 3.1.

Означення 3.1. *Топологічний простір X називатимемо C_1-простором* (*або простором з властивістю C_1*), *якщо доповнення до будь-якої скінченної підмножини цього простору має скінченну кількість компонент зв'язності.*

Зауважимо, що числова пряма $\mathbb{R}$ має властивість C_1. Крім того, добуток скінченної кількості C_1-просторів також має властивість C_1.

Нехай X, Y — топологічні простори і $P \subseteq X \times Y$. Відображення $f\colon P \to X \times Y$ називатимемо *хрест-відображенням*, якщо $f(p) \subseteq \mathrm{cross}(p)$ для кожного $p \in P$.

Лема 3.1. *Нехай X та Y — хаусдорфові простори, $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$, $f\colon U \times V \to X \times Y$ — неперервне хрест-відображення, $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ — скінченні множини і виконуються наступні умови*:

1) *U, V — зв'язні C_1-простори*;

2) *$f(U \times V) \subseteq \mathrm{cross}(A \times B)$.*

Тоді $f(U \times V) \subseteq \{a\} \times Y$ для деякого $a \in A$ або $f(U \times V) \subseteq X \times \{b\}$ для деякого $b \in B$.

Доведення. Якщо множини U і V скінченні, то згідно з умовою 1 вони одноточкові і твердження леми випливає з умови 2. Якщо множина U скінченна (одноточкова), а V нескінченна, то множина $F = \{z \in U \times V\colon f(z) \in \mathrm{cross}(A \times B) \setminus (A \times Y)\}$ є скінченною відкрито-замкненою підмножиною $U \times V$. Зі зв'язності $U \times V$ випливає, що $F = \varnothing$. Тому $f(U \times V) \subseteq A \times Y$. Знову врахувавши зв'язність добутку $U \times V$ і неперервність функції f, одержимо, що $f(U \times V) \subseteq \{a\} \times Y$ для деякого $a \in A$.

Нехай тепер множини U і V нескінченні. Тоді з умови 1 випливає, що U і V не мають ізольованих точок. Оскільки множини $A_1 = A \cap U$ і $B_1 = B \cap V$ замкнені і ніде не щільні в U і V відповідно, то множина

$$C = (U \times V) \cap \mathrm{cross}(A \times B) = (U \times V) \cap \mathrm{cross}(A_1 \times B_1)$$

замкнена і ніде не щільна у просторі $Z = U \times V$.

Нехай $\alpha\colon U \times V \to X$, $\beta\colon U \times V \to Y$ — такі неперервні функції, що $f(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$ для всіх $(x,y) \in Z$. Покладемо

$$Z_\alpha = \{(x,y) \in Z\colon \alpha(x,y) = x\}, \qquad Z_\beta = \{(x,y) \in Z\colon \beta(x,y) = y\}.$$

Зауважимо, що множина

$$P_\alpha = \{z \in Z_\alpha\colon \alpha(z) \in A\} = Z_\alpha \cap (A \times Y) = Z_\alpha \cap (A_1 \times Y)$$

ніде не щільна в Z. Тому множина $Q_\alpha = \{z \in Z_\alpha\colon \alpha(z) \notin A\}$ щільна у множині $\mathrm{int}_Z(Z_\alpha)$, де через $\mathrm{int}_Z(D)$ позначено внутрішність множини $D \subseteq Z$ у просторі Z, а через $\overline{D}$ — її замикання в цьому просторi. З умови 2 випливає, що множина Q_α мiститься у замкненiй множинi $\{z \in Z\colon \beta(z) \in B\}$. Отже,

$$\overline{\mathrm{int}_Z(Z_\alpha)} \subseteq \overline{Q_\alpha} \subseteq \{z \in Z\colon \beta(z) \in B\},$$

тобто $f(\overline{\mathrm{int}_Z(Z_\alpha)}) \subseteq X \times B$. Аналогiчно $f(\overline{\mathrm{int}_Z(Z_\beta)}) \subseteq A \times Y$.

