УДК 517.911

А. В. Плотников (Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры, Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова),
Н. В. Скрипник (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

We consider generalized set-valued differential equations with generalized derivative and prove the existence and uniqueness theorems for cases of interval-valued and set-valued mappings.

Розглянуто узагальнене багатозначне диференціальне рівняння і доведено теореми існування та єдиності розв'язку для інтервального та багатозначного випадків.

1. Введение. Развитие теории многозначных отображений привело к вопросу, что понимать под производной от многозначного отображения. Основной причиной, по которой возникают трудности при введении данного понятия, является нелинейность пространства $\mathrm{comp}(R^n)$, что влечет за собой отсутствие операции вычитания.

M. Hukuhara [1] ввел интеграл и производную для многозначных отображений и рассмотрел как они связаны между собой. Затем T. F. Bridgland [2] ввели Huygens-производную, Ю. Н. Тюрин [3] и H. T. Banks, M. Q. Jacobs [4] ввели π-производную, которая использует теорему вложения Радстрема [5], А. В. Плотников ввел T-производную [6, 7], А. Н. Витюк — дробную производную для многозначных отображений [8], B. Bede, S. G. Gal ввели обобщенную производную для интервальных отображений [9], а А. В. Плотников и Н. В. Скрипник [10] — обобщенную производную для многозначных отображений. В дальнейшем свойства этих производных рассматривались в работах [7, 11 – 18].

В 1969 г. F. S. de Blasi и F. Iervolino рассмотрели дифференциальные уравнения с производной Хукухары [11]. В дальнейшем многие авторы изучали свойства решений таких уравнений [7, 15, 18 – 23], интегро-дифференциальные уравнения [24, 25], уравнения высших порядков [26], импульсные [15, 18] и управляемые [27 – 29] уравнения, а также дифференциальные включения [7, 30]. Впоследствии рассматривались также дифференциальные уравнения с π-производной [12, 18, 31] и T-производной [6, 7], интервальные уравнения с обобщенной производной [16, 17] и многозначные уравнения с обобщенной производной [10, 32, 33].

Многозначные уравнения в последнее время не только изучаются в рамках самостоятельной теории — многозначных дифференциальных уравнений, но и широко применяются при исследовании обычных дифференциальных включений и нечетких дифференциальных уравнений и включений [15, 18, 21, 22, 34, 35].

В данной работе мы введем понятие обобщенной производной для многозначных отображений (подробнее см. [10]), рассмотрим обобщенное дифференциальное уравнение с обобщенной производной и докажем теоремы существования и единственности для интервального и многозначного случаев.

2. Обобщенная производная. Пусть $\mathrm{conv}(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min\left\{r \geq 0\colon A \subset B + S_r(0),\ B \subset A + S_r(0)\right\},$$

где $A, B \in \mathrm{conv}(R^n)$, $S_r(c) = \big\{x \in R^n \colon \|x - c\| \leq r\big\}$.

Теорема 1 [37]. *Пространство* $\mathrm{conv}(R^n)$ *является полулинейным полным локально компактным метрическим пространством.*

Определение 1 [1]. *Пусть* $X, Y \in \mathrm{conv}(R^n)$. *Множество* $Z \in \mathrm{conv}(R^n)$ *такое, что* $X = Y + Z$, *называется разностью Хукухары множеств* X *и* Y *и обозначается* $X \overset{h}{-} Y$.

***Замечание* 1.** Разность Хукухары является частным случаем разности Минковского [37], когда Y полностью выметает множество X, и если разность Хукухары существует, то определяется единственным образом. Условия существования разности Хукухары подробно рассмотрены в [37].

Определение 2 [1]. *Многозначное отображение* $X(\cdot) \colon R^1 \to \mathrm{conv}(R^n)$ *дифференцируемо по Хукухаре в точке* $t_0 \in R^1$, *если существует* $D_H X(t_0) \in \mathrm{conv}(R^n)$ *такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta \to 0_+} \Delta^{-1}\Big(X(t_0 + \Delta) \overset{h}{-} X(t_0)\Big), \qquad \lim_{\Delta \to 0_+} \Delta^{-1}\Big(X(t_0) \overset{h}{-} X(t_0 - \Delta)\Big) \tag{1}$$

существуют и равны $D_H X(t_0)$.

Известно, что если отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре на сегменте $[a, b]$, то функция $t \to \mathrm{diam}\,\big(X(t)\big)$, $t \in [a, b]$, не убывает на этом сегменте.

***Замечание* 2.** Свойства производной Хукухары подробно рассмотрены в [1, 15, 18].

Введем понятие обобщенной производной для многозначных отображений. Пусть $(t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$ — Δ-окрестность точки $t_0 \in R^1$, $\Delta > 0$.

Для произвольного $t \in (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$ рассмотрим следующие разности Хукухары:

$$X(t) \overset{h}{-} X(t_0), \quad t \geq t_0, \tag{2}$$

$$X(t_0) \overset{h}{-} X(t), \quad t \geq t_0, \tag{3}$$

$$X(t_0) \overset{h}{-} X(t), \quad t \leq t_0, \tag{4}$$

$$X(t) \overset{h}{-} X(t_0), \quad t \leq t_0, \tag{5}$$

если эти разности существуют.

