УДК 517.988.52

Н. Н. Ганиходжаев (Междунар. ислам. ун-т Малайзии),
У. У. Жамилов (Междунар. ислам. ун-т Малайзии, Куантан;
Ин-т математики при Нац. ун-те Узбекистана, Ташкент),
Р. Т. Мухитдинов (Бухар. инж.-техн. ин-т высших технологий, Узбекистан)

НЕЭРГОДИЧЕСКИЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДВУПОЛОЙ ПОПУЛЯЦИИ

We describe the construction of quadratic operators of a two-sex population that differs from the model introduced by Lyubich and give an example of a nonergodic quadratic operator of a two-sex population.

Описано конструкцію квадратичних операторів двополої популяції, що відмінна від моделі, вивченої в роботах Любича, та наведено приклад неергодичного квадратичного оператора двополої популяції.

1. Введение. Квадратичный стохастический оператор (КСО) (см. [2, 3]), отображающий симплекс

$$S^{N-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_N) \in R^N : x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \right\} \tag{1}$$

в себя, имеет вид

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{N} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

где $p_{ij,k}$ — коэффициенты наследственности и

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \qquad \sum_{k=1}^{N} p_{ij,k} = 1, \quad i, j, k = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Такие операторы часто встречаются при изучении динамики свободной популяции, т. е. популяции, в которой не определяется пол [1]. Траектория $\{x^{(n)}\}$ КСО (2) с начальной точкой $x^{(0)} \in S^{N-1}$ определяется как $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Множество предельных точек траектории $\{x^{(n)}, n = 0, 1, \ldots\}$ обозначим через $\omega(x^0)$.

Одна из основных задач при рассмотрении таких операторов заключается в изучении предельного поведения их траекторий. Эта проблема в основном достаточно полно исследована в классе так называемых вольтерровских КСО [4 – 6], которые определяются равенствами (2), (3) и дополнительным условием

$$p_{ij,k} = 0 \quad \text{при} \quad k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k = 1, \ldots, N.$$

Приведем некоторые необходимые определения и обозначения из теории КСО.

Определение 1. *Точка $a \in S^{N-1}$ называется неподвижной точкой КСО* (2), *если $V(a) = a$.*

Определение 2. *КСО* (2) *называется регулярным, если для любой начальной точки $x \in S^{N-1}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} V(x^{(n)})$.*

Заметим, что предельная точка траектории является неподвижной точкой оператора.

Определение 3. *КСО* (2) *называется эргодическим, если для любой начальной точки* $x \in S^{N-1}$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V(x^{(k)}).$$

На основе численных расчетов Улам [12] предположил, что любой КСО эргодичен. М. И. Захаревич [10] доказал, что это предположение, вообще говоря, неверно, построив пример неэргодического КСО на двумерном симплексе. Далее в [11] было установлено необходимое и достаточное условие неэргодичности вольтерровских КСО, определенных на двумерном симплексе.

Заметим, что регулярный КСО является эргодическим, а обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пусть π — перестановка множества индексов $\{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда можно определить взаимно однозначное отображение $T_\pi : S^{N-1} \to S^{N-1}$ следующим образом:

$$T_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \big(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(N)}\big).$$

Очевидно что оператор $T_\pi^{-1} V T_\pi$ является КСО и предельное поведение траекторий оператора $T_\pi^{-1} V T_\pi$ совпадает с предельным поведением траекторий оператора V [6].

В этой работе мы приведем конструкцию одного класса квадратичных операторов двуполой популяции, отличную от операторов, изученных в работах Любича (см. [3]). Напомним некоторые определения и понятия, необходимые для дальнейшего изложения [9].

Пусть (Λ, L) — конечный граф без петель и кратных ребер, где Λ — множество вершин графа, а L — множество ребер и $\{\Lambda_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — совокупность связных компонент графа, где $n \geq 1$. Пусть Φ — некоторое конечное множество, назовем его множеством аллелей.

