УДК 517.95

О. Ю. Чмир (Львів. держ. ун-т безпеки життєдіяльності)

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕЛІНІЙНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ І СИЛЬНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

By using the Schauder principle and the principle of contracting mappings, we study the character of point power singularities of the solution of the first generalized boundary-value problem for the heat-conduction equation with nonlinear boundary conditions. We establish sufficient conditions for the solvability of the analyzed problem.

С помощью принципа Шаудера и принципа сжатых отображений исследован характер точечных степенных особенностей решения первой обобщенной краевой задачи для уравнения теплопроводности с нелинейными краевыми условиями. Установлены достаточные условия разрешимости этой задачи.

Вступ. Існує багато праць, в яких наведено результати про існування та поведінку розв'язків лінійних та напівлінійних еліптичних та параболічних рівнянь на межі області та в окремих її точках з узагальненими функціями на межі області (див., наприклад, [1] та наведену там бібліографію, а також [2, 3]).

У статті [4] досліджувались нелінійні еліптичні крайові задачі при заданих на межі функціях із сильними степеневими особливостями. Використовуючи дані цих досліджень, продовжено вивчення нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях. Так, у статті [5] встановлено достатні умови розв'язності нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності у просторі функцій з точковими особливостями, а у [6] досліджено характер точкових степеневих особливостей розв'язку такої задачі.

Постає питання: чи можна розглядати такі задачі з нелінійними крайовими умовами? У статтях [7 – 11] досліджувались крайові задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами. Так, в [11] одержано коректну розв'язність крайової задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами та початковими даними – мірами.

У працях [12, 13] розглянуто задачу Коші для нелінійного параболічного рівняння, де встановлено глобальне існування та вибух в обмежений час розв'язків такої задачі. Знайдено критичний показник нелінійності, який відокремлює області існування та неіснування глобального додатного розв'язку задачі Коші. Подібні дослідження проводились багатьма науковцями для різних типів рівнянь (лінійних та квазілінійних) з лінійними та нелінійними крайовими умовами (див., наприклад, [9, 10, 14]). Показано, що в деяких випадках вибух може відбуватися в окремих точках або тільки на межі області. Відомо, що критичний показник залежить від класу функцій, у яких шукають розв'язок.

У даній статті досліджується перша крайова задача для рівняння теплопровідності в обмеженій циліндричній області при наявності нелінійних точкових джерел. Доведено існування її розв'язку у певному класі функцій із сильними степеневими особливостями, залежному від показників нелінійності у рівнянні та крайовій умові, зокрема, охоплено випадок „критичного показника" Х. Фуджіти. Для доведення розв'язності використано метод зведення такої задачі до інтегрального рівняння у певному ваговому функційному просторі, а також застосовано теорему Шаудера про нерухому точку та принцип стискаючих відображень.

1. Основні позначення та формулювання задачі. Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення: $\|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ — евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$, $P = (x,t)$, $M = (y,\tau)$, $\widehat{P} = (\hat{x},\hat{t})$, $d(P,M) = |PM| = d(x,t;y,\tau) = \sqrt{\|x-y\|^2 + |t-\tau|}$— параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$; η — мультиіндекс з компонентами $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\eta| = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ — довжина мультиіндексу η, $D^\eta \equiv D_x^\eta = \dfrac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1}\ldots\partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$ — таке задане число, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞; далі вважатимемо, що $\varepsilon_0 \le 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma \to 0$. При довільній фіксованій точці $\widehat{P} \in \overline{Q}$ введемо функцію ϱ_0 точки $P \in \overline{Q}$ таку, що $0 < \varrho_0(P,\widehat{P}) \le 1$ та

$$\varrho_0(P,\widehat{P}) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}\big(|P\widehat{P}|\big), & |P\widehat{P}| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & |P\widehat{P}| \ge \varepsilon_0. \end{cases}$$

Нехай

$$D(\overline{Q}) = C^\infty(\overline{Q}), \qquad D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma}), \qquad D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$D^0(\overline{Q}) = \left\{\varphi \in D(\overline{Q})\colon \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \,|_{\,t=T} = 0,\ k = 0,1,\ldots\right\},$$

$$D^0(\overline{\Sigma}) = \left\{\varphi \in D(\overline{\Sigma})\colon \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \,|_{\,t=T} = 0,\ k = 0,1,\ldots\right\},$$

$$D_0(\overline{\Omega}) = \left\{\varphi \in D(\overline{\Omega})\colon \varphi|_S = 0\right\},$$

ν — орт внутрішньої нормалі до S.

