УДК 517.96

С. А. Плакса, В. С. Шпаковский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОМ ВЫЧЕТЕ МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ С ДВУМЕРНЫМ РАДИКАЛОМ

For monogenic (continuous and Gâteaux-differentiable) functions taking values in a three-dimensional harmonic algebra with two-dimensional radical, we calculate the logarithmic residue. It is established that the logarithmic residue depends not only on the zeros and singular points of a function, but also on the points at which the function takes values in the radical of a harmonic algebra.

Обчислено логарифмічний лишок для моногенних (неперервних диференційовних за Гато) функцій зі значеннями в тривимірній гармонічній алгебрі з двовимірним радикалом. При цьому встановлено, що на логарифмічний лишок впливають не тільки нулі й особливі точки функції, але й точки, в яких функція набуває значення в радикалі гармонічної алгебри.

Пусть $\mathbb{A}_3$ — трехмерная коммутативная ассоциативная банахова алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, базис которой состоит из единицы алгебры 1 и элементов ρ_1, ρ_2, для которых выполняются правила умножения $\rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0$, $\rho_1^2 = \rho_2$.

Рассмотрим базис

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = i + \rho_2, \qquad e_3 = (1-i)\rho_1$$

алгебры $\mathbb{A}_3$, удовлетворяющий условию

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0,$$

т. е. являющийся *гармоническим* (см. [1, 2]).

Выделим в алгебре $\mathbb{A}_3$ линейную оболочку $E_3 := \big\{\zeta = x + ye_2 + ze_3 \colon x, y, z \in \mathbb{R}\big\}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, порожденную векторами гармонического базиса 1, e_2, e_3.

Непрерывная функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ называется *моногенной* в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ дифференцируема по Гато в каждой точке этой области, т. е. если для каждого $\zeta \in \Omega_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ алгебры $\mathbb{A}_3$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\Phi(\zeta+\varepsilon h) - \Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3.$$

$\Phi'(\zeta)$ называется *производной Гато* функции Φ в точке ζ.

В работе [3] показано, что каждая моногенная в области Ω_ζ функция Φ со значениями в алгебре $\mathbb{A}_3$ удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа. В работе [4] для моногенных функций со значениями в алгебре $\mathbb{A}_3$ доказаны теоремы Коши для поверхностного и криволинейного интеграла, интегральная формула Коши и теорема Морера, а в работе [5] установлены тейлоровские и лорановские разложения моногенных функций и дана классификация их особых точек.

Как известно, в различных вопросах теории аналитических функций комплексной переменной и ее приложениях важную роль играют геометрические принципы (см., например, [6]). В частности, принцип аргумента существенно используется при решении краевых задач [7, 8].

В его основе лежит теорема о сумме логарифмических вычетов (см., например, [6, с. 205]), устанавливающая связь контурного интеграла от логарифмической производной $g'(\xi)/g(\xi)$ с топологическим инвариантом, которым является разность нулей и полюсов функции $g(\xi)$, голоморфной вне особых точек.

В работе [9] вычислен логарифмический вычет моногенных функций, принимающих значения в двумерной алгебре с радикалом, ассоциированной с бигармоническим уравнением. При этом установлено, что в отличие от случая мероморфных функций комплексной переменной на значение логарифмического вычета оказывают влияние не только нули и полюсы, но и точки, в которых функция принимает значение в радикале алгебры. В данной работе аналоги результатов работы [9] устанавливаются для логарифмической производной $\Phi'\big(\zeta)(\Phi(\zeta)\big)^{-1}$ моногенной функции $\Phi(\zeta)$ переменной $\zeta = x + ye_2 + ze_3$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. Предварительные сведения. Множество $\mathcal{I} := \big\{\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 \colon \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\big\}$, являющееся единственным максимальным идеалом алгебры $\mathbb{A}_3$, образует радикал этой алгебры. В нем содержатся все необратимые элементы алгебры $\mathbb{A}_3$.

Следовательно, элемент $a = a_0 + a_1\rho_1 + a_2\rho_2$, где a_0, a_1, $a_2 \in \mathbb{C}$, обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, при этом обратный елемент a^{-1} представляется равенством

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\rho_1 - \left(\frac{a_2}{a_0^2} - \frac{a_1^2}{a_0^3}\right)\rho_2,$$

а разложение логарифмической функции, определенной в работе [10], по базису $\{1, \rho_1, \rho_2\}$ имеет вид

$$\ln a := \ln a_0 + \frac{a_1}{a_0}\rho_1 + \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{2a_0^2}\right)\rho_2, \tag{1}$$

где $\ln a_0$ — главная ветвь логарифмической функции комплексной переменной a_0.