Определение 3. *Разности* (2) *и* (3) ((4) *и* (5)) *будем называть правыми* (*левыми*) *разностями.*

***Замечание* 3.** Из свойств разности Хукухары следует, что обе односторонние разности существуют тогда и только тогда, когда $X(t) = A + \big\{f(t)\big\}$ для $t > t_0$ или $t < t_0$. Если существуют все разности, то $X(t) = A + \big\{f(t)\big\}$ во всей Δ-окрестности точки t_0, где $A \in \mathrm{conv}(R^n)$, $f \colon R^1 \to R^n$.

Если для всех $t \in (t_0 - \Delta, t_0)$ $\big(t \in (t_0, t_0 + \Delta)\big)$ существует только одна из односторонних разностей, то из свойств разности Хукухары следует, что отображение $\mathrm{diam}\,\big(X(\cdot)\big) \colon (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta) \to R^1_+$ в Δ-окрестности точки t_0 может быть одним из следующих:

1) неубывающим на $(t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$;
2) невозрастающим на $(t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$;
3) неубывающим на $(t_0 - \Delta, t_0)$ и невозрастающим на $(t_0, t_0 + \Delta)$;
4) невозрастающим на $(t_0 - \Delta, t_0)$ и неубывающим на $(t_0, t_0 + \Delta)$.

Следовательно, для каждого из перечисленных случаев возможна только одна из комбинаций разностей: 1) (2) и (4); 2) (3) и (5); 3) (4) и (3); 4) (5) и (2).

Предположение 1. *В случае, когда существуют две односторонние разности, будем рассматривать лишь ту из них, которая соответствует комбинации с меньшим порядковым номером.*

Теперь рассмотрим четыре типа пределов, каждый из которых соответствует одному из типов разностей:

$$\lim_{t\to t_{0+}}(t-t_0)^{-1}\big(X(t)\overset{h}{-}X(t_0)\big), \tag{6}$$

$$\lim_{t\to t_{0+}}(t-t_0)^{-1}\big(X(t_0)\overset{h}{-}X(t)\big), \tag{7}$$

$$\lim_{t\to t_{0-}}(t_0-t)^{-1}\big(X(t_0)\overset{h}{-}X(t)\big), \tag{8}$$

$$\lim_{t\to t_{0-}}(t_0-t)^{-1}\big(X(t)\overset{h}{-}X(t_0)\big). \tag{9}$$

Учитывая сделанное предположение, можно говорить, что в точке t_0 могут существовать не более двух пределов, так как мы предполагали, что существуют только две из четырех используемых в пределах разностей Хукухары.

***Замечание* 4.** Учитывая все изложенное выше, получаем, что могут существовать только следующие комбинации пределов: 1) (6) и (8); 2) (7) и (9); 3) (8) и (7); 4) (9) и (6).

Определение 4 [10]. *Если соответствующие два предела существуют и равны между собой, то будем говорить, что отображение $X(\cdot)$ обобщенно дифференцируемо в точке t_0 и обобщенная производная равна $DX(t_0)$.*

Определение 5 [10]. *Будем говорить, что многозначное отображение $X(\cdot)\colon R^1 \to \to \operatorname{conv}(R^n)$ обобщенно дифференцируемо на интервале (t_1,t_2), если оно обобщенно дифференцируемо в каждой точке этого интервала.*

Лемма 1 [10]. *Если многозначное отображение $X(\cdot)\colon R^1\to\operatorname{conv}(R^n)$ обобщенно дифференцируемо и $\operatorname{diam}\big(X(\cdot)\big)$ — неубывающая функция на R^1, то многозначное отображение $X(\cdot)$ также дифференцируемо по Хукухаре и $D_HX(\cdot)=DX(\cdot)$.*

Лемма 2 [10]. *Если многозначное отображение $X(\cdot)\colon R^1\to\operatorname{conv}(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре, то оно обобщенно дифференцируемо и $DX(\cdot)=D_HX(\cdot)$.*

Определение 6 [10]. *Многозначное отображение $X(\cdot)\colon [t_0,T]\to\operatorname{conv}(R^n)$ называется абсолютно непрерывным на $[t_0,T]$, если существуют измеримое многозначное отображение $G(\cdot)\colon [t_0,T]\to\operatorname{conv}(R^n)$ и система отрезков $[t_i,t_{i+1}]$, $i=\overline{0,m}$, $t_{m+1}=T$ такие, что для всех $t\in[t_i,t_{i+1}]$, $i=\overline{0,m}$,*

$$X(t)=X(t_i)\overset{h}{-}\int_{t_i}^{t}G(s)ds \qquad \text{или} \qquad X(t)=X(t_i)+\int_{t_i}^{t}G(s)ds.$$

Теорема 2 [10]. *Пусть многозначное отображение $X(\cdot)\colon [t_0,T]\to\operatorname{conv}(R^n)$ абсолютно непрерывно на $[t_0,T]$. Тогда $X(\cdot)$ обобщенно дифференцируемо почти всюду на отрезке $[t_0,T]$ и $DX(t)=G(t)$ для почти всех $t\in[t_0,T]$.*

***Замечание* 5.** Более подробно свойства обобщенной производной рассмотрены в [10].

3. Дифференциальные уравнения с обобщенной производной. Рассмотрим дифференциальное уравнение с обобщенной производной, аналогичное дифференциальному уравнению с производной Хукухары

$$DX = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{10}$$

где $t \in [t_0, T]$, $X(\cdot)\colon [t_0, T] \to \operatorname{conv}(R^n)$, $F(\cdot,\cdot)\colon [t_0, T] \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{conv}(R^n)$, $X_0 \in \in \operatorname{conv}(R^n)$.