Оскiльки f — хрест-вiдображення, то $Z = Z_\alpha \cup Z_\beta$, причому Z_α i Z_β замкненi в Z. Покладемо

$$G = Z \setminus C.$$

Врахувавши, що множина C замкнена i нiде не щiльна в Z, одержимо, що G є вiдкритою i щiльною в Z множиною. Згiдно з умовою 1 множини $U \setminus A$ i $V \setminus B$ мають скiнченну кiлькiсть компонент зв'язностi, тому множина $G = (U \setminus A) \times (V \setminus B)$ має скiнченну кiлькiсть компонент зв'язностi $G_1, \ldots, G_k$. Тодi $G = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} G_i$, причому множини G_i замкненi в G. Тому всi множини G_i вiдкрито-замкненi в G, зокрема вiдкритi в Z. Зауважимо, що $Z_\alpha \cap Z_\beta = \{z \in Z\colon f(z) = z\} \subseteq f(Z) \subseteq \mathrm{cross}(A \times B)$. Отже, $G \cap Z_\alpha \cap Z_\beta = \varnothing$. Тодi $G_i \subseteq (Z_\alpha \cap G_i) \sqcup (Z_\beta \cap G_i)$, тому $G_i \subseteq Z_\alpha$ або $G_i \subseteq Z_\beta$ для кожного $1 \le i \le k$. Покладемо

$$I_\alpha = \{1 \le i \le k\colon G_i \subseteq Z_\alpha\}, \qquad I_\beta = \{1 \le i \le k\colon G_i \subseteq Z_\beta\},$$

$$U_\alpha = \bigcup_{i \in I_\alpha} G_i, \qquad U_\beta = \bigcup_{i \in I_\beta} G_i.$$

Зауважимо, що

$$f(\overline{U_\alpha}) \subseteq f(\overline{\mathrm{int}_Z(Z_\alpha)}) \subseteq X \times B, \qquad f(\overline{U_\beta}) \subseteq f(\overline{\mathrm{int}_Z(Z_\beta)}) \subseteq A \times Y.$$

Отже, для довiльної точки $z = (x, y) \in \overline{U_\alpha}$ маємо $\alpha(x, y) = x$ i $\beta(x, y) \in B$. Аналогiчно $\alpha(x, y) \in A$ i $\beta(x, y) = y$ для довiльної точки $z = (x, y) \in \overline{U_\beta}$. Тому $z = f(z) \in A \times B$ для довiльного $z \in \overline{U_\alpha} \cap \overline{U_\beta}$. Отже, множина $Z_0 = \overline{U_\alpha} \cap \overline{U_\beta}$ скiнченна.

Позначимо $E = \overline{U_\alpha} \setminus Z_0$ i $D = \overline{U_\beta} \setminus Z_0$. Оскiльки згiдно з твердженням 3.1 множина $Z \setminus Z_0$ зв'язна, непорожня i $Z \setminus Z_0 = E \sqcup D$, то, врахувавши, що $\overline{E} \cap D = \varnothing$ i $E \cap \overline{D} = \varnothing$, одержимо, що $E = \varnothing$ або $D = \varnothing$. Вважатимемо, що $E = \varnothing$. Тодi U_β щiльна в Z i

$$f(Z) \subseteq f(\overline{U_\beta}) \subseteq A \times Y.$$

Враховуючи зв'язнiсть добутку $U \times V$, отримуємо, що множина $f(U \times V)$ зв'язна, тому iснує таке $a \in A$, що $f(U \times V) \subseteq \{a\} \times Y$.

4. Основний результат.

Твердження 4.1. *Нехай X та Y — T_1-простори, $z_0 \in X \times Y$ i $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ — γ-збiжна до z_0 послiдовнiсть точок $z_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$. Тодi iснує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $z_n \in \mathrm{cross}(z_0)$ для всiх $n \ge m$.*

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді індукцією відносно $k \in \mathbb{N}$ легко побудувати строго зростаючу послідовність номерів $n_k \in \mathbb{N}$ таку, що $x_{n_i} \neq x_{n_j}$ та $y_{n_i} \neq y_{n_j}$ для різних $i, j \in \mathbb{N}$ і $z_{n_k} \notin \mathrm{cross}(z_0)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Тепер, з одного боку, послідовність $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ точок $p_k = z_{n_k}$ збігається до z_0, а з іншого — множина $G = (X \times Y) \setminus \{p_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ є околом точки z_0, що призводить до суперечності.