Радикалу $\mathcal{I}$ соответствует линейный непрерывный мультипликативный функционал $f\colon \mathbb{A}_3 \to \mathbb{C}$, ядром которого является $\mathcal{I}$ и при этом $f(1) = 1$.

Условимся, что всюду в дальнейшем переменные x, y, z принадлежат пространству $\mathbb{R}$, а также действительными числами являются значения переменных x, y, z, снабженных нижними индексами, например x_0, z_1 и т. п. Области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ поставим в соответствие область $\Omega_\zeta := \big\{\zeta = x + ye_2 + ze_3 \colon (x, y, z) \in S\big\}$ в E_3.

Пусть Ω — выпуклая в направлении оси Oz область пространства $\mathbb{R}^3$. Как и в работе [3], введем в рассмотрение линейный оператор A, который каждой моногенной функции $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ ставит в соответствие голоморфную функцию $F\colon D \to \mathbb{C}$, определенную в области $D := \big\{\xi = f(\zeta) \colon \zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta\big\}$ комплексной плоскости равенством $F(\xi) := f\big(\Phi(\zeta)\big)$, где $\zeta = x + ye_2 + ze_3$ и $\xi = x + iy$.

В [3] показано, что если область Ω является выпуклой в направлении оси Oz, то каждая моногенная функция $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ представляется в виде

$$\Phi(\zeta) = F(\xi) + \Big((1-i)zF'(\xi) + F_1(\xi)\Big)\rho_1 +$$

$$+\Big(yF'(\xi) - iz^2F''(\xi) + (1-i)zF_1'(\xi) + F_2(\xi)\Big)\rho_2 \quad \forall \zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Omega_\zeta, \tag{2}$$

где F, F_1, F_2 — однозначно определяемые голоморфные функции комплексной переменной $\xi = x + iy \in D$, в частности $F = A\Phi$. Формула (2) дает конструктивное описание всех моногенных функций $\Phi\colon \Omega_\zeta \to \mathbb{A}_3$ с помощью голоморфных функций комплексной переменной. Кроме того, формулой (2) задается моногенное продолжение функции Φ в цилиндрическую область $\Pi_\zeta := \big\{\zeta = x + ye_2 + ze_3\colon x + iy \in D\big\}$.

Поэтому, рассматривая далее моногенные функции переменной $\zeta = x + ye_2 + ze_3$, будем предполагать, что они заданы в неограниченных областях вида Π_ζ.

2. Логарифмический вычет моногенных функций, принимающих значения в алгебре $\mathbb{A}_3$. Пусть $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3 \in E_3$ и функция $\Phi\colon \mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R) \to \mathbb{A}_3$ моногенна в кольцевой цилиндрической области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R) := \big\{\zeta = x+ye_2+ze_3\colon 0 < (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < R^2, z \in \mathbb{R}\big\}$.

Если при этом логарифмическая производная $\Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1}$ также является моногенной функцией в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)$, то *логарифмическим вычетом* функции Φ в точке ζ_0 назовем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1}d\zeta, \qquad (3)$$

где $\Gamma_{\zeta_0}(r) := \big\{\zeta = x + ye_2 + z_0e_3\colon (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\big\}$ и $r < R$.

В теореме 3 работы [4] установлен аналог интегральной теоремы Коши для моногенных функций, принимающих значения в алгебре $\mathbb{A}_3$, а именно показано, что интеграл от моногенной функции по замкнутой жордановой спрямляемой кривой, гомотопной точке из области моногенности, равен нулю. Из этой теоремы следует, что величина логарифмического вычета не зависит от r при $0 < r < R$ и, кроме того, справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma_{\zeta_1}(r)} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1}d\zeta = \int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1}d\zeta \quad \forall\zeta_1 = \zeta_0 + z_1e_3,$$

т. е. логарифмические вычеты функции Φ во всех точках прямой $\{\zeta_0 + ze_3\colon z \in \mathbb{R}\}$ равны.

В работе [5] доказано, что любая моногенная в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)$ функция Φ представима в виде суммы сходящегося ряда Лорана

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\zeta - \zeta_0)^n, \qquad (4)$$

где $(\zeta-\zeta_0)^n := \big((\zeta-\zeta_0)^{-1}\big)^{-n}$ при $n = -1, -2, \ldots$ и коэффициенты d_n определяются формулами

$$d_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta} \Phi(\tau)\Big((\tau-\zeta_0)^{-1}\Big)^{n+1}d\tau, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

в которых γ_ζ — любая замкнутая жорданова спрямляемая кривая в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)$, один раз охватывающая прямую $\{\zeta_0 + ze_3\colon z \in \mathbb{R}\}$.