Далі позначатимемо через $\big(D^0(\overline{\Sigma})\big)'$, $\big(D_0(\overline{\Omega})\big)'$ простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi,F)_1$ значення узагальненої функції $F \in \big(D^0(\overline{\Sigma})\big)'$ на основній функції $\varphi \in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi,F)_2$ значення $F \in \big(D_0(\overline{\Omega})\big)'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$.

Припущення 1. *Нехай* $(\hat{x},\hat{t}\,) \in \Sigma$ *та*

1) *функція* $f_0(x,t,v)$ *визначена в* $Q \times (-\infty,+\infty)$, $f_1(x,t,v)$ — *в* $\Sigma \times (-\infty,+\infty)$,

2) $F_1(x,t) = \sum_{|l|\le p_1}\sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x-\hat{x})\delta^{(m)}(t-\hat{t}\,)$,

3) $F_2(x) = \sum_{|r|\le p_3} C_r D_x^r \delta(x-\hat{x})$,

де C_{lm}, C_r — *сталі*, p_1, p_2, p_3 — *невід'ємні цілі числа.*

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = f_0\big(x,t,u(x,t)\big), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u\,|_{\,\Sigma} = F_1(x,t) + f_1\big(x,t,u(x,t)\big), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

$$u\,|_{\,t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

При $k \in \mathbb{R}$ введемо функційні простори:

$$\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P}) =$$

$$= \left\{ v\colon \|v;\ \widehat{P}\|_k = \max\left\{ \int\limits_Q \varrho_0^k\big(x,t,\hat{x},\hat{t}\,\big)\big|v(x,t)\big|\,dxdt;\ \int\limits_\Sigma \varrho_0^k\big(x,t,\hat{x},\hat{t}\,\big)\big|v(x,t)\big|\,dSdt \right\} < +\infty \right\},$$

$$X_k(\overline{Q},\widehat{P}) = \Big\{\psi \in D^0(\overline{Q})\colon \psi(\cdot,0) \in D_0(\overline{\Omega}),\ \psi\mid_{\overline{\Sigma}} = 0,$$

$$L^*\psi(x,t) = O\big(\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big),\ \varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \to 0\Big\},$$

де L^* — оператор, формально спряжений до L, $L^*v = -\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + \triangle^* v\right)$.

Нехай $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \big\{v \in \mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})\colon \|v;\ \widehat{P}\|_k \le C\big\}$ — куля радіуса C у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)–(3) *називається функція* $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *така, що*

$$\int\limits_Q L^*\psi u\,dxdt = \int\limits_Q \psi(x,t) f_0\big(x,t,u(x,t)\big)\,dxdt + \left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}, F_1(x,t)\right)_1 +$$

$$+ \int\limits_\Sigma \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu} f_1\big(x,t,u(x,t)\big)\,dSdt + \big(\psi(\cdot,0), F_2(\cdot)\big)_2$$

для довільної $\psi \in X_k(\overline{Q},\widehat{P})$.

Позначимо через $G(x,t;y,\tau)$ функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, яка визначена у точках $(x,t;y,\tau) \in \overline{Q}\times\overline{Q}$ при $(x,t) \ne (y,\tau)$. Існування її та ряд властивостей одержуємо із [15, 16]. З цих результатів випливає, що

1) $G(x,t;y,\tau) = 0$ при $t < \tau$;

2) для будь-яких мультиіндексів η, η_0

$$\left|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}} D_x^\eta G(x,t;y,\tau)\right| \le \widehat{C}_{\eta,\eta_0}\Big[d(x,t;y,\tau)\Big]^{-n-|\eta|-2\eta_0},$$

де $\widehat{C}_{\eta,\eta_0}$ — додатні сталі.

Подібно до результатів [2, 17, 18] доводимо таку властивість функції G.

Лема 1. *Нехай* $(\hat{x},\hat{t}\,) \in \overline{Q}$, $|\eta| \le 1$. *Тоді*

$$\int\limits_Q \varrho_0^r(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\left|D_y^\eta G(x,t;y,\tau)\right|\,dxdt \le L_{1,\eta}\max\left\{\Big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\Big]^{r+2-|\eta|}, 1\right\} \quad \forall (y,\tau) \in \overline{Q}$$

при $r > -n-2$;

$$\int\limits_\Sigma \varrho_0^{r_1}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)|t-\hat{t}\,|^{r_2}\left|D_y^\eta G(x,t;y,\tau)\right|\,dS_x dt \le$$

$$\le L_{2,\eta}\max\left\{\Big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\Big]^{r_1+2r_2+1-|\eta|}, 1\right\} \quad \forall (y,\tau) \in \overline{Q}$$

при $r_1 > -n-1$, $r_2 > -1$.

