УДК 517.5

У. З. Грабова (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк),
А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ І НАБЛИЖЕНЬ СУМАМИ ФУР'Є КЛАСІВ (ψ,β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

We establish the exact-order estimations of the best uniform approximations by trigonometrical polynomials on the $C^{\psi}_{\beta,p}$ classes of 2π-periodic continuous functions f defined by the convolutions of functions, which belong to the unit ball in the spaces L_p, $1\le p<\infty$, with generating fixed kernels $\Psi_\beta\subset L_{p'}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, whose Fourier coefficients decrease to zero approximately as power functions. The exact-order estimations are also established in the L_p-metrics, $1<p\le\infty$, for the classes $L^{\psi}_{\beta,1}$ of 2π-periodic functions f equivalent in terms of the Lebesgue measure to the convolutions of $\Psi_\beta\subset L_p$ kernels with functions from the unit ball in the space L_1. It is shown that, in the investigated cases, the orders of the best approximations are realized by the Fourier sums.

Установлены точные по порядку оценки наилучших равномерных приближений тригонометрическими полиномами на классах $C^{\psi}_{\beta,p}$ 2π-периодических непрерывных функций f, представимых свертками функций, которые принадлежат единичным шарам пространств L_p, $1\le p<\infty$, с фиксированными производящими ядрами $\Psi_\beta\subset L_{p'}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, коэффициенты Фурье которых убывают к нулю примерно как степенные функции. Точные порядковые оценки наилучших приближений установлены также и в L_p-метрике, $1<p\le\infty$, для классов $L^{\psi}_{\beta,1}$ 2π-периодических функций f, эквивалентных относительно меры Лебега сверткам ядер $\Psi_\beta\subset L_p$ с функциями единичного шара пространства L_1. Показано, что во всех рассматриваемых случаях порядки наилучших приближений реализуют суммы Фурье.

Нехай L_p, $1\le p\le\infty$, — простір 2π-періодичних сумовних функцій f зі скінченною нормою $\|f\|_p$, де при $p\in[1,\infty)$ $\|f\|_p=\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, а при $p=\infty$ $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_t|f(t)|$, C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Нехай, далі, $L^{\psi}_{\beta,p}$, $\beta\in\mathbb{R}$, — клас 2π-періодичних функцій $f(x)$, що майже для всіх $x\in\mathbb{R}$ зображуються згортками

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \varphi\perp 1, \tag{1}$$

де $\|\varphi\|_p\le 1$, $1\le p\le\infty$, $\Psi_\beta(t)$ — сумовна на $(0,2\pi)$ функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\qquad \psi(k)>0,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Функцію φ в зображенні (1), згідно з О. І. Степанцем [1, c. 132], називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}.

При $\psi(k)=k^{-r}$ класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ перетворюються у відомі класи Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$, а їх (ψ,β)-похідні f^{ψ}_{β} майже скрізь збігаються з похідними в сенсі Вейля – Надя f^r_β, останні при $r=\beta$, $r\in\mathbb{N}$, майже скрізь збігаються зі звичайними r-ми похідними функції f.

Якщо твірне ядро Ψ_β класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ задовольняє включення $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$, то $L^{\psi}_{\beta,p} \subset \subset L_\infty$, $1 \le p \le \infty$, а згортки вигляду (1) є неперервними функціями (див. твердження 3.8.1 із роботи [1, с. 137]). Тому клас усіх функцій f вигляду (1), для яких $\|\varphi\|_p \le 1$, $\Psi_\beta \in L_{p'}$, будемо позначати через $C^{\psi}_{\beta,p}$.

У випадку, коли $\Psi_\beta \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, має місце включення $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_p$ (див., наприклад, [2, с. 71]).

У даній роботі розглядається задача про знаходження точних порядкових оцінок наближень функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ сумами Фур'є $S_{n-1}(t)$ порядку $n-1$ у метриках L_∞ та L_p відповідно

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{L_\infty} = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_\infty, \qquad 1 \le p < \infty, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{L_p} = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_p, \qquad 1 < p \le \infty, \tag{4}$$

а також задача про знаходження точних порядкових оцінок найкращих наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ у метриках L_∞ та L_p відповідно

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{L_\infty} = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_\infty, \qquad 1 \le p < \infty, \tag{5}$$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{L_p} = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,1}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_p, \qquad 1 < p \le \infty, \tag{6}$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$.

