УДК 514.754

Е. А. Шугайло (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПОГРУЖЕНИЯ $M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ С ПЛОСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

We give a classification of parallel affine immersions $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ with flat connection according to the rank of the Weingarten mapping.

Наведено класифікацію паралельних афінних занурень $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ з пласкою зв'язністю в залежності від рангу відображення Вейнгартена.

Введение. Пусть (M^n, ∇) — аффинное n-мерное многообразие со связностью ∇, $(\mathbb{R}^{n+2}, D)$ — стандартное (арифметическое) аффинное пространство с плоской связностью D. Обозначим через $\mathfrak{X}(M^n)$ множество гладких касательных векторных полей на M^n. В соответствии с [1] погружение $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+2}, D)$ называется аффинным, если вдоль погружения определено двумерное трансверсальное дифференцируемое распределение $Q\colon\ x \in M^n \mapsto Q_x$ такое, что в каждой точке $x \in M^n$ для любых $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ справедливо разложение $(D_X f_*(Y))_x = (f_*(\nabla_X Y))_x + h_x(X,\ Y)$, $h_x(X,\ Y) \in Q_x$ на касательную и трансверсальную составляющие, которое определяет *аффинную фундаментальную форму* $h(X,Y)$.

Для произвольного трансверсального векторного поля ξ записывается также аналогичное разложение $D_X\xi = -f_*(S_\xi X) + \nabla^\perp_X \xi$, которое определяет *оператор Вейнгартена* S_ξ относительно ξ и *трансверсальную связность* $\nabla^\perp$.

Определим *отображение Вейнгартена*

$$S_x\colon Q_x \times T_x(M^n) \to T_x(M^n),$$

действующее по правилу $(\xi, X) \mapsto S_\xi X$ в каждой точке $x \in M^n$.

Кубическая форма аффинного погружения определяется следующим образом: $C(X,\ Y,\ Z) = \nabla^\perp_X h(Y,\ Z) - h(\nabla_X Y,\ Z) - h(Y,\ \nabla_X Z)$.

Пусть $\xi_1,\ \xi_2$ — базис трансверсального распределения Q. Тогда можно записать аффинные аналоги разложений Гаусса и Вейнгартена для погруженного многообразия в виде

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h^\alpha(X,\ Y)\xi_\alpha, \tag{1}$$

$$D_X \xi_\alpha = -f_*(S_\alpha X) + \tau_\alpha^\beta(X)\xi_\beta, \tag{2}$$

где h^α — компоненты аффинной фундаментальной формы, S_α — операторы Вейнгартена, τ_α^β — формы трансверсальной связности относительно базиса $\xi_1,\ \xi_2$ трансверсального распределения. Относительно этого базиса компоненты кубической формы имеют вид

$$C^\alpha(X,\ Y,\ Z) = (\nabla_X h^\alpha)(Y,\ Z) + \tau_\beta^\alpha(X) h^\beta(Y,\ Z). \tag{3}$$

Аффинные погружения с кубической формой, тождественно равной нулю, называются *параллельными*. В римановой геометрии такие погружения и их обобщения изучались многими авторами, обзор можно найти в [2]. Общая классификация евклидовых параллельных подмногообразий была получена Д. Ферусом [3].

Аффинными невырожденными гиперповерхностями с нулевой кубической формой являются только гиперквадрики [1].

Полностью изучены линейно полные параллельные аффинные поверхности M^2. Напомним, что аффинное погружение $f\colon M^2 \to \mathbb{R}^m$ называется *линейно полным*, если $f(U)$ не содержится в аффинном подпространстве $\mathbb{R}^m$ меньшей размерности для каждой окрестности U каждой точки $p \in M^2$. Было доказано [4], что параллельное аффинное погружение линейно полное, если $Q = \mathrm{im}\, h$, следовательно, линейно полная аффинная поверхность содержится в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ или $\mathbb{R}^5$. В первом случае ($m = 2$) очевидно, что M^2 является аффинной плоскостью. В остальных случаях вводится метрика, связанная с аффинной фундаментальной формой (см., например, [5]), и определение невырожденности погружения, которое не зависит от выбора трансверсального распределения.

Невырожденные параллельные аффиные поверхности в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^5$ изучены соответственно в [6], [7] и [8]. Заметим, что линейно полные параллельные аффинные поверхности в $\mathbb{R}^5$ всегда невырожденные. Вырожденные параллельные аффинные поверхности в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ изучены соответственно в [9] и [5].

Данная работа посвящена классификации параллельных аффинных погружений коразмерности 2 с плоской связностью.

Ранг отображения $h_x(X,\, Y)\colon T_x(M)\times T_x(M) \to Q_x$ не зависит от выбора трансверсального распределения и называется *точечной коразмерностью* аффинного погружения [10]. Точечная коразмерность q аффинного погружения $M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ может принимать три значения: $q = 0,\ 1,\ 2$.

В случае $q = 0$ аффинная фундаментальная форма $h \equiv 0$ и данное погружение — это аффинное подпространство $\mathbb{R}^n$.

В случае $q = 1$, не нарушая общности, можно считать, что $h^2 \equiv 0$. Из параллельности погружения следует, что ξ_1 параллелен в нормальной связности: $C^2(X,\ Y,\ Z) = \tau_1^2(X)h^1(Y,\ Z) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \tau_1^2(X) \equiv 0$, т. е. $\nabla^{\perp}_X\xi_1 = \tau_1^1(X)\xi_1$, а следовательно, по теореме о редукции коразмерности M^n содержится в $\mathbb{R}^{n+1}$. Аффинная гиперповерхность с нулевой кубической формой является гиперквадрикой (см., например, [1]).

В первых двух случаях погружение не является линейно полным. В случае линейно полного погружения, т. е. погружения максимальной точечной коразмерности $q = 2$, проведена классификация параллельных аффинных погружений с плоской связностью в зависимости от ранга отображения Вейнгартена (теоремы 1 – 3).

1. Основные уравнения, выбор трансверсального распределения. Пусть дано аффинное погружение $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+2}, D)$, тогда выполняются основные уравнения аффинных погружений:

$$R(X,\ Y)Z = h^\alpha(Y,\ Z)S_\alpha X - h^\alpha(X,\ Z)S_\alpha Y, \tag{4}$$

$$(\nabla_X h^\alpha)(Y,\ Z) + \tau^\alpha_\beta(X)h^\beta(Y,\ Z) = (\nabla_Y h^\alpha)(X,\ Z) + \tau^\alpha_\beta(Y)h^\beta(X,\ Z), \tag{5}$$

$$(\nabla_X S_\alpha)Y - \tau^\beta_\alpha(X)S_\beta Y = (\nabla_Y S_\alpha)X - \tau^\beta_\alpha(Y)S_\beta X, \tag{6}$$

$$h^\beta(X,\ S_\alpha Y) - h^\beta(Y,\ S_\alpha X) =$$

$$= X(\tau_\alpha^\beta(Y)) + \tau_\gamma^\beta(X)\tau_\alpha^\gamma(Y) - Y(\tau_\alpha^\beta(X)) - \tau_\gamma^\beta(Y)\tau_\alpha^\gamma(X) - \tau_\alpha^\beta([X,\ Y]). \tag{7}$$

Эти уравнения в несколько других обозначениях можно найти в [4, 6].