***Зауваження* 1.** Аналогічно доведенню теореми 2 [3] встановимо, що розв'язок задачі (1)–(3) є розв'язком у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ інтегрального рівняння

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau) f_0\big(y,\tau,u(y,\tau)\big)\, dy + \left(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y,\tau)\right)_1 +$$

$$+ \int\limits_\Sigma \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y} f_1\big(y,\tau,u(y,\tau)\big)\, dS_y d\tau + \big(G(x,t;y,0), F_2(y)\big)_2 \tag{4}$$

і навпаки.

Позначимо

$$(Hv)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau) f_0\big(y,\tau,v(y,\tau)\big)\, dy + \int\limits_\Sigma \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y} f_1\big(y,\tau,v(y,\tau)\big)\, dS_y d\tau,$$

$$h(x,t) = g_1(x,t) + g_2(x,t) = \left(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y,\tau)\right)_1 + \Big(G(x,t;y,0), F_2(y)\Big)_2,$$

$$(H_1 v)(x,t) = (Hv)(x,t) + h(x,t).$$

Рівняння (4) набере вигляду $u(x,t) = (Hu)(x,t) + h(x,t)$.

З огляду на теорему Шаудера [19, с. 291] у [5] показано існування сталої $C > 0$ такої, що оператор H_1 відображає $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе, є неперервним оператором на $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, та доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай* $k > k_0 = \max\{p_1 + 2p_2, p_3 - 1\}$ *та виконуються припущення* 1, *функції* f_0, f_1 *задовольняють умови*:

1) *існує стала* $M_0 > 0$ *така, що для довільної сталої* $C > M_0$ *та для довільної* $v \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\ \widehat{P})$

$$\int\limits_Q \big| f_0\big(y,\tau,v(y,\tau)\big)\big|\, dy d\tau \le \varphi_1(C), \tag{5}$$

$$\int\limits_\Sigma \big| f_1\big(y,\tau,v(y,\tau)\big)\big|\, dS d\tau \le \varphi_2(C), \tag{6}$$

де $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $z \in [0,+\infty)$, — *неперервні, монотонно неспадні, додатні на* $(0,+\infty)$ *функції*, $\dfrac{\varphi_i(z)}{z} \to 0$ *при* $z \to +\infty$, $i = 1,2$;

2) *існують неперервні, монотонно неспадні, додатні на* $(0,+\infty)$ *функції* $\psi_C^1(z)$, $\psi_C^2(z)$, $z \in [0,+\infty)$, *такі, що* $\psi_C^1(0) = 0$, $\psi_C^2(0) = 0$ *та для довільних* $v, w \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\ \widehat{P})$

$$\int\limits_Q \Big| f_0\big(y,\tau,v(y,\tau)\big) - f_0\big(y,\tau,w(y,\tau)\big)\Big|\, dy d\tau \le \psi_C^1\left(\|v - w;\ \widehat{P}\|_k\right), \tag{7}$$

$$\int\limits_\Sigma \Big| f_1\big(y,\tau,v(y,\tau)\big) - f_1\big(y,\tau,w(y,\tau)\big)\Big|\, dS d\tau \le \psi_C^2\left(\|v - w;\ \widehat{P}\|_k\right). \tag{8}$$

Тоді існує розв'язок задачі (1)–(3) *у просторі* $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються припущення* 1, $k > \max\{p_1 + 2p_2, p_3 - 1\}$, $f_0(x,t,v) = |v|^{\beta_0}$ *та* $f_1(x,t,v) = |v|^{\beta_1}|t-\hat{t}|^{\gamma}$. *Тоді для всіх* $\beta_0 \in \Big(0, \dfrac{n+2}{k+n+2}\Big)$, $\beta_1 \in \Big(0, \dfrac{n+1}{k+n+1}\Big)$, $\gamma \in \big(-(1-\beta_1), 0\big)$ *існує розв'язок задачі* (1)–(3) *у просторі* $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Доведення. Покажемо, що функції $f_0(x,t,v) = |v|^{\beta_0}$ та $f_1(x,t,v) = |v|^{\beta_1}|t-\hat{t}|^{\gamma}$ задовольняють умови теореми 1.

У [5] доведено виконання умов (5) та (7) при $\beta_0 \in \Big(0, \dfrac{n+2}{k+n+2}\Big)$.