Зрозуміло, що у випадку класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ норму $\|\cdot\|_\infty$ у (3) і (5) слід замінити на $\|\cdot\|_C$ і при цьому $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{L_\infty}$, $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{L_\infty}$.

Для класів Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, точні порядкові оцінки величин (3) – (6) відомі і мають вигляд (див., наприклад, [3, с. 47 – 49])

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_\infty \asymp n^{-r+1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \quad r > \frac{1}{p}, \tag{7}$$

$$E_n(W^r_{\beta,p})_\infty \asymp n^{-r+1/p}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad r > \frac{1}{p}, \tag{8}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_p \asymp n^{-r+1/p'}, \quad 1 < p \le \infty, \quad r > \frac{1}{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1, \tag{9}$$

$$E_n(W^r_{\beta,1})_p \asymp n^{-r+1/p'}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad r > \frac{1}{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1, \tag{10}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_p \asymp n^{-r} \ln n, \qquad p = 1, \infty, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{11}$$

У формулах (7) – (11) і далі під записом $A_n \asymp B_n$ будемо розуміти існування додатних сталих K_1 і K_2 таких, що $K_1 B_n \leq A_n \leq K_2 B_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що у випадку $p = 1, \infty$ у роботах А. М. Колмогорова [4], В. Т. Пінкевича [5], С. М. Нікольського [6, 7], А. В. Єфімова [8] та С. О. Теляковського [9] для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_\infty$ та $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_1$ при $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ отримано асимптотичні рівності при $n \to \infty$.

Що ж стосується найкращих наближень $E_n(W^r_{\beta,\infty})_\infty$ та $E_n(W^r_{\beta,1})_1$, то завдяки роботам Ж. Фавара [10, 11], В. К. Дзядика [12, 13], С. Б. Стєчкіна [14] та Сунь Юн-шена [15] встановлено точні значення цих величин при усіх $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Точні значення величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_\infty$ отримано також у випадку $p = 2$ [16].

На класах $L^\psi_{\beta,p}$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ у випадку, коли $\psi(k)k^{1/p-1/s}$ монотонно не зростають і $\dfrac{\psi(k)}{\psi(2k)} \leq K < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, встановлено у роботі О. І. Степанця та О. К. Кушпеля [17] при довільних $1 < p$, $s < \infty$.

Крім того, О. І. Степанець (див., наприклад, [18, c. 60]) одержав точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ при довільних $1 < p$, $s < \infty$ за умови, що $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію, але не швидше за деяку геометричну прогресію. Згодом В. С. Романюк [19] доповнив зазначені результати О. І. Степанця, встановивши точні порядки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ при $1 < p < \infty$ і $s = \infty$. У випадку, коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за будь-яку геометричну прогресію, у роботі О. І. Степанця [20, c. 226, 227] встановлено порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ при довільних $1 \leq p$, $s \leq \infty$. Зазначимо також, що при $p = 2$ точні значення величин $\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,p})_C$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ за умови збіжності ряду $\sum_{k=1}^\infty \psi^2(k)$ знайдено у роботі А. С. Сердюка та І. В. Соколенка [21]. Задачу про точні значення величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,2})_2$ та $E_n(L^\psi_{\beta,2})_2$ повністю розв'язано у роботі О. І. Степанця та О. К. Кушпеля [17].

При $p = 1, \infty$ результати, що містять асимптотично точні оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_p$, а також точні порядкові оцінки величин $E_n(L^\psi_{\beta,p})_p$ в залежності від швидкості прямування до нуля послідовності $\psi(k)$ при $k \to \infty$, найбільш повно викладено у монографіях [1, 18].

У даній роботі встановлено точні порядкові оцінки величин (3) – (6) при довільних $\beta \in \in \mathbb{R}$ у випадку, коли послідовність $\psi(k)$ спадає до нуля не повільніше і не швидше за деякі степеневі функції. Тим самим доповнено основні результати роботи [17] по відшуканню слабкої асимптотики величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ у випадках $p = 1$ і $s = \infty$.