Функцию $\sigma \colon \Lambda \to \Phi$ будем называть клеткой. Обозначим через Ω совокупность всех клеток. Для произвольных двух клеток σ', $\sigma'' \in \Omega$ определим множество возможных их потомков

$$\Omega(\Lambda, \sigma', \sigma'') = \big\{\sigma \in \Omega : \sigma|_{\Lambda_i} = \sigma'|_{\Lambda_i} \ \text{ или } \ \sigma|_{\Lambda_i} = \sigma''|_{\Lambda_i}, i = 1, 2, \ldots, n\big\}$$

и коэффициенты наследственности $p_{\sigma'\sigma'',\sigma}$:

$$p_{\sigma'\sigma'',\sigma} = \begin{cases} \geq 0, & \text{если} \quad \sigma \in \Omega(\Lambda, \sigma', \sigma''), \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$p_{\sigma'\sigma'',\sigma} = p_{\sigma''\sigma',\sigma} \qquad \text{и} \qquad \sum_{\sigma\in\Omega} p_{\sigma'\sigma'',\sigma} = 1.$$

2. Конструкция операторов двуполой популяции. В дальнейшем будем полагать $\Lambda_0 = \{x^0\}$, т. е. связная компонента Λ_0 состоит из единственной точки.

Пусть $G = \{f, m\}$ — множество возможных значений пола.

Функция $\sigma\colon \Lambda \to G \cup \Phi$ такая, что $\sigma(x^0) \in G$ и $\sigma\colon \Lambda \setminus \{x^0\} \to \Phi$, называется клеткой, т. е. клетка определяется полом и набором аллелей на $\Lambda \setminus \{x^0\}$.

Обозначим через $\Omega_f = \big\{\sigma \in \Omega\colon \sigma(x^0) = f\big\}$ множество клеток женского пола, а через $\Omega_m = \big\{\sigma \in \Omega\colon \sigma(x^0) = m\big\}$ множество клеток мужского пола. Очевидно, что

$$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_m, \qquad \Omega_f \cap \Omega_m = \varnothing.$$

Пусть $S(\Lambda, G \cup \Phi)$ — множество всех вероятностных распределений, заданных на конечном множестве Ω.

Вид пространства Φ возможных значений функции σ, как и в задачах статистической механики, может существенно упростить или усложнить теорию. Ниже будем считать, что Φ — конечное множество.

Пусть $\{\Lambda_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — совокупность связных компонент графа (Λ, L).

Для произвольных двух клеток $\sigma', \sigma'' \in \Omega$ определим множество возможных их потомков

$$\Omega(\Lambda, \sigma', \sigma'') = \begin{cases} \varnothing, & \text{если} \quad \sigma'|_{\Lambda_0} = \sigma''|_{\Lambda_0}, \\ \sigma \in \Omega: \quad \sigma|_{\Lambda_i} = \sigma'|_{\Lambda_i} & \text{или} \quad \sigma|_{\Lambda_i} = \sigma''|_{\Lambda_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ & \text{если} \quad \sigma'|_{\Lambda_0} \neq \sigma''|_{\Lambda_0}. \end{cases} \tag{4}$$

и коэффициенты наследственности:

$$p_{\sigma'\sigma'',\sigma} = \begin{cases} \geq 0, & \text{если} \quad \sigma \in \Omega(\Lambda, \sigma', \sigma''), \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases} \tag{5}$$

где

$$p_{\sigma'\sigma'',\sigma} = p_{\sigma''\sigma',\sigma} \qquad \text{и} \qquad \sum_{\sigma \in \Omega} p_{\sigma'\sigma'',\sigma} = 2.$$

Также предположим что $p_{\sigma'\sigma'',\sigma} = p_{\sigma'\sigma'',\tilde{\sigma}}$, если σ и $\tilde{\sigma}$ отличаются только полом.

Двуполый КСО, действующий на симплексе $S(\Lambda, G \cup \Phi)$ и задаваемый коэффициентами наследственности (5), определяется следующим образом: для произвольной меры $\lambda \in S(\Lambda, G \cup \Phi)$ мера $V(\lambda) = \lambda' \in S(\Lambda, G \cup \Phi)$ определяется равенством

$$\lambda'(\sigma) = \sum_{\sigma', \sigma'' \in \Omega} p_{\sigma'\sigma'',\sigma} \lambda(\sigma') \lambda(\sigma'') \tag{6}$$

для любой клетки $\sigma \in \Omega$.