Определим решение для дифференциального уравнения (10) аналогично тому, как это было сделано для дифференциальных уравнений с производной Хукухары.

Определение 7. *Многозначное отображение* $X(\cdot)\colon [t_0, T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ *называется решением дифференциального уравнения* (10), *если оно абсолютно непрерывно и удовлетворяет* (10) *почти всюду на* $[t_0, T]$.

Но в отличие от дифференциальных уравнений с производной Хукухары в данном случае невозможно обеспечить единственность решения.

***Пример* 1.** Рассмотрим дифференциальное уравнение с обобщенной производной

$$DX = S_1(0), \qquad X(0) = S_2(0). \tag{11}$$

Легко проверить, что все следующие многозначные отображения являются решениями уравнения (11):

$$X_1(t) = S_{2+t}(0), \quad t \in [0, 1], \qquad X_2(t) = S_{2-t}(0), \quad t \in [0, 1],$$

$$X_3(t) = \begin{cases} S_{2+t}(0), & t \in [0; 0,5], \\ S_{3-t}(0), & t \in [0,5; 1], \end{cases} \qquad X_4(t) = \begin{cases} S_{2-t}(0), & t \in [0; 0,25], \\ S_{1,5+t}(0), & t \in [0,25; 0,5], \\ S_{2,5-t}(0), & t \in [0,5; 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что эту последовательность решений можно продолжить. Но только $X_1(\cdot)$ является решением аналогичного уравнения с производной Хукухары:

$$D_H X = S_1(0), \qquad X(0) = S_2(0).$$

Поэтому рассмотрим дифференциальное уравнение несколько другого вида

$$DX \overset{h}{\text{---}} \Phi\big(-\phi(t)\big)F_1(t, X) = \Phi\big(\phi(t)\big)F_2(t, X), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{12}$$

где $t \in [t_0, T]$, $X_0 \in \operatorname{conv}(R^n)$, $X(\cdot)\colon [t_0, T] \to \operatorname{conv}(R^n)$, $F_1, F_2(\cdot,\cdot)\colon [t_0, T] \times \operatorname{conv}(R^n) \to \to \operatorname{conv}(R^n)$ — многозначные отображения, $\phi(\cdot)\colon [t_0, T] \to R^1$ — непрерывная функция, $\Phi(\phi) = = \begin{cases} 1, & \phi > 0, \\ 0, & \phi \le 0. \end{cases}$

Определение 8. *Многозначное отображение* $X(\cdot)\colon [t_0, T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ *называется решением дифференциального уравнения* (12), *если оно непрерывно и на любом отрезке* $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset \subset [t_0, T]$, *где функция* $\phi(\cdot)$ *на интервале* (t_i, t_{i+1}) *имеет постоянный знак, удовлетворяет интегральному уравнению*

$$X(t)+\int_{\tau_i}^{t}\Phi\big(-\phi(s)\big)F_1\big(s,X(s)\big)ds=X(\tau_i)+\int_{\tau_i}^{t}\Phi\big(\phi(s)\big)F_2\big(s,X(s)\big)ds. \tag{13}$$

Если на интервале (τ_i,τ_{i+1}) функция $\phi(t)>0$, то $X(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$X(t)=X(\tau_i)+\int_{\tau_i}^{t}F_2(s,X(s))ds$$

для $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$ и $\operatorname{diam}\big(X(t)\big)$ является возрастающей функцией.

Если на интервале (τ_i,τ_{i+1}) функция $\phi(t)<0$, то $X(\cdot)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$X(\tau_i)=X(t)+\int_{\tau_i}^{t}F_1(s,X(s))ds,$$

т. е.

$$X(t)=X(\tau_i)\overset{h}{-}\int_{\tau_i}^{t}F_1(s,X(s))ds$$

для $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$ и $\operatorname{diam}\big(X(t)\big)$ является убывающей функцией.

Если на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ функция $\phi(t)=0$, то $X(t)=X(\tau_i)$ для $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$ и $\operatorname{diam}\big(X(t)\big)$ является постоянной функцией.

Так же введем другое эквивалентное определение решения уравнения (11).