Твердження доведено.

Система $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X називається *π-псевдобазою* [8], якщо для довільної непорожньої відкритої в X множини U існує множина $A \in \mathcal{A}$ така, що $\mathrm{int}(A) \neq \varnothing$ і $A \subseteq U$.

Теорема 4.1. *Нехай X і Y — хаусдорфові простори без ізольованих точок, які мають π-псевдобази, що складаються зі зв'язних компактних C_1-множин, і $f \colon X \times Y \to X \times Y$ — тотожне відображення. Тоді $f \notin B_1(X \times Y, (X \times Y, \gamma))$.*

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що існує послідовність неперервних функцій $f_n \colon X \times Y \to (X \times Y, \gamma)$ така, що $f_n(x, y) \to (x, y)$ в $(X \times Y, \gamma)$ для всіх $(x, y) \in X \times Y$.

Зауважимо, що кожне відображення $f_n \colon X \times Y \to X \times Y$ є неперервним. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $P_n = \{p \in X \times Y \colon f_n(p) \in \mathrm{cross}(p)\}$ замкнена. Отже, для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина

$$F_n = \bigcap_{m \geq n} P_m = \{p \in X \times Y \colon \forall m \geq n \ f_m(p) \in \mathrm{cross}(p)\}$$

також замкнена. Крім того, згідно з твердженням 4.1 маємо

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

З умови теореми випливає, що простір $Z = X \times Y$ має π-псевдобазу, що складається з компактних множин. Тому він містить відкритий скрізь щільний локально компактний підпростір і, зокрема, є берівським. Виберемо номер $n_0 \in \mathbb{N}$ і компактні зв'язні C_1-множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ так, щоб $U \times V \subseteq F_{n_0}$, $U_0 = \mathrm{int}(U) \neq \varnothing$ і $V_0 = \mathrm{int}(V) \neq \varnothing$.

Позначимо $W = U \times V$. Згідно з твердженням 2.4 існують такі послідовності скінченних множин $A_n \subseteq X$ і $B_n \subseteq Y$, що $f_n(W) \subseteq (A_n \times Y) \cup (X \times B_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки простори X і Y не мають ізольованих точок, то множини U_0 і V_0 нескінченні. Виберемо точки $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in U_0 \times V_0$ такі, що $p_1 \notin \mathrm{cross}(p_2)$. З хаусдорфовості просторів X і Y випливає, що існують околи U_1 і U_2 точок x_1 і x_2 в U_0 та V_1 і V_2 точок y_1 і y_2 в V_0 відповідно такі, що $U_1 \cap U_2 = V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Тепер виберемо номер $N \geq n_0$ такий, що $f_N(p_1) \in U_1 \times V_1$ і $f_N(p_2) \in U_2 \times V_2$.

Відображення $f_N|_W$ є хрест-відображенням. Згідно з лемою 3.1 маємо $f_N(W) \subseteq \{a\} \times Y$ для деякого $a \in A$ або $f_N(W) \subseteq X \times \{b\}$ для деякого $b \in B$. Нехай $f_N(W) \subseteq \{a\} \times Y$ для деякого $a \in X$. Тоді $(U_1 \times V_1) \cap (\{a\} \times Y) \neq \varnothing$ і $(U_2 \times V_2) \cap (\{a\} \times Y) \neq \varnothing$, звідки випливає, що $a \in U_1 \cap U_2$, а це не можливо.

Теорему доведено.