Перейдемо до точних формулювань. Вважаючи, що послідовність $\psi(k)$, що визначає клас $C^\psi_{\beta,p}$, є слідом на множині $\mathbb{N}$ деякої неперервної функції $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, позначимо через Θ_p, $1 \leq p < \infty$, множину монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > \dfrac{1}{p}$ така, що функція $t^\alpha \psi(t)$ майже спадає, тобто знайдеться додатна стала K така, що $t_1^\alpha \psi(t_1) \leq K t_2^\alpha \psi(t_2)$ для будь-яких $t_1 > t_2 \geq 1$. Через B позначимо множину монотонно не зростаючих при $t \geq 1$ додатних функцій $\psi(t)$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що

$$\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K \quad \forall t \geq 1.$$

Далі скрізь будемо вважати, що $\psi \in B \cap \Theta_p$, $1 \le p < \infty$. Умова $\psi \in \Theta_p$, $1 \le p < \infty$, як неважко переконатись, гарантує справедливість включення $\Psi_\beta \in L_{p'}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ (див., наприклад, [22, с. 657]). Як випливає з [1, с. 165, 175], якщо $\psi \in B \cap \mathfrak{M}$, де $\mathfrak{M}$ — множина всіх опуклих донизу на $[1, \infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$, то можна вказати таке $r > 0$, що при всіх $t \ge 1$ буде виконуватись нерівність $\psi(t) \ge Kt^{-r}$.

Прикладами функцій ψ, що задовольняють умову $\psi \in B \cap \Theta_p$, є, зокрема, функції вигляду $\psi(t) = \dfrac{1}{t^r}$, $r > \dfrac{1}{p}$; $\psi(t) = \dfrac{1}{t^r \ln^\alpha(t+c)}$, $\alpha \ge 0$, $c > 0$, $r > \dfrac{1}{p}$, $t \ge 1$; $\psi(t) = \dfrac{\ln^\alpha(t+c)}{t^r}$, $\alpha \ge 0$, $c > e^{\frac{2\alpha}{r-1/p}} - 1$, $r > \dfrac{1}{p}$, $t \ge 1$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in B \cap \Theta_p$. *Тоді існують додатні величини* $K^{(1)}_{\psi,p}$, $K^{(2)}_{\psi,p}$, *що можуть залежати лише від* ψ *і* p, *такі, що для довільних* $n \in \mathbb{N}$

$$K^{(2)}_{\psi,p}\psi(n)n^{1/p} \le E_n\Big(C^\psi_{\beta,p}\Big)_C \le \mathcal{E}_n\Big(C^\psi_{\beta,p}\Big)_C \le K^{(1)}_{\psi,p}\psi(n)n^{1/p}. \tag{12}$$

Доведення. Для довільної функції $f \in C^\psi_{\beta,p}$, згідно з інтегральним зображенням (1), одержимо

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x-t)\varphi(t)dt, \tag{13}$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{14}$$

Застосовуючи нерівність Гельдера, з рівності (13) маємо

$$\mathcal{E}_n\big(C^\psi_{\beta,p}\big)_C \le \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}\|\varphi(\cdot)\|_p \le \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}, \tag{15}$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $1 \le p < \infty$.

Перетворивши функцію $\Psi_{\beta,n}(t)$ за допомогою перетворення Абеля, при довільному $n \in \mathbb{N}$ одержимо

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta\psi(k)D_{k,\beta}(t) - \psi(n)D_{n-1,\beta}(t), \tag{16}$$

де $\Delta\psi(k) \overset{\text{df}}{=} \psi(k) - \psi(k+1)$, а

$$D_{k,\beta}(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{k}\cos\left(\nu t - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{\beta\pi}{2}\left[\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right] + \sin\frac{\beta\pi}{2}\left[\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]. \tag{17}$$

Оскільки (див., наприклад, [23, с. 13])

$$|D_{k,\beta}(t)| \le \frac{1}{2}+k, \;\; |D_{k,\beta}(t)| \le (1+\pi)\left(\frac{1}{|t|}\right), \qquad 0<|t|\le\pi, \tag{18}$$