Очевидно, что имеет смысл рассматривать логарифмический вычет не только в нулях и особых точках функции Φ, но и в тех точках, где значения функции Φ принадлежат радикалу $\mathcal{I}$ алгебры $\mathbb{A}_3$.

Заметим, что если $\Phi(\zeta_0) \in \mathcal{I}$, то для существования интеграла (3) необходимо, чтобы существовало $R > 0$ такое, что множество $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ не содержит точек ζ таких, что $\Phi(\zeta) \in \mathcal{I}$. Действительно, если для всех сколь угодно малых $R > 0$ существуют точки $\zeta \in \mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$, для которых $\Phi(\zeta) \in \mathcal{I}$, то в этом случае внутренняя точка $\xi_0 = f(\zeta_0)$ области D является предельной точкой множества нулей голоморфной функции F, входящей в равенство (2). Тогда в соответствии с теоремой единственности [6, с. 118] голоморфных функций комплексной переменной $F \equiv 0$ и с учетом равенства (2) приходим к выводу, что все значения функции Φ принадлежат радикалу $\mathcal{I}$, а значит, интеграл (3) не существует.

Кроме того, легко устанавливается, что для точки ζ_0 существует $R > 0$ такое, что множество $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ не содержит точек ζ, в которых $\Phi(\zeta) \in \mathcal{I}$, тогда и только тогда, когда в разложении (4) существует коэффициент d_n, не принадлежащий радикалу $\mathcal{I}$. В этом случае равенство (4) запишем в виде

$$\Phi(\zeta) = \varphi(\zeta) + \psi(\zeta)\rho_1 + \phi(\zeta)\rho_2, \tag{5}$$

где

$$\varphi(\zeta) := \sum_{n\colon d_n \notin \mathcal{I}} d_n(\zeta - \zeta_0)^n, \qquad \psi(\zeta)\rho_1 + \phi(\zeta)\rho_2 := \sum_{n\colon d_n \in \mathcal{I}} d_n(\zeta - \zeta_0)^n$$

и d_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — коэффициенты ряда Лорана (4).

В следующей лемме вычисляется логарифмический вычет функции (5) в точке ζ_0 в предположении, что в ряде Лорана (4) существует $\min\{n\colon d_n \notin \mathcal{I}\}$.

Лемма 1. *Пусть $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3$ и в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ функция Φ представима в виде*

$$\Phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{n_0}\varphi_0(\zeta) + \psi(\zeta)\rho_1 + \phi(\zeta)\rho_2, \tag{6}$$

где n_0 — некоторое целое число, φ_0 — моногенная в цилиндрической области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R) := \big\{\zeta = x + ye_2 + ze_3\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2, z \in \mathbb{R}\big\}$ функция, не принимающая в этой области значений в радикале $\mathcal{I}$, а ψ и ϕ — моногенные в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ функции. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1} d\zeta = n_0 \quad \forall r \in (0, R).$$

Доказательство. Следствием разложения (6) функции Φ является равенство

$$\Phi'(\zeta) = n_0(\zeta - \zeta_0)^{n_0-1}\varphi_0(\zeta) + (\zeta - \zeta_0)^{n_0}\varphi_0'(\zeta) + \psi'(\zeta)\rho_1 + \phi'(\zeta)\rho_2 \tag{7}$$

при всех $\zeta \in \mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$.

Учитывая то, что значения $\varphi_0(\zeta)$ обратимы при всех $\zeta \in \mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$, записываем равенство (6) в виде

$$\Phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{n_0}\varphi_0(\zeta)\Big(1 + \psi(\zeta)\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}(\zeta - \zeta_0)^{-n_0}\rho_1 + \phi(\zeta)\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}(\zeta - \zeta_0)^{-n_0}\rho_2\Big)$$

и убеждаемся в справедливости равенства

$$\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1} = (\zeta - \zeta_0)^{-n_0}(\varphi_0(\zeta))^{-1}\bigg[1 - \psi(\zeta)\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}(\zeta - \zeta_0)^{-n_0}\rho_1 +$$

$$+\Big(\big(\psi(\zeta)\big)^2\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-2}(\zeta-\zeta_0)^{-2n_0}-\phi(\zeta)\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}(\zeta-\zeta_0)^{-n_0}\Big)\rho_2\Bigg] \tag{8}$$

при всех $\zeta\in\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)$.