Множество вероятностных распределений $\widetilde{S} = \left\{\lambda \in S(\Lambda, G \cup \Phi)\colon \lambda(\Omega_f) = \lambda(\Omega_m) = \dfrac{1}{2}\right\}$ назовем гиперсимплексом. Предположим, что доли женских и мужских клеток не меняются в следующих поколениях, т. е. гиперсимплекс $\widetilde{S}$ является инвариантным подмножеством оператора (6). Двуполый КСО назовем вольтерровским, если граф (Λ, L) состоит только из двух связных компонент Λ_0 и Λ_1. Если Λ_1 также состоит из единственной точки, т. е. клетка определяется полом и только одной аллелью, такую клетку назовем простейшей. В данной статье изучается случай, когда граф (Λ, L) состоит из двух точек $\Lambda_0 = \{x^0\}$, $\Lambda_1 = \{x^1\}$.

3. Крайние вольтерровские операторы двуполой популяции. Пусть граф (Λ, L) состоит из двух точек $\Lambda_0 = \{x^0\}$, $\Lambda_1 = \{x^1\}$ и множества аллелей $\Phi = \{1, \ldots, N\}$. Двуполый вольтерровский КСО назовем крайним, если $p_{\sigma'\sigma'',\sigma'} = 1$ или 0, где $\sigma'(x^0) \neq \sigma''(x^0)$. Поскольку $p_{(m,i)(f,j),(m,k)} = p_{(f,i)(m,j),(f,k)}$, для данного двуполого крайнего вольтерровского КСО на множестве аллелей $\Phi = \{1, \ldots, N\}$ определим следующее бинарное отношение.

Определение 4. *Будем говорить, что аллель i доминирует над аллелью j, и обозначать $i \succ j$, если $p_{(m,i)(f,j),(.,i)} = p_{(f,i)(m,j),(.,i)} = 1$.*

Применяя это бинарное отношение, множество аллелей $\Phi = \{1, \ldots, N\}$ можно снабдить структурой ориентированного графа. Поскольку любые две вершины соединены ребром, граф полон, т. е. является турниром. Тогда двуполый крайний вольтерровский КСО задает набор циклов соответствующего турнира, где максимальный цикл называется гамильтоновым. В этой статье мы ограничимся случаями $N = 1, 2, 3$ и докажем, что двуполый крайний вольтерровский КСО не эргодичен, если соответствующий граф содержит гамильтонов цикл.

***3.1. Случай* $|\Phi| = 1$.** Пусть $\Phi = \{1\}$. Тогда множество всех конфигураций имеет вид

$$\Omega = \{\sigma_1 = \{f, 1\},\ \sigma_2 = \{m, 1\}\}.$$

Положим $\lambda_i = \lambda(\sigma_i)$, $i = 1, 2$, тогда легко проверить, что гиперсимплекс $\widetilde{S} = \left\{\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\right\}$ и соответствующий оператор (6) принимает вид

$$\lambda'(\sigma_1) = 2\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2},$$

$$\lambda'(\sigma_2) = 2\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

***3.2. Случай* $|\Phi| = 2$.** Пусть $\Phi = \{1, 2\}$. Множество всех конфигураций имеет вид

$$\Omega = \{\sigma_1 = \{f, 1\}, \sigma_2 = \{f, 2\}, \sigma_3 = \{m, 1\}, \sigma_4 = \{m, 2\}\}.$$

Ясно, что

$$\Omega_f = \{\sigma_1, \sigma_2\}, \qquad \Omega_m = \{\sigma_3, \sigma_4\}.$$

Определим для произвольных σ', $\sigma'' \in \Omega$ множества $\Omega(\Lambda, \sigma', \sigma'')$, как в (4).