то для будь-яких $k\in\mathbb{N}$ і $1<p'<\infty$ маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_{k,\beta}(t)|^{p'}dt \le \int\limits_{0\le|t|\le\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{2}+k\right)^{p'}dt + \int\limits_{\frac{1}{k}\le|t|\le\pi}(1+\pi)^{p'}\frac{dt}{|t|^{p'}} \le K_{p'}k^{p'-1}, \tag{19}$$

де $K_{p'}$ — стала, що залежить від p'. З (18) та оцінки (19) отримаємо

$$\|D_{k,\beta}(t)\|_{p'} \le K_{p,1}k^{1/p}, \qquad k\in\mathbb{N}, \quad 1\le p<\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad \beta\in\mathbb{R}, \tag{20}$$

де $K_{p,1}$ — стала, що залежить від p. Із (16) та (20) випливає нерівність

$$\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_{p'} \le K_{p,1}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^{1/p}+\psi(n)n^{1/p}\right), \qquad 1\le p<\infty. \tag{21}$$

Для оцінки суми $\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^{1/p}$ буде корисним наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $r\in(0,1]$, а $\psi(k)>0$, монотонно не зростає і для неї знайдеться $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $k^{r+\varepsilon}\psi(k)$ майже спадає. Тоді існує стала K, залежна від ψ і r, така, що для довільних $n\in\mathbb{N}$*

$$\psi(n)n^r \le \sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^r \le K\psi(n)n^r. \tag{22}$$

Доведення. Оскільки $\psi(k)$ монотонно не зростає, то для будь-якого $r>0$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^r \ge n^r\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k) = n^r\psi(n). \tag{23}$$

Залишилося показати, що за виконання умов леми 1 виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^r \le K\psi(n)n^r. \tag{24}$$

Застосування перетворення Абеля дозволяє для будь-яких натуральних $n\le M$ і довільного $r\in(0,1]$ записати рівність

$$\sum_{k=n}^{M}\psi(k)k^{r-1} = \sum_{k=n}^{M}\Delta\psi(k)\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu^{1-r}} - \psi(n)\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu^{1-r}} + \psi(M+1)\sum_{\nu=1}^{M}\frac{1}{\nu^{1-r}}. \tag{25}$$

На підставі простих геометричних міркувань неважко переконатись, що для довільних $m\in\mathbb{N}$ і $r\in(0,1]$

$$\frac{1}{r}(m^r-1) < \sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\nu^{1-r}} \le \frac{1}{r}m^r. \tag{26}$$

Тому згідно з (25) і (26)

$$\sum_{k=n}^{M}\psi(k)k^{r-1} > \frac{1}{r}\Big(\sum_{k=n}^{M}\Delta\psi(k)(k^r-1)-\psi(n)(n-1)^r\Big) >$$

$$> \frac{1}{r}\Big(\sum_{k=n}^{M}\Delta\psi(k)k^r-\psi(n)\big((n-1)^r+1\big)\Big). \tag{27}$$

При $M\to\infty$ із (27) одержуємо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\Delta\psi(k)k^r \le r\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)k^{r-1}+\psi(n)\big((n-1)^r+1\big). \tag{28}$$

Оскільки за умовою леми існує $\varepsilon>0$ таке, що послідовність $k^{r+\varepsilon}\psi(k)$ майже спадає, то знайдеться стала K_1 така, що

$$\psi(k)k^{r+\varepsilon} \le K_1\psi(n)n^{r+\varepsilon}, \qquad k=n,n+1,\ldots, \tag{29}$$

тому

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)k^{r-1} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)k^{r+\varepsilon}}{k^{1+\varepsilon}} \le K_1\psi(n)n^{r+\varepsilon}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \le K_2\psi(n)n^r. \tag{30}$$

Із (28) і (30) випливає (22).

Лему доведено.

Оскільки $\psi\in\Theta_p$, то, застосувавши лему 1, при $r=1/p$ із (15) та (21) отримуємо нерівність

$$E_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C \le \mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C \le K^{(1)}_{\psi,p}\psi(n)n^{\frac{1}{p}}, \qquad 1\le p<\infty, \tag{31}$$

$K^{(1)}_{\psi,p}$ — величина, що залежить від ψ і p.