Формы трансверсальной связности, компоненты аффинной фундаментальной формы и операторы Вейнгартена не инвариантны относительно выбора трансверсального распределения и выбора базиса в нем. В работе [10] доказано, что если M^n — подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+2}$ с трансверсальным распределением $Q = \operatorname{span}\{\xi_1,\ \xi_2\}$ и $\bar{Q} = \operatorname{span}\{\bar{\xi}_1,\ \bar{\xi}_2\}$ — преобразование трансверсального распределения

$$\bar{\xi}_\alpha = \Phi_\alpha^\beta \xi_\beta + Z_\alpha, \tag{8}$$

где Z_α — касательные векторные поля на M^n, $\Phi = [\Phi_\alpha^\beta]_{2\times 2}$ — невырожденная матрица из гладких функций, то

$$\bar{h}^\alpha(X,\ Y) = [\Phi^{-1}]_\beta^\alpha h^\beta(X,\ Y), \tag{9}$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - [\Phi^{-1}]_\beta^\alpha h^\beta(X,\ Y) Z_\alpha, \tag{10}$$

$$\bar{S}_\alpha X = \Phi_\alpha^\beta S_\beta X - \nabla_X Z_\alpha + \bar{\tau}_\alpha^\beta(X) Z_\beta, \tag{11}$$

$$\bar{\tau}_\alpha^\beta(X) = [\Phi^{-1}]_\gamma^\beta \{\tau_\delta^\gamma(X)\Phi_\alpha^\delta + h^\gamma(X,\ Z_\alpha) + X(\Phi_\alpha^\gamma)\}. \tag{12}$$

Пусть $\{e_1,\ e_2, \ldots, e_n\}$ — базисные касательные векторные поля на M^n. Введем в рассмотрение матрицу

$$H(X) = \begin{pmatrix} h^1(X,\ e_1) & h^1(X,\ e_2) & \ldots & h^1(X,\ e_n) \\ h^2(X,\ e_1) & h^2(X,\ e_2) & \ldots & h^2(X,\ e_n) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Из формулы (9) получаем формулу преобразования матрицы $H(X)$ при изменении трансверсального распределения (8): $\bar{H}(X) = \Phi^{-1}H(X)$. В [10] доказано, что для аффинного погружения максимальной точечной коразмерности трансверсальное распределение определено однозначно.

2. Аффинные погружения с параллельным нулевым распределением. *Нулевое пространство* в точке $x \in M^n$ аффинного погружения $f\colon (M^n,\ \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ определяется следующим образом:

$$N(x) = \ker h_x = \{X \in T_x(M^n)\colon\ h_x^\alpha(X,\ Y) = 0 \quad \forall\, Y \in T_x(M^n) \quad \forall\, \alpha = \overline{1,k}\}.$$

Из (9) следует, что нулевое пространство в точке x не зависит от выбора трансверсального распределения. Обозначим $\dim\ker h_x = \mu_x$. Распределение нулевых пространств $\mathcal{N}\colon x \mapsto N(x)$ называется *нулевым распределением*.

В работе [10] доказаны следующие свойства нулевого распределения: 1) распределение $\mathcal{N}\colon x \mapsto N(x)$ является интегрируемым и вполне геодезичным слоением на $\mathbb{R}^{n+k}$; 2) если M^n — полное многообразие, то каждый лист L слоения $\mathcal{FN}$ полный.

Напомним [1, 11], что распределение $\mathcal{N}$ называется *параллельным относительно* ∇, если для любой кривой из точки x в точку y параллельное перенесение вдоль кривой относительно ∇ отображает $N(x)$ в $N(y)$. Это происходит тогда и только тогда, когда $\nabla_X Y \in \mathcal{N}$ для любого векторного поля X и любого векторного поля $Y \in \mathcal{N}$. Из уравнения (10) следует, что это условие не зависит от выбора трансверсального распределения и сохраняется для любой индуцированной связности. Таким образом, можно говорить о *параллельности нулевого распределения* аффинного погружения.

Аффинные гиперповерхности с параллельным нулевым распределением были изучены K. Nomizu, B. Opozda в [11]. Ими была доказана теорема о глобальном цилиндрическом представлении такой гиперповерхности. В случае аффинного погружения большей коразмерности имеет место аналогичная теорема. Доказательство почти дословно повторяет доказательство в случае гиперповерхности.

Запишем компоненты кубической формы

$$C^\alpha(X,\ Y,\ Z) = X(h^\alpha(Y,\ Z)) - h^\alpha(\nabla_X Y,\ Z) - h^\alpha(Y,\ \nabla_X Z) + \tau^\alpha_\beta(X) h^\beta(Y,\ Z).$$

Определим ядро кубической формы

$$\ker C_x = \{X \in T_x(M^n)\colon\ C^\alpha_x(X, Y, Z) = 0\ \forall\, Y, Z \in T_x(M^n)\ \forall \alpha = \overline{1, k}\}.$$

Если $Y \in \mathcal{N}$, то $C^\alpha(X, Y, Z) = -h^\alpha(\nabla_X Y,\ Z)\quad \forall X,\ Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Если $\ker h \subset \ker C$, то $\nabla_X Y \in \mathcal{N}$, обратное также верно. Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Нулевое распределение параллельно тогда и только тогда, когда оно содержится в ядре кубической формы.*

В рассматриваемом случае ($C \equiv 0$) нулевое распределение параллельно, и если $\dim \mathcal{N} = \mu = \mathrm{const} \neq 0$, то аффинное подмногообразие является цилиндром с μ-мерной образующей над $(n - \mu)$-мерной базой.

3. Общие свойства аффинных погружений $M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ с плоской связностью. Рассмотрим линейно полные аффинные погружения, т. е. погружения точечной коразмерности $q = 2$. Для аффинного погружения $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ ядро и образ отображения Вейнгартена определяются следующим образом: $\ker S = \bigcap_{\alpha=1}^k \ker S_\alpha,\ \mathrm{im}\ S = \bigcup_{\alpha=1}^k \mathrm{im}\ S_\alpha$. Будем говорить, что *отображение Вейнгартена p-мерно*, если $\mathrm{rank} S := \dim \mathrm{im} S = p$. В работе [10] доказано, что для аффинного погружения $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ (при $k < n$) с максимальной точечной коразмерностью и плоской связностью ∇ выполняются следующие соотношения: 1) $\dim \ker S \geq n - k$; 2) $\ker h \subseteq \ker S$; 3) $\dim \mathrm{im}\ S \leq k$; 4) если $\dim \mathrm{im}\ S = k$, то $\dim \ker S = n - k$ и $\ker h = \ker S$.

Следовательно, в случае аффинного погружения $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ максимальной точечной коразмерности $\dim \mathrm{im}\ S \leq 2$. При этом если $\dim \mathrm{im}\ S = 2$, то $\ker h = \ker S,\ \dim \ker h = n - 2$. Из условия максимальности точечной коразмерности следует, что $\dim \ker h \leq n - 2$. Случай $\dim \ker h < n - 2$ возможен только тогда, когда $\dim \mathrm{im}\ S < 2$.

Итак, рассмотрим три различных случая.

A. $S \equiv 0$. Аффинное погружение с нулевым отображением Вейнгартена [10] аффинно эквивалентно погружению графика некоторого гладкого отображения $F\colon M^n \to \mathbb{R}^2$, т. е.

$$f\colon (u^1, \ldots,\ u^n) \mapsto (u^1, \ldots,\ u^n,\ f^1(u^1, \ldots,\ u^n),\ f^2(u^1, \ldots,\ u^n)).$$

B. $\dim \mathrm{im}\ S = 1$ и $\dim \ker h < n - 2$. Изучим общие свойства таких погружений.

Лемма 2. *Пусть* $f\colon (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+2}, D)$ — *аффинное погружение точечной коразмерности* 2 *с плоской связностью* ∇, $\dim \operatorname{im} S = 1$ *и* $\dim \ker h < n-2$. *Тогда существуют параметризация погружения и базис трансверсального распределения такие, что*

1) $\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall k \neq 1, \quad \Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{1j}^1 = 0;$

2) $h^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad h^2 = \begin{pmatrix} 0 & h_{12}^2 & \ldots & h_{1n}^2 \\ h_{12}^2 & h_{22}^2 & \ldots & h_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n}^2 & h_{2n}^2 & \ldots & h_{nn}^2 \end{pmatrix};$

3) $S_1 e_1 = U, \quad S_1 e_j = 0, \quad j = \overline{2,n}, \quad S_2 \equiv 0;$

4) $\tau_2^1(e_i) = \tau_2^2(e_i) = 0$ *при* $i = \overline{2,n}$.