Поскольку φ_0 — моногенная в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R)$ функция и $\varphi_0(\zeta)\notin\mathcal{I}$ при всех $\zeta\in\mathcal{K}_{\zeta_0}(R)$, функции $\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}$, $\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-2}$ также моногенны в $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R)$ и для их производных Гато справедливы равенства

$$\Big(\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}\Big)'=-\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-2}\varphi_0'(\zeta),\qquad \Big(\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-2}\Big)'=-2(\varphi_0(\zeta))^{-3}\varphi_0'(\zeta).$$

Поэтому функции

$$\eta(\zeta):=\psi(\zeta)\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}(\zeta-\zeta_0)^{-n_0},$$

$$\chi(\zeta):=\phi(\zeta)\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}(\zeta-\zeta_0)^{-n_0}-\frac{1}{2}\big(\psi(\zeta)\big)^2\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-2}(\zeta-\zeta_0)^{-2n_0}$$

являются моногенными в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)$.

Теперь с учетом равенств (7), (8) преобразуем выражение (3) к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)}\Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta=\frac{n_0}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)}(\zeta-\zeta_0)^{-1}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)}\varphi_0'(\zeta)(\varphi_0(\zeta))^{-1}d\zeta+\rho_1\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)}\eta'(\zeta)d\zeta+$$

$$+\rho_2\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_0}(r)}\chi'(\zeta)d\zeta=:I_1+I_2+\rho_1I_3+\rho_2I_4\,.$$

В теореме 6 из [4] установлен аналог интегральной формулы Коши для моногенной функции, принимающей значения в алгебре $\mathbb{A}_3$, в силу которого справедливо равенство $I_1=n_0$. Поскольку функция $\varphi_0'(\zeta)\big(\varphi_0(\zeta)\big)^{-1}$ моногенна в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R)$, используя аналог интегральной теоремы Коши для моногенных функций со значениями в $\mathbb{A}_3$ (см. теорему 3 из [4]), получаем равенство $I_2=0$. Наконец, в силу непрерывности функций η, χ на кривой $\Gamma_{\zeta_0}(r)$ справедливы равенства $I_3=I_4=0$.

Лемма доказана.

В теореме 5 работы [5] показано, что изолированная точечная особенность моногенной функции может быть только устранимой, а в случае, когда функция имеет неустранимую особенность в точке ζ_0, особыми являются также все точки прямой $\{\zeta_0+ze_3\colon z\in\mathbb{R}\}$. Кроме того, к функции Φ, моногенной в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R)$, применима лемма 1 из [3], в силу которой $\Phi(\zeta_0+ze_3)-\Phi(\zeta_0)\in\mathcal{I}$ при всех $z\in\mathbb{R}$. Следовательно, если в точке ζ_0 значение моногенной в $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R)$ функции Φ принадлежит радикалу $\mathcal{I}$, то значения функции Φ во всех точках прямой $\{\zeta_0+ze_3\colon z\in\mathbb{R}\}$ также принадлежат радикалу $\mathcal{I}$.

В случае, когда функция Φ моногенна в области $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0,R)$ и не принимает в этой области значений в радикале $\mathcal{I}$, назовем прямую $\{\zeta_0+ze_3\colon z\in\mathbb{R}\}$ *сингулярностью логарифмической* *производной* функции Φ, если точка ζ_0 является неустранимой особой точкой функции Φ или же $\Phi(\zeta_0) \in \mathcal{I}$. Если при этом функция Φ представима в виде (6), то показатель степени n_0 в разложении (6) назовем *показателем сингулярности* логарифмической производной функции Φ в точке ζ_0. Очевидно, что $n_0 = \min\{n\colon d_n \notin \mathcal{I}\}$, где d_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — коэффициенты ряда Лорана (4).

Справедлива следующая теорема о сумме логарифмических вычетов для моногенных функций, принимающих значения в алгебре $\mathbb{A}_3$.