Положим $\lambda_i = \lambda(\sigma_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда гиперсимплекс

$$\widetilde{S}(\Lambda, G \cup \Phi) = \left\{\lambda \in S(\Lambda, G \cup \Phi)\colon \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{1}{2}\right\}.$$

В силу (5) оператор (6) принимает вид

$$W\colon \quad \begin{cases} \lambda_1' = 2\lambda_1\lambda_3 + 2\alpha\lambda_1\lambda_4 + 2\beta\lambda_2\lambda_3, \\ \lambda_2' = 2\lambda_2\lambda_4 + 2(1-\alpha)\lambda_1\lambda_4 + 2(1-\beta)\lambda_2\lambda_3, \\ \lambda_3' = 2\lambda_1\lambda_3 + 2\alpha\lambda_1\lambda_4 + 2\beta\lambda_2\lambda_3, \\ \lambda_4' = 2\lambda_2\lambda_4 + 2(1-\alpha)\lambda_1\lambda_4 + 2(1-\beta)\lambda_2\lambda_3, \end{cases} \tag{7}$$

где α, $\beta \in \{0, 1\}$.

Поскольку $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = \lambda_4$, полагая $2\lambda_i = x_i, 2\lambda_i' = x_i'$, $i = 1, 2$, оператор (6) сводим к виду

$$V: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + (\alpha+\beta)x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2 + \big(2 - (\alpha+\beta)\big)x_1x_2, \end{cases}$$

где α, $\beta \in \{0,1\}$.

Так как α, $\beta \in \{0,1\}$, получаем три типа операторов:

$$V_1: \begin{cases} x_1' = x_1^2, \\ x_2' = x_2^2 + 2x_1x_2, \end{cases} \qquad V_2: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2 + x_1x_2, \end{cases} \qquad V_3: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2. \end{cases}$$

Ясно, что оператор V_2 — единичный, операторы V_1, V_3 имеют неподвижные точки $M_1 = (1,0)$, $M_2 = (0,1)$ и любая траектория оператора V_1 (соответственно оператора V_3) сходится к точке $M_2 = (0,1)$ $\big($соответственно к точке $M_1 = (1,0)\big)$, т. е. операторы V_1, V_3 регулярны. Следовательно, операторы (7) двуполой популяции, редуцированные к операторам V_1, V_3, являются регулярными, а редуцированные к V_2 — единичными операторами.

3.3. Случай $|\Phi| = 3$. Множество всех конфигураций таково:

$$\Omega = \big\{\sigma_1 = \{f,1\},\ \sigma_2 = \{f,2\},\ \sigma_3 = \{f,3\},\ \sigma_4 = \{m,1\},\ \sigma_5 = \{m,2\},\ \sigma_6 = \{m,3\}\big\},$$

где

$$\Omega_f = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \qquad \Omega_m = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}.$$

Определим множество $\Omega(\Lambda, \sigma', \sigma'')$ для произвольных σ', $\sigma'' \in \Omega$ по формуле (4).

Положим $\lambda_i = \lambda(\sigma_i)$, $i = 1,2,3,4,5,6$, где гиперсимплекс имеет вид

$$\widetilde{S}(\Lambda, G\cup\Phi) = \left\{\lambda \in S(\Lambda, G\cup\Phi) \colon \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = \frac{1}{2}\right\}.$$

В силу (5) оператор (6) принимает вид

$$W\colon \begin{cases} \lambda_1' = 2\lambda_1\lambda_4 + 2\alpha\lambda_1\lambda_5 + 2\beta\lambda_1\lambda_6 + 2\gamma\lambda_2\lambda_4 + 2\delta\lambda_3\lambda_4, \\ \lambda_2' = 2\lambda_2\lambda_5 + 2(1-\alpha)\lambda_1\lambda_5 + 2(1-\gamma)\lambda_2\lambda_4 + 2\omega\lambda_2\lambda_6 + 2\theta\lambda_3\lambda_5, \\ \lambda_3' = 2\lambda_3\lambda_6 + 2(1-\delta)\lambda_3\lambda_4 + 2(1-\theta)\lambda_3\lambda_5 + 2(1-\beta)\lambda_1\lambda_6 + 2(1-\omega)\lambda_2\lambda_6, \\ \lambda_4' = 2\lambda_1\lambda_4 + 2\alpha\lambda_1\lambda_5 + 2\beta\lambda_1\lambda_6 + 2\gamma\lambda_2\lambda_4 + 2\delta\lambda_3\lambda_4, \\ \lambda_5' = 2\lambda_2\lambda_5 + 2(1-\alpha)\lambda_1\lambda_5 + 2(1-\gamma)\lambda_2\lambda_4 + 2\omega\lambda_2\lambda_6 + 2\theta\lambda_3\lambda_5, \\ \lambda_6' = 2\lambda_3\lambda_6 + 2(1-\delta)\lambda_3\lambda_4 + 2(1-\theta)\lambda_3\lambda_5 + 2(1-\beta)\lambda_1\lambda_6 + 2(1-\omega)\lambda_2\lambda_6, \end{cases} \tag{8}$$