Доказательство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — координатные векторные поля на M^n такие, что $\Gamma_{ij}^k = 0$. Выбором базиса $\{\xi_1, \xi_2\}$ в трансверсальном распределении можно добиться того, что матрица (13) при $X = e_1$ имеет вид

$$H(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h^1(e_1, e_3) & \ldots & h^1(e_1, e_n) \\ 0 & 1 & h^2(e_1, e_3) & \ldots & h^2(e_1, e_n) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Поскольку образ отображения Вейнгартена одномерен, то $S_1 e_i = \lambda_i U$, $S_2 e_i = \mu_i U$, где U — некоторое ненулевое касательное векторное поле, λ_i, μ_i — некоторые функции. Рассмотрим уравнение Гаусса на базисных векторах:

$$0 = R(e_i, e_j)e_k = h^\alpha(e_j, e_k) S_\alpha e_i - h^\alpha(e_i, e_k) S_\alpha e_j.$$

Следовательно,

$$h_{jk}^1 \lambda_i + h_{jk}^2 \mu_i = h_{ik}^1 \lambda_j + h_{ik}^2 \mu_j. \tag{15}$$

Рассмотрим данные уравнения при различных i, j, k :

$$\begin{aligned} &\lambda_i = h_{1i}^1 \lambda_1 + h_{1i}^2 \mu_1, && k = 1, \quad j = 1, \quad i = \overline{3,n}, \\ &\mu_i = h_{1i}^1 \lambda_2 + h_{1i}^2 \mu_2, && k = 1, \quad j = 2, \quad i = \overline{3,n}, \\ &\lambda_2 = \mu_1, && k = 1, \quad j = 1, \quad i = 2, \\ &\mu_2 = h_{22}^1 \lambda_1 + h_{22}^2 \mu_1, && k = 2, \quad j = 1, \quad i = 2. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставим полученные соотношения в уравнения (15) при $j = 1$ и $j = 2$:

$$h_{1k}^1 (h_{1i}^1 \lambda_1 + h_{1i}^2 \lambda_2) + h_{1k}^2 (h_{1i}^1 \lambda_2 + h_{1i}^2 \mu_2) = h_{ik}^1 \lambda_1 + h_{ik}^2 \lambda_2,$$

$$h_{2k}^1 (h_{1i}^1 \lambda_1 + h_{1i}^2 \lambda_2) + h_{2k}^2 (h_{1i}^1 \lambda_2 + h_{1i}^2 \mu_2) = h_{ik}^1 \lambda_2 + h_{ik}^2 \mu_2.$$

Таким образом,

$$h_{ik}^1 (\lambda_1 \mu_2 - (\lambda_2)^2) =$$

$$= (h_{1k}^1 \mu_2 - h_{2k}^1 \lambda_2)(h_{1i}^1 \lambda_1 + h_{1i}^2 \lambda_2) + (h_{1k}^2 \mu_2 - h_{2k}^2 \lambda_2)(h_{1i}^1 \lambda_2 + h_{1i}^2 \mu_2), \tag{17}$$

$$h_{ik}^2((\lambda_2)^2-\lambda_1\mu_2)=$$

$$=(h_{1k}^1\lambda_2-h_{2k}^1\lambda_1)(h_{1i}^1\lambda_1+h_{1i}^2\lambda_2)+(h_{1k}^2\lambda_2-h_{2k}^2\lambda_1)(h_{1i}^1\lambda_2+h_{1i}^2\mu_2). \tag{18}$$

Рассмотрим данную систему при $k=2$:

$$h_{i2}^1(\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2)=-h_{22}^1\lambda_2(h_{1i}^1\lambda_1+h_{1i}^2\lambda_2)+(\mu_2-h_{22}^2\lambda_2)(h_{1i}^1\lambda_2+h_{1i}^2\mu_2),$$

$$h_{i2}^2((\lambda_2)^2-\lambda_1\mu_2)=-h_{22}^1\lambda_1(h_{1i}^1\lambda_1+h_{1i}^2\lambda_2)+(\lambda_2-h_{22}^2\lambda_1)(h_{1i}^1\lambda_2+h_{1i}^2\mu_2).$$

Поскольку $\mu_2=h_{22}^1\lambda_1+h_{22}^2\lambda_2$, получаем

$$h_{i2}^1(\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2)=-h_{22}^1\lambda_2(h_{1i}^1\lambda_1+h_{1i}^2\lambda_2)+h_{22}^1\lambda_1(h_{1i}^1\lambda_2+h_{1i}^2\mu_2),$$

$$h_{i2}^2((\lambda_2)^2-\lambda_1\mu_2)=(h_{22}^2\lambda_2-\mu_2)(h_{1i}^1\lambda_1+h_{1i}^2\lambda_2)+(\lambda_2-h_{22}^2\lambda_1)(h_{1i}^1\lambda_2+h_{1i}^2\mu_2).$$

Окончательно находим

$$h_{i2}^1(\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2)=h_{22}^1h_{1i}^2(\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2),$$

$$h_{i2}^2((\lambda_2)^2-\lambda_1\mu_2)=(h_{1i}^1+h_{22}^2h_{1i}^2)((\lambda_2)^2-\lambda_1\mu_2).$$

Данная система имеет два решения:

1) $\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2\neq 0,\ h_{i2}^1=h_{22}^1h_{1i}^2,\ h_{i2}^2=h_{1i}^1+h_{22}^2h_{1i}^2$;

2) $\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2=0$.

Рассмотрим каждый случай подробно.

1. Подставим $h_{2k}^1=h_{22}^1h_{1k}^2,\ h_{2k}^2=h_{1k}^1+h_{22}^2h_{1k}^2$ в (17):

$$h_{ik}^1(\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2)=(h_{1k}^1\mu_2-h_{22}^1h_{1k}^2\lambda_2)(h_{1i}^1\lambda_1+h_{1i}^2\lambda_2)+$$

$$+(h_{1k}^2\mu_2-(h_{1k}^1+h_{22}^2h_{1k}^2)\lambda_2)(h_{1i}^1\lambda_2+h_{1i}^2\mu_2)=$$

$$=h_{1i}^1(h_{1k}^1\mu_2\lambda_1-h_{22}^1h_{1k}^2\lambda_2\lambda_1+h_{1k}^2\mu_2\lambda_2-(h_{1k}^1+h_{22}^2h_{1k}^2)(\lambda_2)^2)+$$

$$+h_{1i}^2(h_{1k}^1\mu_2\lambda_2-h_{22}^1h_{1k}^2(\lambda_2)^2+h_{1k}^2(\mu_2)^2-(h_{1k}^1+h_{22}^2h_{1k}^2)\lambda_2\mu_2)=$$

$$=(h_{1i}^1h_{1k}^1+h_{1i}^2h_{22}^1h_{1k}^2)(\lambda_1\mu_2-(\lambda_2)^2).$$

Подставим эти же соотношения в (18):

$$h_{ik}^2((\lambda_2)^2-\lambda_1\mu_2)=(h_{1k}^1\lambda_2-h_{22}^1h_{1k}^2\lambda_1)(h_{1i}^1\lambda_1+h_{1i}^2\lambda_2)+$$

$$+(h_{1k}^2\lambda_2-(h_{1k}^1+h_{22}^2h_{1k}^2)\lambda_1)(h_{1i}^1\lambda_2+h_{1i}^2\mu_2)=$$

$$=h_{1i}^1(h_{1k}^1\lambda_2\lambda_1-h_{22}^1h_{1k}^2(\lambda_1)^2+h_{1k}^2(\lambda_2)^2-(h_{1k}^1+h_{22}^2h_{1k}^2)\lambda_1\lambda_2)+$$

$$+h_{1i}^2(h_{1k}^1(\lambda_2)^2-h_{22}^1h_{1k}^2\lambda_1\lambda_2+h_{1k}^2\lambda_2\mu_2-(h_{1k}^1+h_{22}^2h_{1k}^2)\lambda_1\mu_2)=$$

$$= (h^1_{1i}h^2_{1k} + h^2_{1i}(h^1_{1k} + h^2_{22}h^2_{1k})((\lambda_2)^2 - \lambda_1\mu_2).$$

Таким образом, учитывая (16), получаем

$$h^1_{ik} = h^1_{1i}h^1_{1k} + h^2_{1i}h^1_{22}h^2_{1k} = h^1_{1i}h^1_{1k} + h^2_{1i}h^1_{2k},$$

$$h^2_{ik} = h^1_{1i}h^2_{1k} + h^2_{1i}(h^1_{1k} + h^2_{22}h^2_{1k}) = h^1_{1i}h^2_{1k} + h^2_{1i}h^2_{2k}.$$

В данном случае линейно независимые векторы $\tilde{e}_i = -h^1_{1i}e_1 - h^2_{1i}e_2 + e_i,\ i = \overline{3,n}$, принадлежат ядру аффинной фундаментальной формы. Следовательно, $\dim\ker h = n-2$, погружение является погружением ранга два.