Подібним чином, застосовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\int\limits_{\Sigma} \big|v(y,\tau)\big|^{\beta_1}\big|\tau-\hat{t}\,\big|^{\gamma}\, dSd\tau \le \left(\int\limits_{\Sigma} \varrho_0^k(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big|v(y,\tau)\big|\, dSd\tau\right)^{\beta_1} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{\Sigma} \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\frac{k\beta_1}{1-\beta_1}}|\tau-\hat{t}\,|^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}}\, dSd\tau\right)^{1-\beta_1} \le$$

$$\le \Big(\|v;\, \widehat{P}\|_k\Big)^{\beta_1}\left(\int\limits_{\Sigma} \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\frac{k\beta_1}{1-\beta_1}}\big|\tau-\hat{t}\,\big|^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}}\, dSd\tau\right)^{1-\beta_1}.$$

Виконаємо заміну змінних $y_i = \hat{x}_i + \xi_i \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, $\tau = \hat{t} + \xi_{n+1}\Big(\dfrac{\varepsilon_0}{2}\Big)^2$, $i = \overline{1,n}$, де $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1})$, $|\overline{\xi}| = \sqrt{\|\xi\|^2 + \xi_{n+1}}$, $dSd\tau = \Big(\dfrac{\varepsilon_0}{2}\Big)^{n+1} d\overline{\xi}$. Тоді

$$\int\limits_{\Sigma} \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\frac{k\beta_1}{1-\beta_1}}\,\big|\tau-\hat{t}\,\big|^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}}\, dSd\tau =$$

$$= \int\limits_{\left\{(y,\tau)\in\Sigma:\ |M\hat{P}|<\frac{\varepsilon_0}{2}\right\}} \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\frac{k\beta_1}{1-\beta_1}}\,\big|\tau-\hat{t}\,\big|^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}}\, dSd\tau +$$

$$+ \int\limits_{\left\{(y,\tau)\in\Sigma:\ |M\hat{P}|\ge\frac{\varepsilon_0}{2}\right\}} \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\frac{k\beta_1}{1-\beta_1}}\,\big|\tau-\hat{t}\big|^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}}\, dSd\tau \le$$

$$\le C_1 \int\limits_{\left\{\overline{\xi}\in\Sigma:\ |\overline{\xi}|<1\right\}} |\,\overline{\xi}\,|^{-\frac{k\beta_1}{1-\beta_1}}\, \xi_{n+1}^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}}\, d\overline{\xi} + C_2 \int\limits_{\left\{\overline{\xi}\in\Sigma:\ |\overline{\xi}|\ge1\right\}} \xi_{n+1}^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}}\, d\overline{\xi},$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Інтеграли в останній рівності збігаються при $-\dfrac{k\beta_1}{1-\beta_1} > -n-1$, $\dfrac{\gamma}{1-\beta_1} > -1$, а отже, при всіх $\beta_1 \in \Big(0, \dfrac{n+1}{k+n+1}\Big)$, $\gamma \in \Big(-(1-\beta_1), 0\Big)$ функція f_1 задовольняє умову (6).

Використовуючи формулу $|a^{\mu} - b^{\mu}| \le |a-b|^{\mu}$ при $a,\ b > 0$, $\mu \in (0,1)$ та нерівність Гельдера, оцінюємо

$$\int\limits_{\Sigma} \left\| v(y,\tau) \right|^{\beta_1} - \left| w(y,\tau) \right|^{\beta_1} \left| \, |\tau - \hat{t}\,|^{\gamma} \, dSd\tau \le \left(\left\| v - w;\, \widehat{P} \right\|_k \right)^{\beta_1} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Sigma} \left[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,) \right]^{-\frac{k\beta_1}{1-\beta_1}} |\tau - \hat{t}\,|^{\frac{\gamma}{1-\beta_1}} \, dSd\tau \right)^{1-\beta_1},$$

де інтеграл збігається при $\beta_1 \in \left(0, \dfrac{n+1}{k+n+1}\right)$, $\gamma \in (-(1-\beta_1), 0)$. Отже, виконуються умови (6), (8).

Наслідок 1 доведено.

Якщо β_0, β_1 та γ відомі, то можна отримати простори $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$, для яких існує розв'язок $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$ задачі (1)–(3).

***Зауваження* 2.** Нехай виконуються припущення 1 та $\beta_0, \beta_1 \in (0,1)$, $\gamma \in (-1, 0)$,

$$p_1 + 2p_2 < \min\left\{ (n+2)\left(\frac{1}{\beta_0} - 1\right);\, (n+1)\left(\frac{1}{\beta_1} - 1\right) \right\},$$

$$p_3 < 1 + \min\left\{ (n+2)\left(\frac{1}{\beta_0} - 1\right);\, (n+1)\left(\frac{1}{\beta_1} - 1\right) \right\}.$$

Тоді існує розв'язок $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$ задачі (1)–(3) при $k > k_0 > 0$.