Определение 9. *Многозначное отображение $X(\cdot)\colon[t_0,T]\to\operatorname{conv}(R^n)$ называется решением дифференциального уравнения* (12), *если оно абсолютно непрерывно, удовлетворяет* (12) *почти всюду на $[t_0,T]$ и*

$$\operatorname{diam}X(t)=\begin{cases}\textit{возрастает, если}\quad \phi(t)>0,\\ \textit{постоянный, если}\quad \phi(t)=0,\\ \textit{убывает, если}\quad \phi(t)<0.\end{cases}$$

***Замечание* 6.** В уравнении (12) многозначные отображения $F_1(t,X)$ и $F_2(t,X)$ определяют скорость изменения („сжатия” и „расширения”) многозначного отображения $X(t)$ и как оно видоизменяется в пространстве $\operatorname{conv}(R^n)$, а функция $\phi(t)$ определяет, когда диаметр $X(t)$ возрастает, убывает или является постоянным.

***Замечание* 7.** В уравнении (12) рассматриваются два различных многозначных отображения $F_1(t,X)$ и $F_2(t,X)$ потому, что законы „сжатия” и „расширения” могут быть различными.

***Пример* 2.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$DX\overset{h}{-}\Phi\big(-\phi(t)\big)S_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\Phi\big(\phi(t)\big)S_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\qquad X(0)=S_1\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\phi(t)=\begin{cases}t-1/4, & t\in[0,1/4)\,,\\ 0, & t\in[1/4,2]\,,\\ t-2, & t\in(2,3].\end{cases}$

Поскольку $\phi(t) < 0$ при $t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right)$, то $X(t) = S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{h}{-} \int_0^t S_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S_{1-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \end{pmatrix}$, а так как $\phi(t) = 0$ при $t \in \left[\dfrac{1}{4}, 2\right]$, то $X(t) = S_{1/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{11}{4} \end{pmatrix}$. Так как $\phi(t) > 0$ при $t \in [2,3]$, то $X(t) = S_{1/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{11}{4} \end{pmatrix} + \int_2^t S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = S_{t-7/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2t - \dfrac{5}{4} \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$X(t) = \begin{cases} S_{1-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \end{pmatrix}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right), \\ S_{1/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{11}{4} \end{pmatrix}, & t \in \left[\dfrac{1}{4}, 2\right], \\ S_{t-7/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2t - \dfrac{5}{4} \end{pmatrix}, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

4. Теорема существования и единственности решения. В данном пункте мы сформулируем условия существования и единственности решения для двух случаев $n = 1$ и $n \geq 2$.

4.1. Случай $n = 1$. В данном случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть $A, B \in \operatorname{conv}(R^1)$. Для того чтобы $A \stackrel{h}{-} B$ существовало, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{diam}(A) \geq \operatorname{diam}(B)$, причем $\operatorname{diam}(A \stackrel{h}{-} B) = \operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)$.*

Теорема 3. *Пусть интервальнозначные отображения $F_1(t,X)$ и $F_2(t,X)$ в области $Q = \big\{(t,X) \in R^1 \times \operatorname{conv}(R^1) \colon t \in [t_0, t_0 + a], h(X, X_0) \leq b\big\}$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *для любого фиксированного X интервальнозначные отображения $F_1(t,X)$, $F_2(t,X)$ измеримы по t;*

2) *для любого фиксированного t интервальнозначные отображения $F_1(t,X)$, $F_2(t,X)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянными L_1 и L_2 по X;*

3) *существуют суммируемые на $[t_0, t_0 + a]$ функции $m_1(t)$, $m_2(t)$ такие, что*

$$h\big(F_1(t,X), \{0\}\big) \leq m_1(t), \qquad h\big(F_2(t,X), \{0\}\big) \leq m_2(t);$$

4) *функция $\phi(t)$ непрерывна и имеет конечное число сегментов, где $\phi(t) = 0$;*

5) $\theta = \operatorname{diam}(X_0) > 0$.

Тогда на сегменте $[t_0, t_0 + d]$ существует единственное решение системы (12), *где d удовлетворяет условиям:*

a) $d \leq a$;

b) $\xi_i(t_0 + d) \leq b$, *где* $\xi_i(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t m_i(s)\,ds$, $i = 1, 2$;

c) $\displaystyle\int_{\mu[t_0, t_0+d]} m_1(s)\,ds \leq \frac{\theta}{2}$, *где* $\mu[t_0, t_0 + d] \subset [t_0, t_0 + d] \colon \phi(t) < 0$ *для* $t \in \mu[t_0, t_0 + d]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\phi(t)$ на сегменте $[t_0, t_0 + a]$. Из условия 4 теоремы следует, что существует конечное число точек $t_1, \ldots, t_m \in [t_0, t_0 + d]$ таких, что $t_0 < t_1 < \ldots \ldots < t_m < t_0 + d$ и на каждом частичном интервале (t_i, t_{i+1}), $i = \overline{0, m}$, $t_{m+1} = t_0 + d$, функция $\phi(t)$ либо имеет постоянный знак, либо равна нулю. Предположим, что решение системы (12) существует на отрезке $[t_0, t_k]$, $k \le m$. Рассмотрим уравнение (12) на сегменте $[t_k, t_{k+1}]$. Возможны три случая:

1) $\phi(t) > 0$ для $t \in (t_k, t_{k+1})$. Пусть $X(t) = \big[x_1(t), x_2(t)\big]$ и $F_2(t, X) = \big[f_{21}(t, x_1, x_2), f_{22}(t, x_1, x_2)\big]$. В силу определения 8 интервальнозначное отображение $X(t) = \big[x_1(t), x_2(t)\big]$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\big[x_1(t), x_2(t)\big] = \big[x_1(t_k), x_2(t_k)\big] + \int_{t_k}^{t} \Big[f_{21}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big), f_{22}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big)\Big] ds, \tag{15}$$

т. е.

$$x_1(t) = x_1(t_k) + \int_{t_k}^{t} f_{21}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big) ds,$$

$$x_2(t) = x_2(t_k) + \int_{t_k}^{t} f_{22}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big) ds.$$

Следовательно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_{21}\big(t, x_1(t), x_2(t)\big), \qquad x_1(t_k) = x_1(t_k - 0), \\ \dot{x}_2(t) &= f_{22}\big(t, x_1(t), x_2(t)\big), \qquad x_2(t_k) = x_2(t_k - 0). \end{aligned} \tag{16}$$

В силу [36] система (16) имеет единственное решение $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$. Из (15) следует, что $\operatorname{diam}\big(X(t)\big)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ не убывает. Следовательно, существует единственное решение системы (12) на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

2) $\phi(t) < 0$ для $t \in (t_k, t_{k+1})$. Пусть $X(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ и $F_1(t, X) = \big[f_{11}(t, x_1, x_2), f_{12}(t, x_1, x_2)\big]$. В силу определения 8 интервальнозначное отображение $X(t) = \big[x_1(t), x_2(t)\big]$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$[x_1(t_k), x_2(t_k)] = \Big[x_1(t), x_2(t)\Big] + \int_{t_k}^{t} \Big[f_{11}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big), f_{12}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big)\Big] ds,$$

т. е.

$$x_1(t_k) = x_1(t) + \int_{t_k}^{t} f_{11}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big) ds,$$

$$x_2(t_k) = x_2(t) + \int_{t_k}^{t} f_{12}\big(s, x_1(s), x_2(s)\big) ds.$$

Следовательно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -f_{11}\big(t, x_1(t), x_2(t)\big), \qquad x_1(t_k) = x_1(t_k - 0), \\ \dot{x}_2(t) &= -f_{12}\big(t, x_1(t), x_2(t)\big), \qquad x_2(t_k) = x_2(t_k - 0). \end{aligned} \tag{17}$$

В силу [36] система (17) имеет единственное решение $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на $[t_k, t_{k+1}]$. Поскольку $\operatorname{diam}\big(X(t)\big) > \operatorname{diam}\big(X(t_k)\big) - 2\int_{[t_k,t]} m_1(s)ds \geq \operatorname{diam}(X_0) - 2\int_{\mu[t_0,t]} m_1(s)ds \geq 0$, то $\operatorname{diam}\big(X(t)\big) = x_2(t) - x_1(t) \geq 0$ для всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Следовательно, решение системы (12) существует на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

3) $\phi(t) \equiv 0$ для $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Тогда $X(t) \equiv X(t_k)$ для $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Следовательно, решение системы (12) существует на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

Теорема доказана.

4.2. Случай $n \geq 2$. Пусть $A, B \in \operatorname{conv}(R^n)$. Как известно, в данном случае разность Хукухары $A \overset{h}{-} B$ не всегда существует даже при локальном вложении множества B в множество A, т. е. если существует $c \in R^n$ такое, что $B + c \subset A$ [37].

Обозначим через $CC(R^n)$, $n \geq 2$, объединение пространства непустых сильно выпуклых компактных подмножеств из R^n [37] с элементами пространства R^n.

Утверждение 2 [37]. *Пусть $A, B \in CC(R^n)$. Для того чтобы $A \overset{h}{-} B$ существовало, необходимо и достаточно, чтобы множество B было локально вложимо в множество A.*

Теорема 4. *Пусть многозначные отображения F_1, $F_2(\cdot,\cdot)\colon R^1 \times CC(R^n) \to CC(R^n)$ в области $Q = \big\{(t, X) \in R^1 \times CC(R^n)\colon t \in [t_0, t_0 + a], h(X, X_0) \leq b\big\}$ удовлетворяют условиям:*

1) *для любого фиксированного X многозначные отображения $F_1(t, X)$, $F_2(t, X)$ измеримы по t;*

2) *для любого фиксированного t многозначные отображения $F_1(t, X)$, $F_2(t, X)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянными L_1 и L_2 по X;*

3) *существуют суммируемые на $[t_0, t_0 + a]$ функции $m_1(t)$, $m_2(t)$ такие, что*

$$h\big(F_1(t, X), \{0\}\big) \leq m_1(t), \qquad h\big(F_2(t, X), \{0\}\big) \leq m_2(t);$$

4) *функция $\phi(t)$ непрерывна и имеет конечное число сегментов, где $\phi(t) = 0$;*

5) $\operatorname{int} X_0 \neq \varnothing$.