2. Поскольку $\dim\ker S = 1,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ не могут одновременно быть нулевыми функциями. Таким образом, из условия $\lambda_1\mu_2 - (\lambda_2)^2 = 0$ следует, что $\lambda_1 \neq 0$. Поскольку $\lambda_i = h^1_{1i}\lambda_1 + h^2_{1i}\mu_1 = h^1_{1i}\lambda_1 + h^2_{1i}\lambda_2$, то $\mu_i = h^1_{1i}\lambda_2 + h^2_{1i}\mu_2$, в данном случае $\lambda_1\mu_i = \lambda_2\lambda_i$, т. е. $\lambda_1 S_2 = \lambda_2 S_1$. Рассмотрим преобразование базиса трансверсального распределения с матрицей Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2/\lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2/\lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что при таком преобразовании $\bar{h}^\alpha_{ij} = [\Phi^{-1}]^\alpha_\beta h^\beta_{ij},\ \bar{S}_\alpha = \Phi^\beta_\alpha S_\beta$. Следовательно, $\bar{S}_1 = S_1$, $\bar{S}_2 \equiv 0$, $\bar{h}^1 = h^1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}h^2$, $\bar{h}^2 = h^2,\ \bar{h}^1_{11} = 1$.

Установим свойства аффинной фундаментальной формы и операторов Вейнгартена в новом базисе трансверсального распределения. Уравнение Гаусса на базисных векторах принимает вид

$$h^1_{jk}\lambda_i = h^1_{ik}\lambda_j. \tag{19}$$

Подставив в это уравнение $j = k = 1$, получим $\lambda_i = h^1_{i1}\lambda_1$. При $j = 1$ имеем $h^1_{1k}\lambda_i = h^1_{ik}\lambda_1$, следовательно, $h^1_{ik} = h^1_{1k}h^1_{1i}$. Это означает, что векторы $\tilde{e}_k = e_k - h^1_{1k}e_1 \in \ker h^1$, $\tilde{e}_k \in \ker S_1$, $k = \overline{2,n}$.

Найдем $[\tilde{e}_j,\ \tilde{e}_k]$ с учетом того, что в выбранной системе координат все символы Кристоффеля нулевые:

$$[\tilde{e}_j,\ \tilde{e}_k] = \nabla_{e_j - h^1_{1j}e_1}(e_k - h^1_{1k}e_1) - \nabla_{e_k - h^1_{1k}e_1}(e_j - h^1_{1j}e_1) =$$

$$= -\frac{\partial h^1_{1k}}{\partial u^j}e_1 + h^1_{1j}\frac{\partial h^1_{1k}}{\partial u^1}e_1 + \frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^k}e_1 - h^1_{1k}\frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^1}e_1. \tag{20}$$

Рассмотрим уравнения Кодацци для h при $\alpha = 1$ на базисных векторах:

$$(\nabla_{e_i}h^1)(e_j,\ e_k) + \tau^1_\beta(e_i)h^\beta(e_j,\ e_k) = (\nabla_{e_j}h^1)(e_i,\ e_k) + \tau^1_\beta(e_j)h^\beta(e_i,\ e_k).$$

В рассматриваемом случае при $k = 1$ имеем

$$\frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^i} + \tau^1_1(e_i)h^1_{1j} + \tau^1_2(e_i)h^2_{1j} = \frac{\partial h^1_{1i}}{\partial u^j} + \tau^1_1(e_j)h^1_{1i} + \tau^1_2(e_j)h^2_{1i}. \tag{21}$$

Поскольку $h^1_{11} = 1,\ h^2_{11} = 0$, при $i = 1$ получаем

$$\frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^1} + \tau^1_1(e_1)h^1_{1j} + \tau^1_2(e_1)h^2_{1j} = \tau^1_1(e_j). \tag{22}$$

Запишем уравнения Кодацци для S при $\alpha = 2$ на базисных векторах:

$$\tau^1_2(e_i)S_1e_j = \tau^1_2(e_j)S_1e_i.$$

Поскольку $S_1e_j = h^1_{1j}\lambda_1 U$, следовательно,

$$\tau^1_2(e_i)h^1_{1j} = \tau^1_2(e_j)h^1_{1i},\ \tau^1_2(e_1)h^1_{1j} = \tau^1_2(e_j).$$

Учитывая данные равенства при подстановке (22) в уравнения (21), получаем

$$\frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^i} + h^1_{1j}\frac{\partial h^1_{1i}}{\partial u^1} + \tau^1_1(e_1)h^1_{1i}h^1_{1j} + \tau^1_2(e_1)h^2_{1i}h^1_{1j} + \tau^1_2(e_i)h^2_{1j} =$$

$$= \frac{\partial h^1_{1i}}{\partial u^j} + h^1_{1i}\frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^1} + \tau^1_1(e_1)h^1_{1i}h^1_{1j} + \tau^1_2(e_1)h^2_{1j}h^1_{1i} + \tau^1_2(e_j)h^2_{1i}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^i} + h^1_{1j}\frac{\partial h^1_{1i}}{\partial u^1} = \frac{\partial h^1_{1i}}{\partial u^j} + h^1_{1i}\frac{\partial h^1_{1j}}{\partial u^1}.$$

На основании полученного равенства и выражения (20) заключаем, что $[\tilde{e}_j,\ \tilde{e}_k] = 0$. Следовательно, распределение $K_x = \{\tilde{e}_j \in T_xM^n,\ j = \overline{2,n}\}$ интегрируемо. Пусть $u^i = \varphi^i(v^2,\ldots,v^n),\ i = \overline{1,n},$ — параметрическое уравнение интегральной поверхности. Выполним следующее преобразование координат $\tilde{r} = \bar{r}(u(v))$:

$$u^1 = v^1 + \varphi^1(v^2,\ldots,v^n),$$

$$u^j = \varphi^j(v^2,\ldots,v^n), \qquad j = \overline{2,n}.$$

При этом $\tilde{r}_1 = \bar{r}_1$, при $k = \overline{2,n}$ векторы $\tilde{r}_k = \bar{r}_i\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial v^k}$ принадлежат ядру h^1. Матрицы $h^1,\ h^2$ и операторы Вейнгартена в данной системе координат принимают вид

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad h^2 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{h}^2_{12} & \ldots & \tilde{h}^2_{1n} \\ \tilde{h}^2_{12} & \tilde{h}^2_{22} & \ldots & \tilde{h}^2_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}^2_{1n} & \tilde{h}^2_{2n} & \ldots & \tilde{h}^2_{nn} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$S_1\tilde{e}_1 = \tilde{U}, \qquad S_1\tilde{e}_j = 0, \qquad j = \overline{2,n}, \qquad S_2 \equiv 0. \tag{24}$$

Поскольку $\Gamma^k_{ij} = 0$, символы Кристоффеля при этом преобразуются так:

$$\frac{\partial u^k}{\partial v^\gamma}\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}.$$

Далее, так как $\dfrac{\partial u^k}{\partial v^1} = \mathrm{const}$, то $\dfrac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^\beta} = 0$ для всех k, β. Из $\dfrac{\partial u^k}{\partial v^\gamma}\tilde{\Gamma}^\gamma_{1\beta} = 0$ следует, что

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{1\beta} = 0 \quad \text{для всех} \quad \beta,\ \gamma.$$

Выберем теперь такую параметризацию $\hat{r} = \tilde{r}(v(w))$, чтобы $\hat{\Gamma}^k_{ij} = 0$ при $i,\ j,\ k = \overline{2, n}$:

$$v^1 = w^1,$$

$$v^i = \psi^i(w^2, \ldots, w^n), \qquad i = \overline{2, n}.$$

Заметим, что при таком преобразовании координат вид аффинной фундаментальной формы (23) и вид операторов Вейнгартена (24) не изменятся:

$$\frac{\partial v^k}{\partial w^\gamma}\hat{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial w^\alpha}\frac{\partial v^j}{\partial w^\beta} + \frac{\partial^2 v^k}{\partial w^\alpha \partial w^\beta}.$$

При $\alpha = 1 \quad \dfrac{\partial v^k}{\partial w^\gamma}\hat{\Gamma}^\gamma_{1\beta} = \tilde{\Gamma}^k_{1j}\dfrac{\partial v^j}{\partial w^\beta}$.