2. Характер точкових степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами. Для довільної фіксованої точки $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$ та $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо функційний простір

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P}) = \Big\{ v \in C\big(\overline{Q} \setminus \{\widehat{P}\}\big) \colon \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,) v(y,\tau) \in C(\overline{Q}) (\|v;\, \widehat{P}\|'_\alpha =$$

$$= \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,) \big| v(y,\tau) \big| < +\infty) \Big\}.$$

Оскільки при $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$ та $k + \alpha > -n - 1$ виконується

$$\|v;\, \widehat{P}\|_k = \max\left\{ \int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P}\,) \big| v(y,\tau) \big| \, dyd\tau;\, \int\limits_\Sigma \varrho_0^k(M,\widehat{P}\,) \big| v(y,\tau) \big| \, dSd\tau \right\} \le$$

$$\le \max\left\{ \widehat{C} \int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P}\,) \big[\varrho_0(M,\widehat{P}\,) \big]^{\alpha} dyd\tau;\, \widehat{C} \int\limits_\Sigma \varrho_0^k(M,\widehat{P}\,) \big[\varrho_0(M,\widehat{P}\,) \big]^{\alpha} dSd\tau \right\} \le$$

$$\le \max\left\{ \widehat{C} \int\limits_{\{M\colon |M\widehat{P}| < \varepsilon_0\}} \big[\varrho_0(M,\widehat{P}\,) \big]^{k+\alpha} dyd\tau + \right.$$

$$\left. + \widehat{C} \int\limits_{\{M\colon |M\widehat{P}| \ge \varepsilon_0\}} dyd\tau;\, \widehat{C} \int\limits_{\{M\colon |M\widehat{P}| < \varepsilon_0\}} \big[\varrho_0(M,\widehat{P}\,) \big]^{k+\alpha} dSd\tau + \widehat{C} \int\limits_{\{M\colon |M\widehat{P}| \ge \varepsilon_0\}} dSd\tau \right\} < +\infty,$$

то $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) \subset \mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ при $k > -\alpha - n - 1$, де $\widehat{C}$ — додатна стала.

Нехай $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{v \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})\colon \|v;\ \widehat{P}\|'_\alpha \le \widetilde{C}\}$ — замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

У [6] доведено таку лему.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення* 1 *на функції* $F_1,\ F_2$ *та* $\alpha \le \min\big\{ -(1+p_1+ 2p_2);\ -p_3\big\} - n$. *Тоді* $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, *а саме, існує додатна стала* $\widehat{K}_0$ *така, що* $\|h;\ \widehat{P}\,\|'_\alpha \le \widehat{K}_0 < +\infty$.

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{\beta_0}, \quad (x,t) \in Q, \tag{9}$$

$$u|_{\,\Sigma} = F_1(x,t) + \big|u(x,t)\big|^{\beta_1}|t-\hat{t}\,|^{\gamma}, \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{10}$$

$$u|_{\,t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

при $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$ та $\gamma \in (-1,0)$.

Лема 3. *Нехай виконуються припущення* 1. *Якщо* $\beta_0,\ \beta_1 \in (0,1)$,

$$\max\left\{-\frac{(n+2)(1-\beta_1)}{2\beta_0};\ -\frac{(n+1)(1-\beta_1)}{2\beta_1};\ -1\right\} < \gamma < 0,$$

$$\max\left\{-\frac{n+2}{\beta_0};\ -\frac{n+1}{\beta_1}\right\} < \alpha \le \min\left\{\min\Big\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\Big\} - n;\ \frac{2\gamma}{1-\beta_1}\right\},$$

то існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ *така, що при всіх* $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ *оператор* H_1 *відображає* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *в себе.*

Доведення. При $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}$ — довільна додатна стала, розглянемо

$$\big\|H_1 v;\ \widehat{P}\,\big\|'_\alpha \le \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\left(\int_0^t d\tau \int_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\,\big|v(y,\tau)\big|^{\beta_0}\,dy + \right.$$

$$\left. + \int_\Sigma \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right|\,\big|v(y,\tau)\big|^{\beta_1}\,|\tau-\hat{t}\,|^{\gamma}\,dS_y d\tau\right) + \|h;\ \widehat{P}\|'_\alpha.$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$, $\gamma > -1$ і лему 2 при $\alpha \le \min\big\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\big\} - n$, маємо

$$\big\|H_1 v;\ \widehat{P}\,\big\|'_\alpha \le \widehat{L}_{1,0}\widetilde{C}^{\beta_0} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \left\{\max\left\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_0-1)+2},\ \big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\right\}\right\} +$$

$$+ \widehat{L}_{2,1}\widetilde{C}^{\beta_1} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \left\{\max\left\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_1-1)+2\gamma},\ \big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\right\}\right\} + \widehat{K}_0.$$

При виконанні умов $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$, $\alpha(\beta_0-1)+2 \ge 0$, $\alpha(\beta_1-1)+2\gamma \ge 0$, $-\alpha \ge 0$ знаходимо $\|H_1 v; \widehat{P}\|'_\alpha \le \widetilde{C}\,'$ при $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}\,' = \widehat{L}_{1,0}\widetilde{C}^{\beta_0} + \widehat{L}_{2,1}\widetilde{C}^{\beta_1} + \widehat{K}_0$.