Тогда на сегменте $[t_0, t_0 + d\,]$ существует единственное решение системы (12), *где d удовлетворяет условиям:*

a) $d \leq a$;

b) $\xi_i(t_0 + d) \leq b$, *где* $\xi_i(t) = \int_{t_0}^{t} m_i(s)ds$, $i = 1, 2$;

c) $\int_{\mu[t_0,t_0+d]} m_1(s)ds \leq \dfrac{\theta}{2}$, *где* $\theta = \min_{\|\psi\|=1} \big|C(X_0, \psi) + C(X_0, -\psi)\big|$, $C(X, \psi) = \max_{x \in X}(x_1\psi_1 + \ldots + x_n\psi_n)$, $\mu[t_0, t_0 + d\,] \subset [t_0, t_0 + d\,]\colon \phi(t) < 0$ *для* $t \in \mu[t_0, t_0 + d\,]$.

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $\phi(t) > 0$ для $t \in [t_0, t_0 + a]$, то из леммы 1 получаем, что дифференциальное уравнение (12) является дифференциальным уравнением с производной Хукухары

$$D_H X = F_2(t, X), \quad X(t_0) = X_0. \tag{18}$$

В силу [15, 20] на отрезке $[t_0, t_0 + d]$ существует единственное решение системы (18), где $d = \min\{a, d_2\}$, $\int_{t_0}^{t_0+d_2} m_2(s)ds \le b$.

2. Если $\phi(t) = 0$ для $t \in [t_0, t_0 + a]$, то из леммы 1 получаем, что дифференциальное уравнение (12) является дифференциальным уравнением с производной Хукухары $D_H X = \{0\}$, $X(t_0) = X_0$. Очевидно на отрезке $[t_0, t_0 + a]$ единственным решением этого уравнения является $X(t) \equiv X_0$.

3. Если $\phi(t) < 0$ для $t \in [t_0, t_0 + a]$, то дифференциальное уравнение (12) является дифференциальным уравнением с обобщенной производной

$$DX \overset{h}{-} F_1(t, X) = \{0\}, \quad X(t_0) = X_0. \tag{19}$$

В силу определения 8 рассмотрим эквивалентное интегральное уравнение

$$X(t) = X_0 \overset{h}{-} \int_{t_0}^{t} F_1\big(s, X(s)\big) ds \tag{20}$$

на отрезке $[t_0, t_0 + a]$ и докажем, что оно имеет решение на сегменте $[t_0, t_0 + d]$.

а) Из условия 3 теоремы имеем $F_1(t, X) \subset S_{m_1(t)}(0)$ для всех $(t, X) \in Q$. Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t} F_1(s, X) ds \subset S_{\int_{t_0}^{t} m_1(s)ds}(0).$$

Обозначим $S(t) = S_{\int_{t_0}^{t} m_1(s)ds}(0)$. Очевидно, что если $t_0 \le t_1 \le t_2 \le t_0 + a$, то $S(t_0) \subset S(t_1) \subset S(t_2) \subset S(t_0 + a)$, т. е. многозначное отображение $S(t)$ монотонно расширяется с течением времени, причем $S(t_0) = \{0\}$. Поскольку $X_0 \in CC(R^n)$ и $\mathrm{int} X_0 \ne \varnothing$, существует $d_1 > 0$ такое, что множества $S(t)$ вложимы в X_0 для всех $t \in [t_0, t_0 + d_1]$ и не вложимы для $t > t_0 + d_1$. Следовательно, d_1 определяется из условия $\int_{t_0}^{t_0+d_1} m_1(s)ds \le \dfrac{\theta}{2}$.

Отсюда для всех $(t, X) \in Q_1 = \big\{(t, X) \in R^1 \times CC(R^n) \colon t \in [t_0, t_0 + d_1], h(X, X_0) \le b\big\}$ множество $\int_{t_0}^{t} F_1(s, X)ds$ вложимо в множество X_0.

б) Поскольку $F_1(t, X) \in CC(R^n)$ для всех $(t, X) \in Q$, из [37] следует, что $\int_{t_0}^{t} F_1(s, X)ds \in CC(R^n)$ для всех $(t, X) \in Q$. Тогда из пункта а) и [37] следует, что разность Хукухары $X_0 \overset{h}{-} \int_{t_0}^{t} F_1(s, X)ds$ существует для всех $(t, X) \in Q_1$.

в) Обозначим $d = \min\{a, d_1, d_3\}$, где $d_3 > 0$ такое, что $\int_{t_0}^{t_0+d_3} m_1(s)ds \le b$.

г) Построим последовательность многозначных отображений

$$X^0(t) \equiv X_0, \qquad X^k(t) = X_0 \overset{h}{-} \int\limits_{t_0}^{t} F_1\big(s, X^{k-1}(s)\big) ds \quad \text{для всех} \quad t \in [t_0, t_0 + d\,]. \tag{21}$$

Из пункта б) следует, что $X^k(t)$ существует и $X^k(t) \in CC(R^n)$ для всех $t \in [t_0, t_0 + d\,]$ и любого $k \in N$.

Из условий 1 и 2 теоремы имеем, что $X^k(t)$ непрерывно для всех $t \in [t_0, t_0 + d]$ и любого $k \in N$.