Поскольку $\tilde{\Gamma}^k_{1j} = 0$ для всех $j,\ k, \quad \hat{\Gamma}^\gamma_{1\beta} = 0$ для всех $\beta,\ \gamma$. Следовательно, в данной системе координат ненулевыми могут быть только символы Кристоффеля $\hat{\Gamma}^1_{jk},\ j,\ k \neq 1$. Первый пункт леммы доказан.

Рассмотрим уравнения Кодацци для S при $\alpha = 2$:

$$\tau^1_2(\hat{e}_i)S_1\hat{e}_1 = \tau^1_2(\hat{e}_1)S_1\hat{e}_i, \qquad i = \overline{2, n}.$$

Учитывая (24), получаем

$$\tau^1_2(\hat{e}_i) = 0, \qquad i = \overline{2, n}. \tag{25}$$

Рассмотрим преобразование базиса трансверсального распределения $\tilde{\xi}_\alpha = \Phi^\beta_\alpha \xi_\beta$ с матрицей $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Phi^2_2 \end{pmatrix}$, где $\Phi^2_2 \neq 0$. При таком преобразовании базиса трансверсального распределения вид аффинной фундаментальной формы (23) и вид операторов Вейнгартена (24) не изменятся. Формы трансверсальной связности при этом преобразуются следующим образом:

$$\tilde{\tau}^\beta_\alpha(X) = [\Phi^{-1}]^\beta_\gamma\{\tau^\gamma_\delta(X)\Phi^\delta_\alpha + X(\Phi^\gamma_\alpha)\}.$$

В данном случае $\tilde{\tau}^1_2(X) = \tau^1_2(X),\ \tilde{\tau}^2_2(X) = (\Phi^2_2)^{-1}\{\tau^2_2(X)\Phi^2_2 + X(\Phi^2_2)\}$. Найдем такую функцию Φ^2_2, чтобы

$$\tilde{\tau}^2_2(\hat{e}_i) = 0, \qquad i = \overline{2, n}. \tag{26}$$

Получаем систему уравнений $\dfrac{\partial \Phi^2_2}{\partial w^i} = -\tau^2_2(\hat{e}_i)\Phi^2_2$.

Из уравнения Риччи (7) при $\alpha = 2,\ \beta = 2,\ X = \hat{e}_i,\ Y = \hat{e}_j$

$$\hat{e}_i(\tau^2_2(\hat{e}_j)) + \tau^2_\gamma(\hat{e}_i)\tau^\gamma_2(\hat{e}_j) - \hat{e}_j(\tau^2_2(\hat{e}_i)) - \tau^2_\gamma(\hat{e}_j)\tau^\gamma_2(\hat{e}_i) = 0,$$

используя равенства (25), получаем $\dfrac{\partial}{\partial w^i}\tau^2_2(\hat{e}_j) = \dfrac{\partial}{\partial w^j}\tau^2_2(\hat{e}_i)$. Следовательно,

$$\Phi_2^2 = \exp\left(-\int \tau_2^2(\hat{e}_2)dw^2\right).$$

Таким образом, получаем равенства (23) – (26).

Лемма доказана.

C. $\dim\ker h = n-2$. В данном случае аффинное погружение (вне зависимости от ранга отображения Вейнгартена) является погружением ранга два. Как известно, в зависимости от аффинной фундаментальной формы эти погружения делятся на три класса: эллиптический, гиперболический и параболический. Классификация таких погружений дана в [12].

4. Параллельные аффинные погружения с нулевым отображением Вейнгартена.

Теорема 1. *Параллельное аффинное погружение* $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ *максимальной точечной коразмерности с нулевым отображением Вейнгартена аффинно эквивалентно погружению графика отображения, радиус-вектор которого может быть задан следующим образом*:

$$\vec{r}(u^1,\ldots,\, u^n) = \left\{u^1,\ldots,\, u^n,\ h^1_{jk}u^ju^k,\ h^2_{jk}u^ju^k\right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим аффинное погружение $(M^n,\nabla) \to (\mathbb{R}^{n+2}, D)$ с плоской связностью ∇ и нулевым отображением Вейнгартена. Такое погружение аффинно эквивалентно погружению графика некоторого гладкого отображения, т. е.

$$\vec{r}\left(u^1,\ldots,\, u^n\right) = \left\{u^1,\ldots,\, u^n,\ f^1\left(u^1,\ldots,\, u^n\right),\ f^2\left(u^1,\ldots,\, u^n\right)\right\},$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^i} = \left\{0,\ldots,1,\ldots,0,\frac{\partial f^1}{\partial u^i},\frac{\partial f^2}{\partial u^i}\right\},$$

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^i\partial u^j} = \left\{0,\ldots,0,\frac{\partial^2 f^1}{\partial u^i\partial u^j},\frac{\partial^2 f^2}{\partial u^i\partial u^j}\right\},$$

$$\xi_1 = \{0,\ldots,0,1,0\}, \qquad \xi_2 = \{0,\ldots,0,0,1\}.$$

В данном случае $S\equiv 0,\ \ \tau^i_j(e_k)\equiv 0,\ \ \Gamma^i_{jk}\equiv 0,\ \ h^\alpha_{ij} = \dfrac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^i\partial u^j}$. Следовательно, координаты кубической формы (3) вычисляются по формулам $C^\alpha_{ijk} = \dfrac{\partial h^\alpha_{jk}}{\partial u^i}$. А поскольку кубическая форма нулевая, то $h^\alpha_{jk} = \mathrm{const}$. Следовательно, с учетом аффинного преобразования $f^\alpha(u^1,\ldots,u^n) = h^\alpha_{jk}u^ju^k$. Итак,

$$\vec{r}(u^1,\ldots,\, u^n) = \{u^1,\ldots,\, u^n,\ h^1_{jk}u^ju^k,\ h^2_{jk}u^ju^k\}.$$

В данном случае мы получаем результат, аналогичный невырожденной гиперповерхности.

5. Параллельные аффинные погружения с одномерным отображением Вейнгартена. Рассмотрим аффинное погружение $(M^n,\nabla)\to(\mathbb{R}^{n+2},D)$ с плоской связностью ∇ максимальной точечной коразмерности, у которого $\dim\mathrm{im}\ S = 1$ и $\dim\ker h < n-2$. Выберем параметризацию погружения и базис в трансверсальном распределении, которые гарантированы леммой 2. Запишем координаты кубической формы:

$$C^1_{ijk} = -h^1(\nabla_{e_i} e_j,\ e_k) - h^1(e_j,\ \nabla_{e_i} e_k) + \tau^1_\beta(e_i) h^\beta_{jk} = 0.$$

В частности,

$$C^1_{i11} = -\Gamma^1_{i1} + \tau^1_1(e_i) h^1_{11} + \tau^1_2(e_i) h^2_{11} = \tau^1_1(e_i) = 0,$$

$$C^1_{i1k} = -\Gamma^1_{ik} + \tau^1_1(e_i) h^1_{1k} + \tau^1_2(e_i) h^2_{1k} = -\Gamma^1_{ik} = 0, \qquad i \neq 1,$$

$$C^1_{1jk} = \tau^1_1(e_1) h^1_{jk} + \tau^1_2(e_1) h^2_{jk} = \tau^1_2(e_1) h^2_{jk}, \qquad j,\ k \neq 1.$$

Поскольку $\dim\ker h < n-2$, следовательно, не все h^2_{jk} нулевые и, значит, $\tau^1_2(e_1) = 0$. Таким образом, получаем

$$\Gamma^i_{jk} = 0,\ \tau^1_1(e_i) = 0,\ \tau^1_2(e_i) = 0 \text{ при всех } i, j, k. \tag{27}$$

Поскольку все символы Кристоффеля нулевые,

$$C^2_{ijk} = \frac{\partial h^2_{jk}}{\partial u^i} + \tau^2_1(e_i) h^1_{jk} + \tau^2_2(e_i) h^2_{jk} = 0.$$