Зауважимо, що при $\beta_0,\, \beta_1 \in (0,1)$ існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ така, що $\widetilde{C}' \le \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Отже, за умов леми одержуємо існування додатної сталої $\widetilde{K}_0$ такої, що при всіх $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ в себе.

Лему 3 доведено.

Доведення наступної леми аналогічне доведенню леми 4 [6].

Лема 4. *Нехай* $\beta_0, \beta_1 \in (0,1)$, $\max\left\{-\dfrac{1-\beta_1}{\beta_0};\, -\dfrac{(n+1)(1-\beta_1)}{2\beta_1};\, -1\right\} < \gamma < 0$, $\max\left\{-\dfrac{2}{\beta_0};\, -\dfrac{n+1}{\beta_1}\right\} < \alpha < \dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *таке, що для довільної підобласті* $V \subset Q$, *міра якої* $m(V)$ *менша за* σ, *та для довільних* $(x,t) \in \overline{Q}$ *виконується*

$$\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap Q} \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha\beta_0} \big|G(x,t;y,\tau)\big|\, dyd\tau < \varepsilon,$$

$$\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap \Sigma} \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha\beta_1} |\tau-\hat{t}\,|^{\gamma} \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| dS_y d\tau < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення* 1 *на функції* F_1, F_2, $\beta_0, \beta_1 \in (0,1)$,

$$\max\left\{-\frac{1-\beta_1}{\beta_0};\, -\frac{(n+1)(1-\beta_1)}{2\beta_1};\, -1\right\} < \gamma < 0,$$

$$\max\left\{-\frac{2}{\beta_0};\, -\frac{n+1}{\beta_1}\right\} < \alpha < \min\left\{\min\Big\{-(1+p_1+2p_2);\, -p_3\Big\} - n;\, \frac{2\gamma}{1-\beta_1}\right\}.$$

Тоді існує розв’язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$ *крайової задачі* (9)–(11) *і при* $k > -\alpha - n - 1$ *цей розв’язок належить простору* $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. З доведення леми 3 випливає, що H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ в себе.

Покажемо, що H_1 — цілком неперервний оператор у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

При $v,\, w \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$

$$\big\|H_1 v - H_1 w;\, \widehat{P}\big\|'_\alpha \le \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\, \Big\|v(y,\tau)\big|^{\beta_0} -$$

$$-\big|w(y,\tau)\big|^{\beta_0}\Big|\, dy + \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \int\limits_\Sigma \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| \Big\|v(y,\tau)\big|^{\beta_1} - \big|w(y,\tau)\big|^{\beta_1}\Big|\, \big|\tau-\hat{t}\big|^{\gamma}\, dS_y d\tau.$$

Використовуючи формулу $|a^\mu - b^\mu| \le |a-b|^\mu$ при $a,\, b > 0$, $\mu \in (0,1)$, маємо

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\, \Big|\big|v(y,\tau)\big|^{\beta_0} - \big|w(y,\tau)\big|^{\beta_0}\Big|\, dy \le$$

$$\le \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\, \big|G(x,t;y,\tau)\big| \left(\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}\big(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,\big)\big|v(y,\tau) - w(y,\tau)\big|\right)^{\beta_0} dy \le$$

$$\leq \Big(\|v-w;\,\widehat{P}\|'_{\alpha}\Big)^{\beta_0}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega}\varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big|G(x,t;y,\tau)\big|dy,$$

$$\int\limits_{\Sigma}\left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right|\,\Big\|v(y,\tau)\big|^{\beta_1}-\big|w(y,\tau)\big|^{\beta_1}\Big|\big|\tau-\hat{t}\big|^{\gamma}\,dS_y d\tau\leq$$

$$\leq \big(\|v-w;\,\widehat{P}\,\|'_{\alpha}\big)^{\beta_1}\int\limits_{\Sigma}\varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,\left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right|\,|\tau-\hat{t}\,|^{\gamma}\,dS_y d\tau.$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0>-n-2$, $\alpha\beta_1>-n-1$, $\gamma>-1$ одержуємо

$$\big\|H_1v-H_1w;\,\widehat{P}\big\|'_{\alpha}\leq$$

$$\leq \widehat{L}_{1,0}\big(\|v-w;\,\widehat{P}\|'_{\alpha}\big)^{\beta_0}\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\Big\{\max\Big\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_0-1)+2},\,\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\Big\}\Big\}+$$

$$+\widehat{L}_{2,1}\big(\|v-w;\,\widehat{P}\|'_{\alpha}\big)^{\beta_1}\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\Big\{\max\Big\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_1-1)+2\gamma},\,\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\Big\}\Big\}.$$

Звідси, а також з умов на α випливає, що H_1 — неперервний оператор в $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$.