где α, β, γ, δ, ω, $\theta \in \{0,1\}$.

Поскольку $\lambda_1 = \lambda_4$, $\lambda_2 = \lambda_5$, $\lambda_3 = \lambda_6$, полагая $2\lambda_i = x_i, 2\lambda_i' = x_i'$, $i = 1,2,3$, оператор (8) сводим к виду

$$V_{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\omega,\theta\}}\colon \begin{cases} x_1' = x_1^2 + (\alpha+\gamma)x_1x_2 + (\beta+\delta)x_1x_3, \\ x_2' = x_2^2 + \big(2-(\alpha+\gamma)\big)x_1x_2 + (\omega+\theta)x_2x_3, \\ x_3' = x_3^2 + \big(2-(\beta+\delta)\big)x_1x_3 + \big(2-(\omega+\theta)\big)x_2x_3, \end{cases} \tag{9}$$

где α, β, γ, δ, ω, $\theta \in \{0,1\}$.

Ясно, что существуют 64 крайних оператора, и легко проверить, что это множество разбивается на следующие классы смежности относительно группы перестановок:

a) $\Big\{V_{\{0,0,1,1,0,1\}} = V_{\{0,0,1,1,1,0\}} = V_{\{0,1,1,0,0,1\}} = V_{\{0,1,1,0,1,0\}} = V_{\{1,0,0,1,0,1\}} = V_{\{1,0,0,1,1,0\}} = = V_{\{1,1,0,0,0,1\}} = V_{\{1,1,0,0,1,0\}}\Big\}$;

b$_1$) $\Big\{V_{\{0,0,0,0,0,0\}}, V_{\{0,0,0,0,1,1\}}, V_{\{0,1,0,1,1,1\}}, V_{\{1,0,1,0,0,0\}}, V_{\{1,1,1,1,0,0\}}, V_{\{1,1,1,1,1,1\}}\Big\}$;

b$_2$) $\Big\{V_{\{0,0,0,0,0,1\}} = V_{\{0,0,0,0,1,0\}}, V_{\{0,1,1,1,1,1\}} = V_{\{1,1,0,1,1,1\}}, V_{\{1,0,1,1,0,0\}} = V_{\{1,1,1,0,0,0\}}\Big\}$;

b$_3$) $\Big\{V_{\{0,0,0,1,0,0\}} = V_{\{0,1,0,0,0,0\}}, V_{\{0,0,1,0,1,1\}} = V_{\{1,0,0,0,1,1\}}, V_{\{0,1,0,1,0,1\}} = V_{\{0,1,0,1,1,0\}}, V_{\{0,1,1,1,0,0\}} = V_{\{1,1,0,1,0,0\}}, V_{\{1,0,1,0,0,1\}} = V_{\{1,0,1,0,1,0\}}, V_{\{1,0,1,1,1,1\}} = V_{\{1,1,1,0,1,1\}}\Big\}$;