Очевидно, что

$$h\big(X^k(t), X_0\big) = h\left(X_0 \overset{h}{-} \int\limits_{t_0}^{t} F_1\big(s, X^{k-1}(s)\big) ds, X_0\right) \leq h\left(\int\limits_{t_0}^{t} F_1\big(s, X^{k-1}(s)\big) ds, \{0\}\right) \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} h\Big(F_1\big(s, X^{k-1}(s)\big), \{0\}\Big) ds \leq \int\limits_{t_0}^{t} m_1(s) ds \leq \xi(t_0 + d) \leq b.$$

Следовательно, последовательность многозначных отображений $\big\{X^k(t)\big\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно ограничена, т. е. $h\big(X^k(t), \{0\}\big) \leq h\big(X_0, \{0\}\big) + b$ для всех $k \in N$ и $t \in [t_0, t_0 + d\,]$.

Теперь выберем произвольные $m, p \in N$. Оценим

$$h\big(X^{p+m}(t), X^p(t)\big) \leq h\left(\int\limits_{t_0}^{t} F_1\big(s, X^{p+m-1}(s)\big) ds, \int\limits_{t_0}^{t} F_1\big(s, X^{p-1}(s)\big) ds\right) \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} h\Big(F_1\big(s, X^{p+m-1}(s)\big), F_1\big(s, X^{p-1}(s)\big)\Big) ds \leq L_1 \int\limits_{t_0}^{t} h\big(X^{p+m-1}(s), X^{p-1}(s)\big) ds.$$

Отсюда

$$h\big(X^{p+m}(t), X^p(t)\big) \leq L_1^n \int\limits_{t_0}^{t} \ldots \int\limits_{t_0}^{t_{p-1}} h\big(X^m(t_p), X_0\big) dt_p \ldots dt_1 \leq \frac{bL_1^p (t - t_0)^p}{(p)!} \leq \frac{bL_1^p d^p}{(p)!}.$$

Следовательно, данная последовательность многозначных отображений $\big\{X^k(t)\big\}_{k=0}^{\infty}$ является фундаментальной и, значит, сходится. Непрерывное многозначное отображение, являющееся пределом этой последовательности, обозначим через $X(t)$. Очевидно, $X(t)$ является решением (20) и тем самым уравнения (19) на сегменте $[t_0, t_0 + d\,]$.

Докажем теперь, что решение уравнения (19) единственно. Предположим противное. Пусть уравнение (19) имеет, по крайней мере, два решения $X(t)$ и $Y(t)$ таких, что

$$\overline{\omega} = \max_{t \in [t_0, t_0 + d]} h\big(X(t), Y(t)\big) > 0,$$

где $[t_0, t_0 + d\,]$ — общий промежуток существования решений $X(t)$ и $Y(t)$.

В силу эквивалентности уравнений (19) и (20) имеем

$$X(t) \equiv X_0 \overset{h}{—} \int_{t_0}^{t} F_1\big(s, X(s)\big)ds, \qquad Y(t) \equiv X_0 \overset{h}{—} \int_{t_0}^{t} F_1\big(s, Y(s)\big)ds,$$

откуда, используя условие Липшица и свойства расстояния по Хаусдорфу, получаем

$$h\big(X(t), Y(t)\big) = h\left(X_0 \overset{h}{—} \int_{t_0}^{t} F_1\big(s, X(s)\big)ds,\ X_0 \overset{h}{—} \int_{t_0}^{t} F_1\big(s, Y(s)\big)ds \right) =$$

$$= h\left(\int_{t_0}^{t} F_1\big(s, X(s)\big)ds, \int_{t_0}^{t} F_1\big(s, Y(s)\big)ds \right) \leq \int_{t_0}^{t} h\Big(F_1\big(s, X(s)\big), F_1\big(s, Y(s)\big)\Big)ds \leq$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} h\big(X(s), Y(s)\big)ds.$$

Таким образом, получаем последовательность оценок

$$h\big(X(t), Y(t)\big) \leq L \int_{t_0}^{t} \overline{\omega} ds = L\overline{\omega}(t - t_0) \leq L\overline{\omega}d,$$

$$h(X(t), Y(t)) \leq L \int_{t_0}^{t} L\overline{\omega}(s - t_0)ds = L^2\overline{\omega}\frac{(t-t_0)^2}{2} \leq L^2\overline{\omega}\frac{d^2}{2} \ldots .$$

Используя метод полной математической индукции, убеждаемся, что для любого натурального m на отрезке $[t_0, t_0 + d\,]$ имеет место неравенство $h\big(X(t), Y(t)\big) \leq L^m\overline{\omega}\dfrac{d^m}{m!}$.

Тогда $\overline{\omega} = \max_{t\in[t_0,t_0+d]} h\big(X(t), Y(t)\big) \leq L^m\overline{\omega}\dfrac{d^m}{m!}$, откуда в силу положительности $\overline{\omega}$ следует, что для любого натурального m

$$1 \leq \frac{(Ld)^m}{m!}. \tag{22}$$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{(Ld)^m}{m!}$ сходится, и поэтому в силу необходимого условия $\lim_{m\to\infty} \dfrac{(Ld)^m}{m!} = 0$. Это означает, что для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ существует $m \in N$ такое, что $\dfrac{(Ld)^m}{m!} < \dfrac{1}{2}$. Тогда в силу (22) получаем, что $1 < \dfrac{1}{2}$. Полученное противоречие возникло в результате неверного предположения, следовательно, уравнение (19) имеет единственное решение.