Для того щоб одержати оцінку знизу, розглянемо при заданому $n\in\mathbb{N}$ функцію

$$f^*_{n,\alpha} = \frac{\alpha\psi(n)}{n^{1-1/p}}\Big(V_{2n}(t)-V_n(t)\Big), \qquad \alpha>0,\ n\in\mathbb{N},$$

де $V_m(t)$ — ядра методу Валле Пуссена,

$$V_m(t) = \frac{1}{m}\sum_{k=m}^{2m-1}D_k(t), \qquad m\in\mathbb{N}, \tag{32}$$

$D_k(t)$ — ядра Діріхле,

$$D_k(t) = \frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos\nu t = \frac{\sin\big(k+1/2\big)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Покажемо спочатку, що при певному виборі значення параметра α виконується нерівність

$$\Big\|\big(f^*_{n,\alpha}(\cdot)\big)^{\psi}_{\beta}\Big\|_p \le 1, \qquad 1<p<\infty. \tag{33}$$

Для цього скористаємось наступним твердженням із роботи [18, с. 117], в якій встановлено нерівності Бернштейна для (ψ,β)-похідних в L_p- метриках для поліномів, тобто нерівності між $\|(t_m)^{\psi}_{\beta}\|_p$ та $\|t_m\|_p$, де t_m — тригонометричні поліноми порядку m.

Твердження 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi(k)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t_m(\cdot)$ порядку m знайдеться величина $C_{\psi,p}$, що може залежати тільки від функції $\psi(\cdot)$ та числа p, така, що*

$$\left\|\big(t_m(\cdot)\big)_\beta^\psi\right\|_p \le C_{\psi,p}(\psi(m))^{-1}\|t_m(\cdot)\|_p. \tag{34}$$

Оскільки $f^*_{n,\alpha}$ є тригонометричним поліномом порядку $4n-1$, то на підставі твердження 1 отримаємо

$$\left\|\big(f^*_{n,\alpha}(t)\big)_\beta^\psi\right\|_p \le \frac{\alpha C_{\psi,p}}{n^{1-1/p}}\frac{\psi(n)}{\psi(4n-1)}\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_p. \tag{35}$$

Знайдемо оцінку $\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_p$. Враховуючи, що

$$V_m(t) = 2F_{2m-1}(t) - F_{m-1}(t), \tag{36}$$

де $F_k(t)$ — ядра Фейєра,

$$F_k(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k} D_\nu(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}\frac{\sin\big(\nu+1/2\big)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \qquad k\in\mathbb{N},$$

і відомі оцінки для ядер Фейєра (див., наприклад, [23, с. 148–151])

$$0 < F_k(t) < k+1, \qquad F_k(t) \le \frac{A_1}{(k+1)t^2}, \quad 0 < t \le \pi,$$

одержуємо оцінки для $V_m(t)$:

$$|V_m(t)| < A_2 m, \quad |V_m(t)| \le \frac{A_3}{mt^2}, \qquad 0 < t \le \pi,$$

A_i — абсолютні сталі. Тоді при $1 \le p < \infty$

$$\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_p \le A_4\left(\int\limits_{0\le|t|\le\frac{1}{n}} n^p dt + \int\limits_{\frac{1}{n}\le|t|\le\pi}\frac{1}{(nt^2)^p}dt\right)^{1/p} \le A_5 n^{1-1/p}. \tag{37}$$

Зауважимо, що при $p=1$ з нерівності (37) випливає оцінка

$$\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_1 \le A_5. \tag{38}$$

Далі, враховуючи включення $\psi \in B$ та нерівність (37), з (35) отримуємо

$$\left\|\big(f^*_{n,\alpha}(t)\big)_\beta^\psi\right\|_p \le \frac{\alpha\widetilde{C}_{p,\psi}}{n^{1-1/p}}n^{1-1/p} = \alpha\widetilde{C}_{p,\psi}, \tag{39}$$