b$_4$) $\Big\{V_{\{0,0,0,1,0,1\}} = V_{\{0,0,0,1,1,0\}} = V_{\{0,1,0,0,0,1\}} = V_{\{0,1,0,0,1,0\}}, V_{\{0,0,1,0,0,1\}} = V_{\{0,0,1,0,1,0\}} = = V_{\{1,0,0,0,0,1\}} = V_{\{1,0,0,0,1,0\}}, V_{\{0,0,1,1,0,0\}} = V_{\{0,1,1,0,0,0\}} = V_{\{1,0,0,1,0,0\}} = V_{\{1,1,0,0,0,0\}}, V_{\{0,0,1,1,1,1\}} = V_{\{0,1,1,0,1,1\}} = V_{\{1,0,0,1,1,1\}} = V_{\{1,1,0,0,1,1\}}, V_{\{0,1,1,1,0,1\}} = V_{\{0,1,1,1,1,0\}} = = V_{\{1,1,0,1,0,1\}} = V_{\{1,1,0,1,1,0\}}, V_{\{1,0,1,1,0,1\}} = V_{\{1,0,1,1,1,0\}} = V_{\{1,1,1,0,0,1\}} = V_{\{1,1,1,0,1,0\}}\Big\}$;

b$_5$) $\Big\{V_{\{0,0,0,1,1,1\}} = V_{\{0,1,0,0,1,1\}}, V_{\{0,0,1,0,0,0\}} = V_{\{1,0,0,0,0,0\}}, V_{\{1,1,1,1,0,1\}} = V_{\{1,1,1,1,1,0\}}\Big\}$;

c) $\Big\{V_{\{1,0,1,0,1,1\}}, V_{\{0,1,0,1,0,0\}}\Big\}$.

Заметим, что для операторов из класса c) существует гамильтонов цикл $1 \succ 2 \succ 3 \succ 1$, а для операторов из остальных классов — нет.

Пусть $\alpha \subset \{1,2,3\}$, $\Gamma_\alpha = \{x \in S^2 \colon x_i = 0,\ i \notin \alpha\}$ — грань двумерного симплекса, $\operatorname{int} S^2 = \{x \in S^2 \colon x_1x_2x_3 > 0\}$ — относительная внутренность симплекса и $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ — вершины двумерного симплекса.

Теорема 1. *Для КСО* (9) *выполняются следующие утверждения*:

1) *КСО из класса* a) *является единичным оператором*;

2) *КСО из класса* b) *регулярен*;

3) *КСО из класса* c) *не эргодичен.*

Доказательство: 1. Очевидно.

2. b$_1$) Пусть $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \omega = \theta = 0$, тогда КСО (9) имеет вид

$$x_1' = x_1^2,$$
$$x_2' = x_2^2 + 2x_1x_2, \tag{10}$$
$$x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Легко проверить, что множество неподвижных точек оператора (10) состоит из вершин симплекса e_1, e_2, e_3.

Положим $x_3 = x$ и изучим поведение третьей координаты $x_3^{(n)}$. Из (10) очевидно, что траектория $x_3^{(n)}$ задается одномерной динамической системой $\psi(x) = x(2-x)$. Заметим, что $\psi(x)$ имеет две неподвижные точки $x^* = 0$, $x^{**} = 1$ и $\psi'(0) > 1$, $\psi'(1) < 1$, следовательно, x^* — отталкивающая, а x^{**} — притягивающая неподвижные точки для $\psi(x)$. Поскольку $\psi(x)$ — возрастающая функция на $[0,1]$ и x^{**} — неподвижная точка, имеем $\lim_{n\to\infty} \psi^n(x) = 1$.

Следовательно, если $x_3^0 \neq 0$, то траектория оператора (10) сходится к вершине симплекса $e_3 = (0,0,1)$. Аналогично проверяется, что если $x \in \Gamma_{12} \setminus \{e_1\}$, то траектория оператора (10) сходится к вершине симплекса $e_2 = (0,1,0)$.

b$_2$) Пусть $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \omega = 0, \theta = 1$, тогда КСО (9) принимает вид

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1^2, \\
x_2' &= x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3, \\
x_3' &= x_3^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Легко проверить, что множество неподвижных точек оператора (11) имеет вид $\{e_1\} \cup \{x_1 = 0\}$.

