УДК 517.5

Р. Р. Салимов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОТНОСИТЕЛЬНО p-МОДУЛЯ

We establish a sufficient condition for the ring Q-homeomorphisms in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with respect to a p-module for $n-1 < p < n$ to possess the finite Lipschitz property. We construct an example of a ring Q-homeomorphism with respect to a p-module at a fixed point that does not possess the finite Lipschitz property.

Знайдено достатню умову скінченної ліпшицевості кільцевих Q-гомеоморфізмів в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, відносно p-модуля при $n-1 < p < n$. Наведено приклад кільцевого Q-гомеоморфізму відносно p-модуля у фіксованій точці, що не є скінченно ліпшицевим.

1. Введение. Напомним некоторые определения. Борелева функция $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (пишут $\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma,$) если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(x)\, ds(x) \geqslant 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\, dm(x).$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Предположим, что $n-1 < p < n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leq K\, M_p(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области G. При предположении, что f в (1) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *липшицевым*. Другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in G$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant C$$

(см., например, теорему 2 в [1]).

2. О кольцевых Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля. Всюду далее $B(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| < r\right\}$, $\mathbb{B}^n = B(0,1)$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $Q\colon G \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и числа $r > 0$ обозначим

$$⨍\limits_{E} Q(x) dm(x) = \frac{1}{m(E)} \int\limits_{E} Q(x)\, dm(x),$$

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x) d\mathcal{A}(x),$$

где $S(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r\right\}$, а $d\mathcal{A}(x)$ — элемент площади поверхности.

Напомним следующие определения. Пусть $E,\ F \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E,F;G)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в G, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Пусть $x_0 \in G$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$ и $Q\colon G \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Для любых r_1 и r_2, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, обозначим

$$R(x_0,r_1,r_2) = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x-x_0| < r_2\big\},$$

$$S_{r_i} = S(x_0,r_i), \quad i=1,2.$$

Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* $x_0 \in G$, $1 < p \le n$, если соотношение

$$M_p\big(\Delta(fS_{r_1}, fS_{r_2}; fG)\big) \le \int\limits_{R(x_0,r_1,r_2)} Q(x)\cdot\eta^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) \tag{2}$$

выполнено для любого кольца $R(x_0,r_1,r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \ \ge\ 1.$$

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в области* G, если условие (2) выполнено для всех точек $x_0 \in G$.

В дальнейшем будем придерживаться следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \ne \infty$, $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0\cdot\infty = 0$ (см., например, [2, с. 6]). Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля, который ранее был установлен в работе [3] (см. теорему 2.3, а также теорему 1 в [4]).

Теорема 1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ и $Q\colon G \to [0,\infty]$ — локально интегрируемая функция. Гомеоморфизм $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для любых* $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial G)$ *выполняется*

$$M_p\left(\Delta\left(fS_{r_1},\, fS_{r_2}; fG\right)\right) \le \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}},$$

где

$$I = I(x_0,r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}.$$

Отметим также, что инфимум в выражении справа в (2) достигается для функции

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}.$$

Развиваемая в работе теория кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля применима, в частности, к отображениям, квазиконформным в среднем (см. [5]).

3. Предварительные замечания. Следуя работе [6], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ — кольцо, т. е. если B — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области G, если $A \subset G$. Очевидно, что если $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в G, то (fA, fC) также конденсатор в fG. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Функция $u\colon A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u\colon A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u\colon A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u\colon A \to \mathbb{R}^1$ таких, что: 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, \mathcal{E} = \mathrm{cap}_{\mathrm{p}}(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x)$$

называют *p-емкостью* конденсатора $\mathcal{E}$. В дальнейшем при $p > 1$ будем использовать равенство (см. [7–9])

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, \mathcal{E} = M_p\big(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)\big). \tag{3}$$

Известно, что при $1 < p < n$

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, \mathcal{E} \geqslant n \nu_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} \big[m(C) \big]^{\frac{n-p}{n}}, \tag{4}$$

где ν_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ (см., например, неравенство (8.9) в [10]).