***Наслідок* 4.1.** *Нехай $n, m \geq 1$ і $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — тотожне відображення. Тоді $f \notin B_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \gamma))$.*

***Наслідок* 4.2.** *Набір $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \gamma))$ не є трійкою Лебеґа для всіх $n, m \geq 1$.*

5. Нарізно неперервні відображення на нульвимірних просторах. Нагадаємо, що непорожній топологічний простір X називається *сильно нульвимірним*, якщо він цілком регулярний і в кожне скінченне функціонально відкрите покриття цього простору можна вписати скінченне диз'юнктне відкрите покриття [9, с. 529].

Теорема 5.1. *Нехай X — сильно нульвимірний метризовний простір, Y і Z — топологічні простори. Тоді (X, Y, Z) — трійка Лебеґа.*

Доведення. Нехай d — метрика на просторі X, яка породжує його топологію. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо відкрите покриття $\mathcal{B}_n$ простору X кулями діаметра $\leq \frac{1}{n}$. З [7] випливає, що в кожне покриття $\mathcal{B}_n$ можна вписати локально скінченне відкрито-замкнене покриття $\mathcal{U}_n = (U_{\alpha,n} \colon 0 \leq \alpha < \beta_n)$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ покладемо $V_{0,n} = U_{0,n}$ і $V_{\alpha,n} = U_{\alpha,n} \setminus \bigcup\limits_{\xi<\alpha} U_{\xi,n}$, якщо $\alpha > 0$. Тоді $\mathcal{V}_n = (V_{\alpha,n} \colon 0 \leq \alpha < \beta_n)$ — локально скінченне диз'юнктне покриття простору X відкрито-замкненими множинами $V_{\alpha,n}$, вписане в $\mathcal{B}_n$.

Нехай $f \colon X \times Y \to Z$ — нарізно неперервна функція. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $0 \leq \alpha < \beta_n$ виберемо довільну точку $x_{\alpha,n} \in V_{\alpha,n}$. Розглянемо функції $f_n \colon X \times Y \to Z$, визначені таким чином:

$$f_n(x, y) = f(x_{\alpha,n}, y),$$

якщо $x \in V_{\alpha,n}$ і $y \in Y$. Зрозуміло, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція f_n неперервна за сукупністю змінних, адже функція f неперервна відносно другої змінної. Покажемо, що $f_n(x, y) \to f(x, y)$ на $X \times Y$. Зафіксуємо точку $(x, y) \in X \times Y$ і виберемо послідовність $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що $x \in V_{\alpha_n,n}$. Оскільки $\mathrm{diam} V_{\alpha_n,n} \to 0$, то $x_{\alpha_n,n} \to x$. Враховуючи, що функція f неперервна відносно першої змінної, одержуємо

$$f_n(x, y) = f(x_{\alpha_n,n}, y) \to f(x, y).$$

Таким чином, $f \in B_1(X \times Y, Z)$.

Теорему доведено.

1. *Lebesgue H.* Sur l'approximation des fonctions // Bull. Sci. Math. – 1898. – **22**. – P. 278 – 287.
2. *Hahn H.* Reelle Funktionen.1 Teil. Punktfunktionen. – Leipzig: Acad. Verlagsgesellscheft M.B.H., 1932.
3. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Anal. and Appl., Pt B. Edited by Nachbin. Adv. Math. Suppl. Stud. 78. – 1981. – P. 741 – 747.
4. *Каланча А. К., Маслюченко В. К.* Розмірність Лебега – Чеха та берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 11. – С. 1596 – 1599.
5. *Banakh T.* (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications // Math. Stud. – 2002. – **18**, № 1. – P. 10 – 28.
6. *Карлова О. О.* Нарізно неперервні σ-дискретні відображення // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 314 – 315. – С. 77 – 79.
7. *Ellis R.* Extending continuous functions on zero-dimensional spaces // Math. Ann. – 1970. – **186**. – P. 114 – 122.
8. *Tall F. D.* Stalking the Souslin tree — a topological guide // Can. Math. Bull. – 1976. – **19**, № 3.
9. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

Одержано 28.12.11,
після доопрацювання — 16.10.12