4. В случае, когда функция $\phi(t)$ меняет знак на отрезке $[t_0, t_0 + a]$, существование решения доказывается комбинацией случаев $1-3$.

Теорема доказана.

***Замечание* 8.** В предположениях теоремы 4 пространство сильно выпуклых компактных множеств можно заменить на пространство M-сильно выпуклых компактных множеств [37].

***Замечание* 9.** Утверждения теоремы 4 останутся справедливыми, если предположить, что $F_2\colon (\cdot,\cdot)\colon R^1 \times CC(R^n) \to \mathrm{conv}(R^n)$.

1. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funk. ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.
2. *Bridgland T. F.* Trajectory integrals of set valued functions // Pacif. J. Math. – 1970. – **33**, № 1. – P. 43 – 68.
3. *Тюрин Ю. Н.* Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования // Эконом. и мат. методы. – 1965. – **1**, № 3. – С. 391 – 409.
4. *Banks H. T., Jacobs M. Q.* A differential calculus for multifunctions // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – № 29. – P. 246 – 272.
5. *Radstrom H.* An embedding theorem for spaces of convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – № 3. – P. 165 – 169.
6. *Плотников А. В.* Дифференцирование многозначных отображений. T-производная // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 8. – С. 1119 – 1126.
7. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
8. *Витюк А. Н.* Дробное дифференцирование многозначных отображений // Доп. НАН України. – 2003. – № 10. – С. 75 – 78.
9. *Bede B., Stefanini L.* Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations // Working Paper Ser. in Economics. Math. and Statist. Univ. Urbino "Carlo Bo". – 2008.
10. *Plotnikov A. V., Skripnik N. V.* Set-valued differential equations with generalized derivative // J. Adv. Res. Pure Math. – 2011. – **3**, № 1. – P. 144 – 160.
11. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. – 1969. – **2**, № 4 – 5. – P. 491 – 501.
12. *Chalco-Cano Y., Romin-Flores H., Jiminez-Gamero M. D.* Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions // Inf. Sci. – 2011. – **181**, № 1. – P. 2177 – 2188.
13. *Lasota A., Strauss A.* Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized // J. Different. Equat. – 1971. – **3**, № 10. – P. 152 – 172.
14. *Martelli M., Vignoli A.* On differentiability of multi-valued maps // Boll. Unione mat. ital. – 1974. – **4**, № 10. – P. 701 – 712.
15. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 2009.
16. *Bede B., Gal S. G.* Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – № 151. – P. 581 – 599.
17. *Stefanini L., Bede B.* Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations // Nonlinear Anal., Theory, Methods, Appl., Ser. A. – 2009. – **71**, № 3 – 4. – P. 1311 – 1328.
18. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.
19. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Boll. Unione mat. ital. – 1971. – **4**, № 4. – P. 941 – 949.
20. *Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. Unione mat. ital. – 1970. – № 4. – P. 534 – 538.
21. *Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. – Cambridge Sci. Publ., 2006.
22. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor & Francis, 2003.
23. *Комлева Т. А., Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с многозначными решениями // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 10. – С. 1326 – 1337.
24. *Плотников А. В., Тумбрукаки А. В.* Интегро-дифференциальные уравнения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 359 – 367.

25. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* Averaging of set integrodifferential equations // Appl. Math. – 2011. – **1**, № 2. – P. 99 – 105.
26. *Piszczek M.* On a multivalued second order differential problem with Hukuhara derivative // Opusc. math. – 2008. – **28**, № 2. – P. 151 – 161.
27. *Арсирий А. В., Плотников А. В.* Системы управления многозначными траекториями с многозначным критерием качества // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 8. – С. 1142 – 1147.
28. *Plotnikov A. V., Arsirii A. V.* Piecewise constant control set systems // Amer. J. Comput. and Appl. Math. – 2011. – **1**, № 2. – P. 89 – 92.
29. *Плотников В. А., Кичмаренко О. Д.* Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 376 – 385.
30. *de Blasi F. S., Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T.* An existence theorem for set differential inclusions in a semilinear metric space // Control Cybernet. – 2007. – **36**, № 3. – P. 571 – 582.
31. *Плотникова Н. В.* Системы линейных дифференциальных уравнений с π-производной и линейные дифференциальные включения // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 11. – С. 127 – 140.
32. *Plotnikov A., Skripnik N.* Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations // Int. J. Control Sci. Eng. – 2012. – **2**, № 1. – P. 1 – 6.
33. *Skripnik N.* Interval-valued differential equations with generalized derivative // Appl. Math. – 2012. – **2**, № 4. – P. 116 – 120.
34. *Плотникова Н. В.* Аппроксимация пучка решений линейных дифференциальных включений // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 386 – 400.
35. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
36. *Filippov A. F.* Differential equations with discontinuous righthand sides. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1988.
37. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.

Получено 24.04.12,
после доработки — 18.09.12