При $n - 1 < p \leq n$ имеет место оценка

$$(\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, \mathcal{E})^{n-1} \geq \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}. \tag{5}$$

Здесь $d(C)$ — диаметр компакта C, γ — положительная постоянная, зависящая только от размерности n и p (см. предложение 6 в [11]).

4. Конечная липшицевость кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля. Для непрерывного отображения $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ и $x \in G \subseteq \mathbb{R}^n$ положим

$$L(x, f) = \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

Говорят, что отображение f является *конечно липшицевым*, если

$$L(x, f) < \infty$$

для всех $x \in G$.

Ниже приведена лемма о достаточном условии локальной липшицевости в точке для кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $n - 1 < p < n$.

Лемма. *Пусть G и G' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q\colon G \to [0,\infty]$ — локально интегрируемая функция и $f\colon G \to G'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $x_0 \in G$ с условием*

$$Q_0 = \limsup_{\varepsilon\to 0} \quad \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)dm(x) < \infty.$$

Тогда при $n-1<p<n$ имеем

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0} \frac{\big|f(x)-f(x_0)\big|}{\big|x-x_0\big|} \le \lambda_{n,p}\, Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где $\lambda_{n,p}$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R = R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ с $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ такое, что $R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \subset G$. Тогда $\left(fB\left(x_0,\varepsilon_2\right), \overline{fB\left(x_0,\varepsilon_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в G' и, согласно (3), имеем равенство

$$\mathrm{cap_p}\ (fB(x_0,\varepsilon_2), \overline{fB(x_0,\varepsilon_1)}) = M_p\big(\triangle(\partial fB(x_0,\varepsilon_2), \partial fB(x_0,\varepsilon_1); fR)\big),$$

а в силу гомеоморфности f — равенство

$$\triangle\left(\partial fB\left(x_0,\varepsilon_2\right), \partial fB\left(x_0,\varepsilon_1\right); fR\right) = f\big(\triangle\left(\partial B(x_0,\varepsilon_2), \partial B(x_0,\varepsilon_1); R\right)\big).$$

Рассмотрим функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}, & t\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2), \\ 0, & t\in\mathbb{R}\setminus(\varepsilon_1,\varepsilon_2). \end{cases}$$

В силу определения кольцевого Q-гомеоморфизма относительно p-модуля замечаем, что

$$\mathrm{cap_p}\ (fB(x_0,\varepsilon_2), \overline{fB(x_0,\varepsilon_1)}) \le \frac{1}{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^p} \int\limits_{R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q(x)\ dm(x). \tag{6}$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получаем

$$\mathrm{cap_p}(fB(x_0,4\varepsilon), f\overline{B(x_0,2\varepsilon)}) \le \frac{1}{(2\varepsilon)^p} \int\limits_{B(x_0,4\varepsilon)} Q(x)\, dm(x). \tag{7}$$

С другой стороны, в силу неравенства (4) следует оценка

$$\mathrm{cap_p}(fB(x_0,4\varepsilon), f\overline{B(x_0,2\varepsilon)}) \ge C_{n,p}\Big[m\big(fB(x_0,2\varepsilon)\big)\Big]^{\frac{n-p}{n}}, \tag{8}$$

где $C_{n,p}$ — положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (7) и (8), имеем

$$\frac{m\big(fB(x_0,2\varepsilon)\big)}{m\big(B(x_0,2\varepsilon)\big)} \leqslant c_{n,p} \left[\ \fint\limits_{B(x_0,4\varepsilon)} Q(x)\, dm(x)\right]^{\frac{n}{n-p}}, \tag{9}$$

где $c_{n,p}$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Далее, выбирая в (6) $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получаем

$$\mathrm{cap_p}\,\left(fB(x_0,2\varepsilon), f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right) \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x). \tag{10}$$

С другой стороны, в силу неравенства (5) имеем

$$\mathrm{cap_p}\,\left(fB(x_0,2\varepsilon), f\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right) \ge \left(\widetilde{C}_{n,p}\frac{d^p\big(fB(x_0,\varepsilon)\big)}{m^{1-n+p}(fB(x_0,2\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{11}$$