Теорема 1. *Пусть D — область в комплексной плоскости и функция Φ моногенна всюду в области $\Pi_\zeta := \big\{\zeta = x + ye_2 + ze_3\colon x + iy \in D\big\}$, за исключением, быть может, некоторого множества особых точек. Пусть область G, компактно принадлежащая области D, ограничена замкнутой жордановой спрямляемой кривой γ и такая, что в области $G_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3\colon x + iy \in G\}$ содержится лишь конечное множество $\{L_k\}_{k=1}^m$ сингулярностей $L_k := \{\zeta_k + ze_3\colon z \in \mathbb{R}\}$ логарифмической производной функции Φ, при этом показатель сингулярности n_k логарифмической производной функции Φ в точке ζ_k конечен при всех $k = 1, 2, \ldots, m$, а граница ∂G_ζ области G_ζ не содержит указанных сингулярностей. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1} d\zeta = \sum_{k=1}^{m} n_k, \tag{9}$$

где Γ_ζ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая на поверхности ∂G_ζ, гомотопная кривой $\{x + ye_2\colon x + iy \in \gamma\}$.

Доказательство. Пусть положительное число r такое, что множества $\mathcal{K}_{\zeta_k}(r)$, $k = \overline{1, m}$, содержатся в области G_ζ и попарно не пересекаются. Тогда, используя аналог интегральной теоремы Коши для моногенных функций со значениями в $\mathbb{A}_3$ (см. теорему 3 из [4]), убеждаемся в справедливости равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_{\zeta_k}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1} d\zeta. \tag{10}$$

Теперь для завершения доказательства остается применить лемму 1 к каждому из интегралов в правой части равенства (10).

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1} d\zeta = N_F - P_F, \tag{11}$$

где N_F и P_F — соответственно число нулей и полюсов функции $F = A\Phi$ в области $\big\{\xi = x + iy\colon \zeta = x + ye_2 + ze_3 \in G_\zeta\big\}$ с учетом их кратности.

Доказательство. Поскольку кривая Γ_ζ не содержит сингулярностей логарифмической производной функции Φ, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)\big(\Phi(\zeta)\big)^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\,\Delta_{\Gamma_\zeta} \ln \Phi(\zeta), \tag{12}$$

где через $\Delta_{\Gamma_\zeta} \ln \Phi(\zeta)$ обозначено приращение функции $\ln \Phi(\zeta)$ при обходе ζ кривой Γ_ζ.

Следствием равенств (1), (2) является равенство

$$\ln \Phi(\zeta) = \ln F(\xi) + \frac{(1-i)zF'(\xi) + F_1(\xi)}{F(\xi)}\,\rho_1 +$$

$$+\left(\frac{yF'(\xi) - iz^2F''(\xi) + (1-i)zF_1'(\xi) + F_2(\xi)}{F(\xi)} - \frac{\big((1-i)zF'(\xi) + F_1(\xi)\big)^2}{2\big(F(\xi)\big)^2}\right)\rho_2 =:$$

$$=: \ln F(\xi) + B_1(\zeta)\rho_1 + B_2(\zeta)\rho_2$$

при всех $\zeta = x + ye_2 + ze_3 \in \Gamma_\zeta$, где $\xi = x + iy$.

Поскольку функция Φ принимает на контуре Γ_ζ значения, не принадлежащие радикалу $\mathcal{I}$, учитывая равенство (2), заключаем, что функция $F(\xi)$ не обращается в нуль на кривой γ в комплексной плоскости. Поэтому функции B_1, B_2 непрерывны на кривой Γ_ζ и, следовательно, их приращение при обходе этой кривой равно нулю.

Таким образом, $\Delta_{\Gamma_\zeta} \ln \Phi(\zeta) = \Delta_\gamma \ln F(\xi)$ и с учетом принципа аргумента аналитических функций комплексной переменной (см., например, [6, с. 206]) равенство (12) преобразовывается к виду (11).

Теорема доказана.

Заметим, что следствием равенств (9), (11) является равенство

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = N_F - P_F,$$

справедливое при выполнении условий теоремы 1.

1. *Ketchum P. W.* Analytic functions of hypercomplex variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**, № 4. – P. 641 – 667.
2. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
3. *Плакса С. А., Шпаковский В. С.* Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1078 – 1091.
4. *Плакса С. А., Шпаковский В. С.* Интегральные теоремы для дифференцируемых функций в трехмерной гармонической алгебре // Доп. НАН України. – 2010. – **5**. – С. 23 – 30.
5. *Шпаковский В. С.* Степенные ряды и ряды Лорана в трехмерной гармонической алгебре // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 314 – 321.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: В 2 ч. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
8. *Гахов Ф.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
9. *Грищук С. В., Плакса С. А.* О логарифмическом вычете моногенных функций бигармонической переменной // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 227 – 234.
10. *Lorch E. R.* The theory of analytic functions in normed abelian vector rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **54**, № 3. – P. 414 – 425.

Получено 29.05.12