Покажемо компактність оператора H_1 на $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$. З доведення леми 3 випливає, що множина $\big\{\varrho_0^{-\alpha}H_1v\colon v\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})\big\}$ є рівномірно обмеженою. Доведемо, що ця множина одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\|<\delta$, $|z_0|<\delta$ та довільних $v\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)(H_1v)(x+z,t+z_0)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)(H_1v)(x,t)\big|\leq$$

$$\leq\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)(Hv)(x+z,t+z_0)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)(Hv)(x,t)\big|+$$

$$+\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\big|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)h(x+z,t+z_0)-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)h(x,t)\big|<\varepsilon.$$

Вважаємо

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)=0,\qquad \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\,G(x+z,t+z_0;y,\tau)=0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial\nu_y}=0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)(Hv)(x+z,t+z_0)=0,\quad \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)h(x+z,t+z_0)=0,$$

якщо $(x+z,t+z_0)\notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon>0$. Оскільки за лемою 2 $h\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\overline{Q},\,\widehat{P})$, то $\varrho_0^{-\alpha}h\in C(\overline{Q})$. Тому існує $\widehat{\delta}_1=\widehat{\delta}_1(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\|<\widehat{\delta}_1$, $|z_0|<\widehat{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)h(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)h(x,t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t)\in\overline{Q}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = \left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)(Hv)(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)(Hv)(x,t)\right| \le$$

$$\le \int_0^t d\tau \int_\Omega \left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\, G(x+z,t+z_0;y,\tau) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\, G(x,t;y,\tau)\right| \times$$

$$\times|v(y,\tau)|^{\beta_0}\, dy + \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,) \int_t^{t+z_0} d\tau \int_\Omega \left|G(x+z,t+z_0;y,\tau)\right| \left|v(y,\tau)\right|^{\beta_0} dy +$$

$$+ \int_\Sigma \left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial\nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| \times$$

$$\times\left|v(y,\tau)\right|^{\beta_1}|\tau-\hat{t}\,|^\gamma\, dS_y d\tau = \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) + \mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0).$$

З доведення теореми 1 [20] випливає існування $\widetilde{\delta}_1 = \widetilde{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z,z_0)\in\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\|<\widetilde{\delta}_1$, $|z_0|<\widetilde{\delta}_1$ виконується $\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\big(\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)+\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0)\big)<\varepsilon/3$.

Нехай $\eta_1>0$ — досить мале і довільне число, $\Sigma_{\eta_1}\subset\Sigma$ така, що $\operatorname{dist}(x,\hat{x})\ge\eta_1$, $\operatorname{dist}(t,\hat{t}\,)\ge\ge\eta_1^2$. Тоді для довільних $v\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$ та $(x,t)\in\overline{Q}$ матимемо

$$\mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \le \widetilde{C}^{\beta_1}\int_\Sigma \left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial\nu_y} - \right.$$

$$\left. -\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right|\varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)|\tau-\hat{t}\,|^\gamma\, dS_y d\tau =$$

$$= \widetilde{C}^{\beta_1}\int_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} \left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial\nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| \times$$

$$\times\varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)|\tau-\hat{t}\,|^\gamma\, dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1}\int_{\Sigma_{\eta_1}} \left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial\nu_y} - \right.$$

$$\left. -\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right|\varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)|\tau-\hat{t}\,|^\gamma\, dS_y d\tau =$$

$$= \mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) + \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0).$$

Нехай $\delta_0 > 0$ — фіксоване число. За заданим δ_0 вибираємо число $\eta_1 < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ таке, що $m(\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1})\le\delta_0$ та $\eta_1 < \left(\dfrac{\varepsilon}{12\widetilde{C}^{\beta_1}\widetilde{C}_0}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)+2\gamma}}$. За лемою 4 існують $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$ та відповідне $\eta_1 > 0$ такі, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$,

$$\int\limits_{\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)|\tau - \hat{t}\,|^{\gamma} \left| \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)|\tau - \hat{t}\,|^{\gamma} \left| \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,) \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{13}$$

Тоді з (12), (13) при $(x,t) \in \overline{Q}$

$$\mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \le \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}} \left(\left| \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,) \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y} \right| \right) \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau - \hat{t}\,|^{\gamma}\, dS_y d\tau < \widetilde{C}^{\beta_1} \left(\frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}} + \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}} \right) = \frac{\varepsilon}{12},$$

а отже, $\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \varepsilon/12$.