Пусть $x^{(0)} \in \operatorname{int} S^2$ — начальная точка, тогда из $x_1^{(0)} \geq x_1^{(1)} \geq \ldots \geq x_1^{(n)} \geq \ldots \geq 0$ следует, что существует предел x_1^*. Из $x_2^{(0)} \leq x_2^{(1)} \leq \ldots \leq x_2^{(n)} \leq \ldots \leq 1$ следует, что существует предел x_2^* и, следовательно, существует предел x_3^*. Предположим, что $x_1^* \neq 0$, тогда

$$
1 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^{(n+1)}}{x_1^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_1^{(n)}\right)^2}{x_1^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} x_1^{(n)},
$$

что противоречит $x^{(0)} \neq e_1$, т. е. $x_1^* = 0$. Из (11) получаем

$$
\frac{x_2'}{x_3'} = \frac{x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3}{x_3^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3} = \frac{x_2(1+x_1)}{x_3(1+x_1)} = \frac{x_2}{x_3}.
$$

Следовательно,

$$
\frac{x_2^*}{x_3^*} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_2^{(n)}}{x_3^{(n)}} = \frac{x_2^{(0)}}{x_3^{(0)}}.
$$

Значит, траектория оператора сходится к точке $\left(0, \dfrac{x_2^{(0)}}{x_2^{(0)} + x_3^{(0)}}, \dfrac{x_3^{(0)}}{x_2^{(0)} + x_3^{(0)}}\right)$. Аналогично показывается, что если $x^{(0)} \in \operatorname{int}\Gamma_{12}$, то e_2 — предельная точка, а если $x^{(0)} \in \operatorname{int}\Gamma_{13}$, то e_3 — предельная точка.

b$_3$) Пусть $\alpha = \beta = \gamma = \omega = \theta = 0$, $\delta = 1$, тогда КСО (9) принимает вид

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1^2 + x_1x_3, \\
x_2' &= x_2^2 + 2x_1x_2, \\
x_3' &= x_3^2 + x_1x_3 + 2x_2x_3.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Легко проверить, что множество неподвижных точек оператора (12) имеет вид $\{e_2\} \cup \{x_2 = 0\}$.

Пусть $x^{(0)} \in \operatorname{int} S^2$ — начальная точка, тогда из $x_1^{(0)} \geq x_1^{(1)} \geq \ldots \geq x_1^{(n)} \geq \ldots \geq 0$ следует, что существует предел x_1^*. Из $0 < x_3^{(0)} \leq x_3^{(1)} \leq \ldots \leq x_3^{(n)} \leq \ldots \leq 1$ следует, что существует предел x_3^*, а из $x_2^* = 1 - x_1^* - x_3^*$ следует, что существует предел x_2^*.

Предположим, что $x_2^* \neq 0$, тогда

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_2^{(n+1)}}{x_2^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_2^{(n)}\left(1 + x_1^{(n)} - x_3^{(n)}\right)}{x_2^{(n)}} = 1 + \lim_{n\to\infty}(x_1^{(n)} - x_3^{(n)}),$$

откуда $x_1^* = x_3^* > 0$. Поскольку $V(x^*) = x^*$, из (12) получаем равенство $x_1^* = 2(x_1^*)^2$. Первое решение этого уравнения $x_1^* = 0$ противоречит $x_1^* = x_3^* > 0$, а второе решение $x_1^* = x_3^* = 0{,}5$ противоречит предположению $x_2^* \neq 0$.

Следовательно, траектория КСО (12) сходится к точке $(x_1^*,\ 0,\ 1 - x_1^*)$.

Аналогично показывается, что если $x^{(0)} \in \operatorname{int}\Gamma_{12}$, то e_2 — предельная точка, а если $x^{(0)} \in \in \operatorname{int}\Gamma_{23}$, то e_3 — предельная точка.

b$_4$) Пусть $\alpha = \beta = \gamma = \omega = 0$, $\delta = \theta = 1$, тогда КСО (9) принимает вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^2 + x_1x_3, \\ x_2' &= x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3, \\ x_3' &= x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Для удобства запишем КСО (13) в виде

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(1 - x_2), \\ x_2' &= x_2(1 + x_1), \\ x_3' &= x_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Легко проверить, что множество неподвижных точек оператора (14) имеет вид $\{x_1 = 0\} \cup \cup \{x_2 = 0\}$.