В частности,

$$C^2_{i11} = \tau^2_1(e_i) = 0; \qquad C^2_{ijk} = \frac{\partial h^2_{jk}}{\partial u^i} = 0, \quad i \neq 1; \qquad C^2_{1jk} = \frac{\partial h^2_{jk}}{\partial u^1} + \tau^2_2(e_1) h^2_{jk} = 0.$$

Итак, все формы трансверсальной связности, кроме, возможно, $\tau^2_2(e_1)$, нулевые. Из уравнения Риччи (7) при $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $X = e_i$, $i \neq 1$, $Y = e_1$ следует, что $\dfrac{\partial}{\partial u^i}\tau^2_2(e_1) = 0$ для всех $i \neq 1$. Осуществив преобразование базиса трансверсального распределения $\tilde{\xi}_\alpha = \Phi^\beta_\alpha \xi_\beta$ с матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Phi^2_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Phi^2_2(u^1) = \exp\left(-\int \tau^2_2(e_1) du^1\right),$$

получаем, что в новом базисе $\tau^\beta_\alpha(e_i) = 0$ для всех α, β, i. Таким образом, мы получаем условие на коэффициенты аффинной фундаментальной формы $\dfrac{\partial h^2_{jk}}{\partial u^i} = 0$, следовательно, $h^2_{jk} = \mathrm{const}$. Преобразуем базис касательного пространства с помощью постоянной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix}$ так, чтобы в новом базисе $\tilde{h}^2_{ij} = \delta^j_i b_j$, $i \neq 1$, где δ^j_i — символ Кронекера, $b_j = \mathrm{const}$. Обозначим $\tilde{h}^2_{1j} = a_j = \mathrm{const}$. В выбранной системе координат имеем

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad h^2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^i_{jk} = 0; \qquad S_1(e_1) = s^i e_i, \quad S_1(e_j) = 0, \quad j \neq 1, \quad S_2 \equiv 0; \qquad \tau^\beta_\alpha(e_i) = 0.$$

Из уравнений Кодацци (6) для S_1 при $X = e_1,\ Y = e_i,\ i \neq 1$, следует, что $\nabla_{e_i}(S_1 e_1) = 0$, т. е. $\dfrac{\partial s^k}{\partial u^i} = 0$, $i \neq 1$, $\forall k$. Значит, $s^k = s^k(u^1)$. Используя уравнение Риччи (7) при $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ X = e_1,\ Y = e_i,\ i \neq 1$, получаем $h^2(e_i,\ S_1 e_1) = 0$. Таким образом, имеем следующие условия на функции s^k :

$$a_i s^1(u^1) + b_i s^i(u^1) = 0, \qquad i = \overline{2, n}. \tag{28}$$

Используя разложение Вейнгартена (2), для ξ_1, ξ_2 получаем

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_1(u^1), \qquad \vec{\xi}_2 = \overrightarrow{\mathrm{const}}.$$

Запишем разложения Гаусса:

$$\vec{r}_{11} = \vec{\xi}_1(u^1), \qquad \vec{r}_{1i} = a_i \vec{\xi}_2, \qquad \vec{r}_{ji} = \delta^j_i b_j \vec{\xi}_2.$$

Интегрируя, получаем

$$\vec{r}_1 = \sum_{i=2}^n a_i u^i \vec{\xi}_2 + \int \vec{\xi}_1(u^1) du^1, \qquad \vec{r}_j = (a_j u^1 + b_j u^j)\vec{\xi}_2 + \vec{c}_j,$$

$$\vec{r} = \iint \vec{\xi}_1(u^1) du^1 du^1 + \sum_{i=2}^n (a_i u^1 u^i + \frac{b_i}{2}(u^i)^2)\vec{\xi}_2 + \sum_{i=2}^n \vec{c}_i u^i,$$

где $\vec{\xi}_1(u^1)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\vec{\xi}_1'(u^1) = -s^1(u^1) \int \vec{\xi}_1(u^1) du^1 - \sum_{i=2}^n s^i(u^1) a_i u^1 \vec{\xi}_2 - \sum_{i=2}^n s^i(u^1) \vec{c}_i,$$

и, кроме того, $\left| \int \vec{\xi}_1(u^1) du^1,\, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n,\, \vec{\xi}_1(u^1),\, \vec{\xi}_2 \right| \neq 0 \ \ \forall u^1.$

Обозначим $\iint \vec{\xi}_1(u^1) du^1 du^1 = \vec{\varphi}(u^1)$ и направим оси координат в пространстве $\mathbb{R}^{n+2}$, начиная с третьей, по направлениям $\vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n, \vec{\xi}_2$. Тогда получим следующие условия на координатные функции $\varphi^i(u^1)$:

$$\begin{array}{rcl}
(\varphi^1)''' & = & -s^1(u^1)(\varphi^1)', \\
(\varphi^2)''' & = & -s^1(u^1)(\varphi^2)', \\
(\varphi^i)''' & = & -s^1(u^1)(\varphi^i)' - s^{i-1}(u^1), \qquad i = \overline{3, n+1}, \\
(\varphi^{n+2})''' & = & -s^1(u^1)(\varphi^{n+2})' - \displaystyle\sum_{i=2}^n a_i u^1 s^i(u^1)
\end{array} \tag{29}$$

и, кроме того,

$$\begin{vmatrix} (\varphi^1)' & (\varphi^1)'' \\ (\varphi^2)' & (\varphi^2)'' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall u^1. \tag{30}$$

Следовательно, радиус-вектор подмногообразия

$$\vec{r} = \vec{\varphi}(u^1) + \left\{0, 0, u^2, \ldots, u^n, \ \sum_{i=2}^{n} \left(a_i u^1 u^i + \frac{b_i}{2}(u^i)^2 \right) \right\}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Произвольное параллельное аффинное погружение $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ максимальной точечной коразмерности с плоской связностью и одномерным отображением Вейнгартена может быть локально параметризовано следующим образом*:

$$\vec{r} = \vec{\varphi}(u^1) + \left\{0, 0, u^2, \ldots, u^n, \ \sum_{i=2}^{n} \left(a_i u^1 u^i + \frac{b_i}{2}(u^i)^2 \right) \right\} \tag{31}$$

с трансверсальным распределением $Q = \operatorname{span}\{\vec{\xi}_1, \ \vec{\xi}_2\}, \ \vec{\xi}_1 = \vec{\varphi}''(u_1), \ \vec{\xi}_2 = \{0, \ 0, \ldots, 0, \ 1\}$, *где выполнены условия* (28), (29), (30).

6. Параллельные аффинные погружения с двумерным отображением Вейнгартена.

Лемма 3. *Произвольное параллельное аффинное погружение $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ с плоской связностью и двумерным отображением Вейнгартена представляет собой цилиндр с $(n-2)$-мерной образующей, базой цилиндра является двумерная поверхность в $\mathbb{R}^4$ с плоской связностью, плоской нормальной связностью и постоянными коэффициентами аффинной фундаментальной формы.*

Доказательство. Поскольку образ отображения Вейнгартена двумерен, $\dim\ker h = n - 2$. Так как кубическая форма нулевая, ядро аффинной фундаментальной формы параллельно (лемма 1). Значит, в данном случае подмногообразие является цилиндром с $(n-2)$-мерной образующей над двумерной базой.