где $\widetilde{C}_{n,p}$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Комбинируя (10) и (11), получаем

$$\frac{d\big(fB(x_0,\varepsilon)\big)}{\varepsilon} \le \gamma_{n,p}\left(\frac{m\big(fB(x_0,2\varepsilon)\big)}{m\big(B(x_0,2\varepsilon)\big)}\right)^{\frac{1-n+p}{p}} \left(\ \fint\limits_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-1}{p}}.$$

Эта оценка вместе с (9) дает неравенство

$$\frac{d\big(fB(x_0,\varepsilon)\big)}{\varepsilon} \le \lambda_{n,p}\left(\ \fint\limits_{B(x_0,4\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n(1-n+p)}{p(n-p)}} \left[\ \fint\limits_{B(x_0,2\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)\right]^{\frac{n-1}{p}}.$$

Переходя к верхнему пределу при $\varepsilon\to 0$, находим

$$L(x_0,f) = \limsup_{x\to x_0}\frac{\big|f(x)-f(x_0)\big|}{|x-x_0|} \le \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d\big(fB(x_0,\varepsilon)\big)}{\varepsilon} \le \lambda_{n,p}\,Q_0^{\frac{1}{n-p}},$$

где $\lambda_{n,p}$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Теорема 2. *Пусть G и G' — области в $\mathbb{R}^n$, $Q\colon G\to[0,\infty]$ — локально интегрируемая функция и $f\colon G\to G'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $n-1<p<n$ с условием*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty \quad \forall x_0\in G.$$

Тогда гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

Замечание. В соответствии с леммой 10.6 в [12] конечно липшицевые отображения имеют N-свойство относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Построим пример кольцевого Q-гомеоморфизма относительно p-модуля в фиксированной точке, не являющегося конечно липшицевым.

Пример. Предположим, что $n-1<p<n$. Пусть $f\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}(e/t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}$$

при $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $Q(x)=\ln\dfrac{e}{|x|}$ в точке $x_0=0$. Очевидно, что $q_{x_0}(t)=\ln\dfrac{e}{t}$. Рассмотрим кольцо $R=R(0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<1$. Заметим, что отображение f преобразует кольцо $R(0,r_1,r_2)$ в кольцо $\widetilde{R}=\widetilde{R}\,(0,\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2)$, где

$$\widetilde{r}_i=\left(1+\frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r_i}^{1}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}(e/t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}},\quad i=1,2.$$

Обозначим через Γ семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0,r_1)$ и $S(0,r_2)$ в кольце R. Тогда p-модуль семейства кривых $f\Gamma$ вычисляется в явном виде (см., например, соотношение (2) в [1, с. 177])

$$M_p(f\Gamma)=\omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left((\widetilde{r}_1)^{\frac{p-n}{p-1}}-(\widetilde{r}_2)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}. \tag{12}$$

Подставляя в (12) значения $\widetilde{r}_1$ и $\widetilde{r}_2$, определенные выше, получаем

$$M_p(f\Gamma)=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\ln^{\frac{1}{p-1}}(e/t)}\right)^{p-1}}.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 гомеоморфизм f является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $x_0=0$ с $Q(x)=\ln\dfrac{e}{|x|}$. Заметим, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\;\;\fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)}Q(x)\,dm(x)=\infty.$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталя, $\dfrac{|f(x)|}{|x|}\to\infty$ при $x\to 0$, т. е. гомеоморфизм f не является липшицевым в нуле.

1. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Adv. Theory Riemann Surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, New York, 1969), Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175 – 193.
2. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
3. *Салимов Р. Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 6. – С. 920 – 930.
4. *Салимов Р. Р.* Локальное поведение обобщенных квазиизометрий // Доп. НАН України. – 2011. – **6**. – С. 23 – 28.
5. *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 53 – 64.
6. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
7. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings in complex analysis and its applications. – Vienna: Int. Atom. Energy Agency, 1976. – Vol. 2.
8. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arch. mat. – 1975. – **13**. – P. 131 – 144.
9. *Shlyk V. A.* On the equality between p-capacity and p-modulus // Sib. Mat. Zh. – 1993. – **34**, № 6. – P. 216 – 221.
10. *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. – **338**. – P. 307 – 340.
11. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185 – 206.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monogr. Math. – New York: Springer, 2009. – 367 p.

Получено 12.10.11,
после доработки — 09.01.13