Пусть $x^{(0)} \in \operatorname{int} S^2$ — начальная точка, тогда из $x_1^{(0)} \geq x_1^{(1)} \geq \ldots \geq x_1^{(n)} \geq \ldots \geq 0$ следует, что существует предел x_1^*. Из $0 < x_2^{(0)} \leq x_2^{(1)} \leq \ldots \leq x_2^{(n)} \leq \ldots \leq 1$ следует, что существует предел $0 < x_2^*$.

Предположим, что $x_1^* \neq 0$, тогда

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^{(n+1)}}{x_1^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^{(n)}\left(1 - x_2^{(n)}\right)}{x_1^{(n)}} = 1 - \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)},$$

что противоречит предположению $x_2^* > 0$, т. е. $x_1^* = 0$. Следовательно, получим предельную точку вида $(0, 1 - x_3^{(0)}, x_3^{(0)})$. Аналогично показывается, что если $x^{(0)} \in \operatorname{int}\Gamma_{12}$, то e_2 — предельная точка.

b$_5$) Пусть $\alpha = \beta = \gamma = 0, \delta = \omega = \theta = 1$, тогда КСО (9) принимает вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^2 + x_1x_3, \\ x_2' &= x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3, \\ x_3' &= x_3^2 + x_1x_3. \end{aligned} \tag{15}$$

Легко проверить, что множество неподвижных точек оператора (15) имеет вид $\{e_2\} \cup \{x_2 = = 0\}$.

Как и для КСО (10), с помощью свойства функции $\psi(x)$ показывается, что если $x_2^0 \neq 0$, то траектория оператора (15) сходится к вершине симплекса $e_2 = (0, 1, 0)$.

3. Пусть $\beta = \delta = 0, \alpha = \gamma = \omega = \theta = 1$, тогда КСО (9) принимает вид

$$x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2,$$
$$x_2' = x_2^2 + 2x_2x_3, \tag{16}$$
$$x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3.$$

М. И. Захаревич [10] доказал, что эргодическая теорема не имеет места для оператора (16).

Теорема доказана.

4. Заключение. В статье рассматриваются нелинейные динамические системы, возникающие при изучении моделей наследования в двуполых популяциях. Формулируется условие, при выполнении которого динамическая система не эргодична, и устанавливается необходимость этого условия для малых размерностей. Доказательство для любых размерностей является достаточно сложной проблемой и будет предметом будущих публикаций.

У. У. Жамилов выражает благодарность Международному исламскому университету Малайзии за приглашение и поддержку во время пребывания в нем.

1. *Bernstein S. N.* The solution of a mathematical problem related to the theory of heredity // Uchen. Zapiski. NI Kaf. Ukr. Otd. Mat. – 1924. – № 1. – P. 83 – 115 (in Russian).
2. *Kesten H.* Quadratic transformations: a model for population growth. I, II // Adv. Appl. Probab. – 1970. – № 2. – P. 1 – 82, 179 – 228.
3. *Lyubich Yu. I.* Mathematical structures in population genetics // Biomathematics. – 1992. – **22**.
4. *Ганиходжаев Р. Н.* Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры // Мат. сб. – 1992. – **83**, № 8. – С. 121 – 140.
5. *Ганиходжаев Р. Н.* Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Мат. заметки. – 1994. – **56**. – С. 1125 – 1131.
6. *Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.* Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий // Владикавказ. мат. журн. – 2006. – **8**. – С. 12 – 28.
7. *Розиков У. А., Жамилов У. У.* F-квадратичные стохастические операторы // Мат. заметки. – 2008. – **83**, № 4. – С. 606 – 612.
8. *Розиков У. А., Жамилов У. У.* О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе // Мат. сб. – 2009. – **200**, № 9. – С. 81 – 94.
9. *Ганиходжаев Н. Н.* Об одном приложении теории гиббсовских распределений в математической генетике // Докл. АН РАН. – 2000. – **372**, № 1. – С. 13 – 16.
10. *Захаревич М. И.* О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 6. – С. 207 – 208.
11. *Ganikhodzhaev N. N., Zanin D. V.* On necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on the two-dimensional simplex // Commun. Math. Soc. – 2004. – P. 571 – 572.
12. *Ulam S. M.* A collections of mathematical problems. – New Mexico: Los Alamos Sci. Labor., 1967.

Получено 16.03.12,
после доработки — 06.10.12