Пусть $\ker h = \{e_3, \ldots, e_n\}$. Как показано в [12], радиус-вектор такого подмногообразия можно задать следующим образом:

$$\vec{r}(u^1, \ldots, u^n) = \vec{\rho}(u^1, u^2) + \sum_{i=3}^{n} u^i \vec{a}_i,$$

т. е.

$$\vec{r}(u^1, \ldots, u^n) = \{\rho^1(u^1, u^2), \rho^2(u^1, u^2), \rho^3(u^1, u^2), \rho^4(u^1, u^2), u^3, \ldots, u^n\}. \tag{32}$$

Поскольку индуцированная связность плоская, можно выбрать параметризацию поверхности ρ таким образом, что все символы Кристоффеля будут нулевыми. Трансверсальное распределение выберем следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial u^1 \partial u^1} = \xi_1, \qquad \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial u^1 \partial u^2} = \xi_2, \qquad \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial u^2 \partial u^2} = q\xi_1 + p\xi_2.$$

В выбранной системе координат

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad h^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad h^j = O_{n\times n},$$

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \quad \text{при всех} \quad i, j, k, \quad \tau^\beta_\alpha(e_i) = 0, \quad i = \overline{3, n} \quad \text{при всех} \quad \alpha, \beta.$$

Запишем координаты кубической формы:

$$C^\alpha_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^i} h^\alpha_{jk} + \tau^\alpha_1(e_i) h^1_{jk} + \tau^\alpha_2(e_i) h^2_{jk} = 0.$$

В частности,

$$\begin{array}{lllllll} C^\alpha_{111} & = & \tau^\alpha_1(e_1) = 0, & & C^\alpha_{112} & = & \tau^\alpha_2(e_1) = 0, \\ C^\alpha_{211} & = & \tau^\alpha_1(e_2) = 0, & & C^\alpha_{212} & = & \tau^\alpha_2(e_2) = 0, \end{array}$$

$$C^\alpha_{i22} = \frac{\partial}{\partial u^i} h^\alpha_{22} = 0,$$

следовательно, $q = \text{const}, \ p = \text{const}$. Итак,

$$\Gamma^i_{jk} = 0; \quad \tau^\beta_\alpha(e_i) = 0; \quad h^\alpha_{ij} = \text{const}, \quad i, j \le 2; \quad h^\alpha_{ij} = 0, \quad i, j > 2. \tag{33}$$

Таким образом, база цилиндра (32) — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^4$ с плоской связностью, плоской нормальной связностью и постоянными коэффициентами аффинной фундаментальной формы.

Лемма доказана.

В [13] дана классификация невырожденных двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^4$ с плоской связностью и плоской нормальной связностью. Выберем из них поверхности с постоянными коэффициентами аффинной фундаментальной формы и двумерным отображением Вейнгартена. Поверхностями с данными свойствами являются комплексные кривые (эллиптический класс) и произведения двух плоских кривых (гиперболический класс). Вырожденными двумерными поверхностями в $\mathbb{R}^4$ с заданными свойствами являются линейчатые поверхности (параболический класс). Рассмотрим каждый случай отдельно.

Погружения гиперболического класса. Поскольку погружение $M^2 \to \mathbb{R}^4$ с заданными свойствами является произведением двух плоских кривых, радиус-вектор $\vec{\rho}$ задается следующим образом:

$$\vec{\rho}(u^1, u^2) = \vec{\varphi}(u^1) + \vec{\psi}(u^2), \tag{34}$$

где

$$\vec{\varphi}(u^1) = \{\varphi^1(u^1), \varphi^2(u^1), 0, 0, 0, \ldots, 0\},$$

$$\vec{\psi}(u^2) = \{0, 0, \psi^1(u^2), \psi^2(u^2), 0, \ldots, 0\}.$$

Разложения Гаусса для подмногообразия (32) с заданной вектор-функцией (34) таковы:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^1 \partial u^1} = \vec{\varphi}''(u^1) = \xi_1(u^1), \qquad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2 \partial u^2} = \vec{\psi}''(u^2) = \xi_2(u^2), \qquad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = 0.$$

Из разложения Вейнгартена (2) и условия на формы трансверсальной связности (33) получаем условия на $\vec{\varphi}(u^1)$, $\vec{\psi}(u^2)$:

$$\vec{\varphi}''' = -s^1(u^1)\vec{\varphi}', \qquad \vec{\psi}''' = -s^2(u^2)\vec{\psi}', \tag{35}$$

где $S_1e_1 = s^1(u^1)e_1,\ S_2e_2 = s^2(u^2)e_2$ и, кроме того,

$$\dim \mathrm{Span}(\vec{\varphi}'(u^1),\ \vec{\varphi}''(u^1),\ \vec{\psi}'(u^2),\ \vec{\psi}''(u^2)) = 4 \qquad \forall u^1, u^2, \tag{36}$$

Span означает линейную оболочку соответствующих векторов. Следовательно, существует система координат, в которой радиус-вектор подмногообразия гиперболического класса с плоской связностью и нулевой кубической формой имеет вид

$$\vec{r}(u^1, \ldots, u^n) = \{\varphi^1(u^1), \varphi^2(u^1), \psi^1(u^2), \psi^2(u^2), u^3, \ldots, u^n\}$$

с условиями (35), (36).

Погружения эллиптического класса. Поскольку погружение $M^2 \to \mathbb{R}^4$ с заданными свойствами является комплексной кривой, радиус-вектор $\vec{\rho}$ задается следующим образом:

$$\vec{\rho}(u^1, u^2) = \{f^1(u^1, u^2), f^2(u^1, u^2), g^1(u^1, u^2), g^2(u^1, u^2), 0, \ldots, 0\}, \tag{37}$$

где $f^k(u^1, u^2) = \mathrm{Re}\ F^k(z),\ g^k(u^1, u^2) = \mathrm{Im}\ F^k(z),\ u^1 + iu^2 = z.$

Разложения Гаусса для подмногообразия (32) с заданной вектор-функцией $\vec{\rho}(u^1, u^2)$ таковы:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^1 \partial u^1} = \xi_1, \qquad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^1 \partial u^2} = \xi_2, \qquad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2 \partial u^2} = -\xi_1, \qquad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} = 0.$$

Из уравнений Коши – Римана $\dfrac{\partial f^k}{\partial u^1} = \dfrac{\partial g^k}{\partial u^2},\ \dfrac{\partial f^k}{\partial u^2} = -\dfrac{\partial g^k}{\partial u^1}$ получаем условия на операторы Вейнгартена

$$S_2e_1 = S_1e_2, \qquad S_2e_2 = -S_1e_1.$$

Пусть $S_1e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2$, тогда из уравнений Риччи (7) при $\beta = 1,\ X = e_1,\ Y = e_2$ и (33) получаем $h^\alpha(e_1,\ S_1e_2) = h^\alpha(e_2,\ S_1e_1)$. Поскольку $h^1_{11} = -h^1_{22} = 1,\ h^1_{12} = 0,\ h^2_{11} = h^2_{22} = 0,\ h^2_{12} = 1$, имеем

$$S_1e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, \qquad S_1e_2 = -\mu e_1 + \lambda e_2.$$

Из уравнений Кодацци (6) для S при $X = e_1,\ Y = e_2$ следует, что $\nabla_{e_1}(S_1e_2) = \nabla_{e_2}(S_1e_1)$, $\nabla_{e_2}(S_1e_2) = -\nabla_{e_1}(S_1e_1)$, т. е.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u^1} = \frac{\partial \mu}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u^2} = -\frac{\partial \mu}{\partial u^1}.$$

Таким образом, функции $\lambda(u^1, u^2)$ и $\mu(u^1, u^2)$ являются действительной и мнимой частями некоторой функции $\zeta(z)$ комплексной переменной. Поскольку формы трансверсальной связности нулевые, из разложений Вейнгартена (2) получаем следующие условия на функции $F^k(z)$: $F^1(z),\ F^2(z)$ принадлежат фундаментальной системе решений (за исключением постоянного решения) дифференциального уравнения

$$\frac{d^3F}{dz^3} = -\zeta(z)\frac{dF}{dz}. \tag{38}$$

Следовательно, существует система координат, в которой радиус-вектор подмногообразия эллиптического класса с плоской связностью и нулевой кубической формой имеет вид

$$\vec{r} = \left\{f^1(u^1,u^2), f^2(u^1,u^2), g^1(u^1,u^2), g^2(u^1,u^2), u^3, \ldots, u^n\right\}.$$

Здесь функции f^1, f^2, g^1 и g^2 удовлетворяют условиям (37) и (38).