$\widetilde{C}_{p,\psi}$ — величина, що залежить від ψ і p. При $\alpha = \alpha_* = (\widetilde{C}_{p,\psi})^{-1}$ з (39) випливає нерівність (33), а отже, і включення $f^*_{n,\alpha^*} \in C^\psi_{\beta,p}$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є функції $V_{2n}(t)-V_n(t)$. Згідно з формулою (3.3.5) із роботи [1, с. 31] для ядер $V_m(t)$ виконується рівність

$$V_m(t) = D_m(t) + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1-\frac{k}{2m}\right)\cos kt, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Застосовуючи (40) при $m = n$ і $m = 2n$, одержуємо

$$V_{2n}(t) - V_n(t) =$$

$$= D_{2n}(t) - D_n(t) - 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)\cos kt + 2\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\left(1-\frac{k}{4n}\right)\cos kt =$$

$$= -\sum_{k=n+1}^{2n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos kt + 2\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\left(1-\frac{k}{4n}\right)\cos kt. \tag{41}$$

Згідно з рівністю Парсеваля

$$\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_2^2 = \pi\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2 + 4\sum_{k=2n+1}^{4n-1}\left(1-\frac{k}{4n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n^2}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}(n-k)^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=2n+1}^{4n-1}(4n-k)^2\right) = \frac{\pi}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2n-1}k^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{24}\right) = \pi\left(n + \frac{1}{4n}\right). \tag{42}$$

Із (41) випливає, що $(V_{2n} - V_n) \perp t_{n-1}$ для будь-якого полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi}\big(f^*_{n,\alpha_*}(t) - t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f^*_{n,\alpha_*}(t)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt -$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f^*_{n,\alpha_*}(t)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt =$$

$$= \frac{\alpha_*\psi(n)}{n^{1-1/p}}\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_2^2. \tag{43}$$

З іншого боку, використовуючи нерівність Гельдера та враховуючи (38), отримуємо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\big(f^*_{n,\alpha_*}(t) - t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt \le$$

$$\le \|f^*_{n,\alpha_*}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_1 \le A_5\|f^*_{n,\alpha_*}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty. \tag{44}$$

Із (42) – (44) одержуємо

$$\|f^*_{n,\alpha_*}(t)-t_{n-1}(t)\|_\infty \geq \frac{\alpha_*\psi(n)}{A_5 n^{1-1/p}}\|V_{2n}(t)-V_n(t)\|_2^2 \geq \frac{K^{(2)}_{\psi,p}\psi(n)}{n^{1-1/p}}n = K^{(2)}_{\psi,p}\psi(n)n^{1/p}. \tag{45}$$

З (31) та (45) випливає (12).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\beta\in\mathbb{R}$, $\psi\in B\cap\Theta_1$ і виконується одна з умов*

$$\Delta^2\big(1/\psi(k)\big)\geq 0, \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{46}$$

або

$$\Delta^2\big(1/\psi(k)\big)\leq 0, \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{47}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\psi(k)}-\frac{2}{\psi(k+1)}+\frac{1}{\psi(k+2)}.$$

Тоді існують додатні величини $K^{(1)}_\psi$ і $K^{(2)}_\psi$, що можуть залежати лише від ψ, такі, що для довільних $n\in\mathbb{N}$

$$K^{(2)}_\psi\psi(n)n \leq E_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C \leq \mathcal{E}_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C \leq K^{(1)}_\psi\psi(n)n. \tag{48}$$

Доведення. Застосовуючи нерівність (31) при $p=1$, маємо

$$E_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C \leq \mathcal{E}_n\big(C^\psi_{\beta,1}\big)_C \leq K^{(1)}_\psi\psi(n)n, \tag{49}$$

де $K^{(1)}_\psi$ — величина, що залежить лише від ψ.

Для того щоб одержати оцінку знизу, розглянемо функцію

$$f^{(1)}_{n,\alpha}(t)=\alpha\psi(n)\big(V_{2n}(t)-V_n(t)\big), \qquad \alpha>0, \quad n\in\mathbb{N},$$

де $V_m(t)$ — ядра Валле Пуссена вигляду (32). Покажемо, що при певному виборі параметра $\alpha>0$ $f^{(1)}_{n,\alpha}\in C^\psi_{\beta,1}$. Для цього нам буде корисним твердження з роботи [18, с. 120], в якому встановлено нерівності Бернштейна для (ψ,β)-похідних в L_1-метриці для поліномів $t_m\in\in\mathcal{T}_{2m+1}$.

Твердження 2. *Нехай $\psi(k)$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов* (46) *або* (47) *і, крім того,*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{n-1}\psi(n)\big(k\psi(k)\big)^{-1}=O(1), \tag{50}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t_m(\cdot)$ порядку m знайдеться стала C_ψ, що може залежати тільки від функції $\psi(\cdot)$, така, що

$$\big\|\big(t_m(\cdot)\big)^\psi_\beta\big\|_1 \leq C_\psi\big(\psi(m)\big)^{-1}\|t_m(\cdot)\|_1. \tag{51}$$

Зауважимо, що при $\psi \in \Theta_p,\ 1 \le p < \infty$, умова (50) завжди виконується, оскільки в цьому випадку існує число $\alpha > 1/p$ таке, що послідовність $\varphi(n) = n^\alpha \psi(n)$ монотонно спадає, а

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi(n)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi(n)k^\alpha}{n^\alpha \varphi(k)k} \le \frac{K_1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^\alpha}{k} \le K_2 < \infty. \tag{52}$$

Зокрема, якщо $\psi \in \Theta_1$, то умова (50) виконується при будь-яких $\beta \in \mathbb{R}$. З огляду на це, оскільки $f^{(1)}_{n,\alpha}(t)$ — тригонометричний поліном порядку $4n-1$, на підставі (51) з урахуванням включення $\psi \in B \cap \Theta_1$ при виконанні однієї з умов (46) або (47) одержимо

$$\Big\| \big(f^{(1)}_{n,\alpha}(t)\big)^\psi_\beta \Big\|_1 = \alpha\psi(n) \big\| \big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)^\psi_\beta \|_1 \le$$

$$\le \alpha C_\psi \frac{\psi(n)}{\psi(4n-1)} \|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_1 \le \alpha \widetilde{C}_\psi, \tag{53}$$

де $\widetilde{C}_\psi$ — величина, що залежить від ψ. При $\alpha = \alpha_1 = (\widetilde{C}_\psi)^{-1}$ з (53) випливає, що

$$\Big\| \big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)\big)^\psi_\beta \Big\|_1 \le\ 1.$$

Провівши ті ж міркування, які використовувались для знаходження оцінки (45), для функції $f^{(1)}_{n,\alpha}(t)$ одержимо нерівність

$$\|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \ge K^{(2)}_\psi \psi(n) n, \tag{54}$$

де $K^{(2)}_\psi$ — величина, що залежить від ψ. Із (49) та (54) випливає оцінка (48).

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай* $1 < p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in B \cap \Theta_{p'}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *і виконується одна з умов* (46) *або* (47). *Тоді існують додатні величини* $K^{(3)}_{\psi,p}$ *і* $K^{(4)}_{\psi,p}$, *що можуть залежати лише від* ψ *і* p, *такі, що для довільних* $n \in \mathbb{N}$

$$K^{(4)}_{\psi,p} \psi(n) n^{1/p'} \le E_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_p \le \mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_p \le K^{(3)}_{\psi,p} \psi(n) n^{1/p'}. \tag{55}$$

Доведення. Зауважимо, що за виконання умови $\psi \in \Theta_{p'},\ 1 \le p' < \infty$, твірне ядро Ψ_β класу $L^\psi_{\beta,1}$ задовольняє включення $\Psi_\beta \in L_p,\ 1 < p \le \infty$. Тоді $L^\psi_{\beta,1} \subset L_p$ і з урахуванням нерівності Юнга (див., наприклад, [1, с. 293]) та інтегрального зображення (1) маємо

$$\mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_p \le \frac{1}{\pi} \big\| \Psi_{\beta,n}(\cdot) \big\|_p \|\varphi(\cdot)\|_1 \le \frac{1}{\pi} \big\| \Psi_{\beta,n}(\cdot) \big\|_p. \tag{56}$$

На підставі (21)

$$\big\| \Psi_{\beta,n}(\cdot) \big\|_p \le K_{p',1} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \Delta\psi(k) k^{1/p'} + \psi(n) n^{1/p'} \Big),\ \ 1 < p \le \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{57}$$

$K_{p,1}$ — стала, що залежить від p. Тоді, застосувавши до суми $\sum_{k=n}^\infty \Delta\psi(k) k^{1/p'}$ лему 1, із (56) та (21) одержимо

$$E_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_p \le \mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_p \le K^{(3)}_{\psi,p} \psi(n) n^{1/p'}. \tag{58}$$