Погружения параболического класса. Поскольку коэффициенты аффинной фундаментальной формы постоянные, то существуют параметризация погружения и базис трансверсального распределения такие, что $h^1_{11} = 1$, $h^1_{12} = h^1_{22} = 0$, $h^2_{11} = h^2_{22} = 0$, $h^2_{12} = 1$. Радиус-вектор $\vec{\rho}(u^1,u^2)$ задается следующим образом:

$$\vec{\rho}(u^1,u^2) = \vec{\varphi}(u^1) + u^2\vec{\psi}(u^1). \tag{39}$$

Базисные касательные векторы подмногообразия (32) имеют вид

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1} = \vec{\varphi}'(u^1) + u^2\vec{\psi}'(u^1), \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2} = \vec{\psi}(u^1), \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^i} = \vec{a}_i, \qquad i = \overline{3,n}.$$

Разложения Гаусса запишутся в виде

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^1\partial u^1} = \vec{\varphi}''(u^1) + u^2\vec{\psi}''(u^1) = \xi_1, \qquad \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^1\partial u^2} = \vec{\psi}'(u^1) = \xi_2, \qquad \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u^i\partial u^j} = 0.$$

Очевидно, что в данном случае операторы Вейнгартена имеют следующие свойства:

$$S_2e_1 = S_1e_2, \qquad S_2e_2 = 0.$$

Пусть $S_1e_1 = s^1_1e_1 + s^2_1e_2,\ S_1e_2 = s^1_2e_1 + s^2_2e_2$. Тогда из уравнений Риччи (7) при $\beta = 1,\ X = e_1,\ Y = e_2$ с учетом (33) получаем

$$h^1(e_1,S_1e_2) - h^1(e_2,S_1e_1) = s^1_2 = 0, \qquad h^2(e_1,S_1e_2) - h^2(e_2,S_1e_1) = s^2_2 - s^1_1 = 0,$$

$$S_1e_1 = s^1_1e_1 + s^2_1e_2, \qquad S_1e_2 = s^1_1e_2.$$

Из уравнений Кодацци (6) для S_1 при $X = e_1,\ Y = e_2$ следует, что $\nabla_{e_1}(S_1e_2) = \nabla_{e_2}(S_1e_1)$, т. е.

$$\frac{\partial s^1_1}{\partial u^1} = \frac{\partial s^2_1}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial s^1_1}{\partial u^2} = 0.$$

Следовательно, $s^1_1 = \lambda(u^1),\ s^2_1 = \lambda'(u^1)u^2 + \mu(u^1)$. Таким образом, разложения Вейнгартена (2) дают условия на вектор-функции $\vec{\varphi}(u^1),\ \vec{\psi}(u^1)$:

$$\vec{\varphi}''' + u^2\vec{\psi}''' = -\lambda(\vec{\varphi}' + u^2\vec{\psi}') - (\lambda'u^2 + \mu)\vec{\psi},$$

$$\vec{\psi}'' = -\lambda\vec{\psi}.$$

Продифференцировав второе уравнение и подставив в первое, получим

$$\vec{\varphi}''' = -\lambda\vec{\varphi}' - \mu\vec{\psi},$$
$$\vec{\psi}'' = -\lambda\vec{\psi}. \tag{40}$$

Кроме того, для регулярности погружения необходимо выполнение условия

$$\dim \operatorname{Span}(\vec{\varphi}'(u^1),\ \vec{\varphi}''(u^1),\ \vec{\psi}(u^1),\ \vec{\psi}'(u^1)) = 4 \quad \forall u^1. \tag{41}$$

Следовательно, существует система координат, в которой радиус-вектор подмногообразия параболического класса с плоской связностью и нулевой кубической формой имеет вид

$$\vec{r}(u^1,\ldots,u^n) = \{\varphi^1(u^1) + u^2\psi^1(u^1),\ldots,\varphi^4(u^1) + u^2\psi^4(u^1), u^3,\ldots,u^n\},$$

и выполнены условия (40), (41).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Произвольное параллельное аффинное погружение $f\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ максимальной точечной коразмерности с плоской связностью и двумерным отображением Вейнгартена представляет собой цилиндр с $(n-2)$-мерной образующей, базой цилиндра является двумерная поверхность в $\mathbb{R}^4$ одного из трех типов*:

1) *произведение двух плоских кривых* (34) *с условиями* (35), (36);

2) *комплексная кривая* (37) *с условием* (38);

3) *линейчатая поверхность* (39) *с условиями* (40), (41).

Подмногообразие эллиптического класса не может иметь одномерного отображения Вейнгартена. Если подмногообразие гиперболического или параболического классов имеет одномерное отображение Вейнгартена, то оно может быть параметризовано радиусом-вектором (31).

7. Пример. *Погружение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ с одномерным отображением Вейнгартена и тривиальным ядром аффинной фундаментальной формы*

$$\vec{r}(x,y,z) = \left\{x,\ \frac{1}{2}x^2,\ \frac{1}{6}x^3 + y,\ z,\ \frac{1}{24}x^4 + xy + \frac{1}{2}z^2\right\}.$$

Касательные векторы:

$$\vec{r}'_x = \left\{1, x, \frac{1}{2}x^2, 0, \frac{1}{6}x^3 + y\right\}, \qquad \vec{r}'_y = \{0,0,1,0,x\}, \qquad \vec{r}'_z = \{0,0,0,1,z\}.$$

Разложения Гаусса:

$$\vec{r}''_{xx} = \left\{0, 1, x, 0, \frac{1}{2}x^2\right\} = \xi_1, \qquad \vec{r}''_{xy} = \{0,0,0,0,1\} = \xi_2, \qquad \vec{r}''_{yy} = 0,\ \vec{r}''_{xz} = 0,$$

$$\vec{r}''_{yz} = 0, \qquad \vec{r}''_{zz} = \{0,0,0,0,1\} = \xi_2.$$

Разложения Вейнгартена:

$$(\xi_1)'_x = \{0,0,1,0,x\} = \vec{r}'_y, \qquad (\xi_1)'_y = (\xi_2)'_x = (\xi_2)'_y = (\xi_1)'_z = (\xi_2)'_z = 0.$$

Таким образом, для данного погружения:
символы Кристоффеля $\Gamma_{ij}^k = 0$;
компоненты аффинной фундаментальной формы

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

операторы Вейнгартена $S_1 e_1 = -e_2, \quad S_1 e_2 = S_1 e_3 = 0, \quad S_2 \equiv 0$;
формы трансверсальной связности $\tau_\alpha^\beta(e_i) = 0$.
Очевидно, что в данном случае кубическая форма является нулевой.

1. *Nomizu K., Sasaki T.* Affine differential geometry. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 264 p.
2. *Lumiste U.* Submanifolds with parallel fundamental form // Handb. Different. Geometry. – Amsterdam: Elsevier, 2000. – Vol. I. – P. 779 – 864.
3. *Ferus D.* Immersion with parallel second fundamental form // Math. Z. – 1974. – **140**. – S. 87 – 93.
4. *Vrancken L.* Parallel affine immersions with maximal codimention// Tohoku Math. J. – 2001. – **53**. – P. 511 – 531.
5. *Scharlach C., Vrancken L.* Parallel surfaces in affine 4-space// Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 2003. – **73**. – P. 167 – 179.
6. *Nomizu K., Pinkall U.* On the geometry of affine immersions // Math. Z. – 1987. – **195**. – S. 165 – 178.
7. *Nomizu K., Vrancken L.* A new equiaffine theory for surfaces in $\mathbb{R}^4$ // Int. J. Math. – 1993. – **4**. – P. 127 – 165.
8. *Magid M., Vrancken L.* Affine surfaces in $\mathbb{R}^5$ with zero cubic form // Different. Geom. Appl. – 2001. – **14(2)**. – P. 125 – 136.
9. *Dillen F., Vrancken L.* Parallel hypersurfaces of affine spaces// Sem. mat. Messina Ser. – 1993. – **2(16)**. – P. 71 – 80.
10. *Shugailo O. O.* On affine immersions with flat connections // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2012. – **8**, № 1. – P. 90 – 105.
11. *Nomizu K., Opozda B.* On affine hypersurfaces with parallel nullity // J. Math. Soc. Jap. – 1992. – **44**, № 4. – P. 693 – 699.
12. *Shugailo O. O.* Affine submanifolds of rank two // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2013. – **9**, № 2. – P. 227 – 238.
13. *Magid M., Vrancken L.* Flat affine surfaces in $\mathbb{R}^4$ with flat normal connection // Geom. dedic. – 2000. – **81**. – P. 19 – 31.

Получено 22.06.12,
после доработки — 02.01.13