Щоб одержати оцінку знизу величини $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_p$, $1 < p \leq \infty$, розглянемо функцію

$$f^{(1)}_{n,\alpha}(t) = \alpha\psi(n)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big),\ \alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Як випливає з нерівності (53), при певному виборі параметра $\alpha = \alpha_1$, залежного від ψ, виконуватиметься нерівність $\left\|\big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t)\big)^{\psi}_{\beta}\right\|_1 \leq 1$ і, отже, $f^{(1)}_{n,\alpha_1} \in L^{\psi}_{\beta,1}$.

Оскільки $(V_{2n} - V_n) \perp t_{n-1}$ для будь-якого полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, то має місце рівність

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t) - t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt = \alpha_1\psi(n)\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_2^2. \tag{59}$$

З іншого боку, на підставі (37)

$$\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_{p'} \leq A_5 n^{1/p},\ \ 1 < p \leq \infty,$$

і тому, застосовуючи нерівності (3.8.1) та (3.8.3) роботи [1, с. 137, 138], маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t) - t_{n-1}(t)\big)\big(V_{2n}(t) - V_n(t)\big)dt \leq$$

$$\leq \|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t) - t_{n-1}(t)\|_p\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_{p'} \leq A_5 n^{1/p}\|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t) - t_{n-1}(t)\|_p. \tag{60}$$

Із (59) та (60), враховуючи співвідношення (42), отримуємо

$$\|f^{(1)}_{n,\alpha_1}(t) - t_{n-1}(t)\|_p \geq \frac{\alpha_1\psi(n)}{A_5 n^{1/p}}\|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_2^2 = \frac{K^{(4)}_{\psi,p}\psi(n)}{n^{1/p}}n = K^{(4)}_{\psi,p}\psi(n)n^{1/p'}. \tag{61}$$

З (58) та (61) випливає (55).

Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що в теоремах 2 і 3 вимоги виконання однієї з умов (46) та (47) можна замінити більш загальною (але менш прозорою): щоб для $\beta \in \mathbb{R}$ і для послідовності $\psi \in B \cap \Theta_1$ (у випадку теореми 2) або $\psi \in B \cap \Theta_{p'}$ (у випадку теореми 3) виконувалась нерівність (51).

Для функцій $\psi(t) = \dfrac{\ln^{\alpha}(t+c)}{t^r}$, $\alpha \geq 1$, $c > e^{2\alpha/(r-\rho)} - 1$, $t \geq 1$, та $\psi(t) = \dfrac{1}{t^r\ln^{\alpha}(t+c)}$, $\alpha \geq 0$, $c > 0$, $t \geq 1$, виконуються всі умови теорем 2 (при $r > 1/p$, $\rho = 1/p$) та 3 (при $r > 1 - 1/p$, $\rho = 1 - 1/p$) і, отже, для величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_C$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_p$, $1 < p \leq \infty$, мають місце співвідношення (48) та (55) відповідно.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – Ч. I. – 427 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic function. – Nova Sci. Publ., 1993. – 419 p.
4. *Kolmogoroff A.* Zur Grössennordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**, № 2. – S. 521 – 526.
5. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**, № 6. – С. 521 – 528.

6. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1 – 76.
7. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
8. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 243 – 296.
9. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
10. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques // C. r. Acad. Sci. – 1936. – **203**. – P. 1122 – 1124.
11. *Favard J.* Sur les meilleurs procédes d'approximations de certains classes de fontions par des polynomes trigonométriques // Bull. Sci. Math. – 1937. – **61**. – P. 209 – 224, 243 – 256.
12. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**. – С. 135 – 162.
13. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
14. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 643 – 648.
15. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**, № 1. – С. 67 – 92.
16. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 5. – С. 683 – 689.
17. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 483 – 492.
18. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – Ч. II. – 468 с.
19. *Романюк В. С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 131 – 135.
20. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
21. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Рівномірні наближення класів $(\psi, \overline{\beta})$-диференційовних функцій лінійними методами // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 181 – 189.
22. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
23. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Одержано 12.07.12