Виберемо $0 < \eta_2 < \dfrac{\eta_1}{2}$. Для довільної $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ та числа η_2 визначимо множини $U_{\eta_2}(x,t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1} \colon \|x-y\| \le \eta_2,\ |t-\tau| \le \eta_2^2\}$. Обчислимо

$$m\big(U_{\eta_2}(x,t)\big) = \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} dy d\tau = \int\limits_{\|x-y\|\le\eta_2} dy \int\limits_{|t-\tau|\le\eta_2^2} d\tau = 2\sigma_n \eta_2^{n+2},$$

де σ_n — площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати $\eta_2 < \min\left\{\dfrac{\eta_1}{2}; \left(\dfrac{\delta_0}{2\sigma_n}\right)^{\frac{1}{n+2}}\right\}$, то $m\big(U_{\eta_2}(x,t)\big) < \delta_0$. Тоді з (12) та (13) для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0) \in Q$,

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau - \hat{t}|^{\gamma} \left| \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}, \tag{14}$$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau - \hat{t}|^{\gamma} \left| \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,) \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} \right| dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{15}$$

Виберемо $\delta_1 < \min\left\{\delta_0; \dfrac{\eta_2}{2}\right\}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $\|z\| \le \delta_1\Big(< \dfrac{1}{4}\eta_1\Big)$, $|z_0| \le \delta_1\Big(< \dfrac{1}{4}\eta_1\Big)$, маємо $(x+z,t+z_0) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$, $(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)$,

$\|x-y\| \geq \eta_2$, $|t-\tau| \geq \eta_2^2$, а отже, $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому функція $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\dfrac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}$ рівномірно неперервна в області $V = \big\{(x,t;y,\tau)\colon (x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}},\ (y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}\big\}$. Тоді існує $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0;\delta_1]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$, $(x,t) \in \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}$ при $\alpha\beta_1 > -n-1$, $\gamma > -1$ виконується

$$\left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| < \frac{\varepsilon}{36A\widetilde{C}^{\beta_1}},$$

де $A = \displaystyle\int_{\Sigma_{\eta_1}\setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau-\hat{t}|^{\gamma}\,dS_y d\tau$, а отже,

$$\int\limits_{\Sigma_{\eta_1}\setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau-\hat{t}|^{\gamma}\left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \right.$$

$$\left. -\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right|\,dS_y d\tau <$$

$$< \frac{\varepsilon}{36A\widetilde{C}^{\beta_1}} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}\setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)|\tau-\hat{t}\,|^{\gamma}\,dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{16}$$

Таким чином, при $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ із (14)–(16) випливає існування $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$

$$\mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = \widetilde{C}^{\beta_1}\int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \right.$$

$$\left. -\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right|\,|\tau-\hat{t}\,|^{\gamma}\,dS_y d\tau \leq$$

$$\leq \widetilde{C}^{\beta_1}\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| \times$$

$$\times|\tau-\hat{t}\,|^{\gamma}\,dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1}\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\times$$

$$\times\left|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right|\,|\tau-\hat{t}\,|^{\gamma}\,dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1}\int\limits_{\Sigma_{\eta_1}\setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\times$$

$$\times\left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| \times$$

$$\times|\tau-\hat{t}|^{\gamma}\,dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} = \frac{\varepsilon}{12},$$

а отже, $\sup_{(x,t)\in\overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \varepsilon/12$.

При $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_1\Big(< \dfrac{\eta_1}{4}\Big)$, $|z_0| < \delta_1\Big(< \dfrac{\eta_1}{4}\Big)$ буде $(x + z, x + z_0) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}} \subset Q$ або $(x+z, t+z_0) \notin Q$. За рівномірною неперервністю функції $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\dfrac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}$ на замкненій множині $V_1 = (\overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}) \times Q_{\eta_1}$, враховуючи, що $-\alpha \geq 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \leq 1$, переконуємося, що існує $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0,\delta_1]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_3$, $|z_0| < \delta_3$, виконується

$$\left|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| < \frac{\varepsilon}{12B\widetilde{C}^{\beta_1}},$$

де $B = \displaystyle\int_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau-\hat{t}|^{\gamma}\,dS_y d\tau$, звідки

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\in Q}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leq \widetilde{C}^{\beta_1}\frac{\varepsilon}{12B\widetilde{C}^{\beta_1}}\int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau-\hat{t}|^{\gamma}\,dS_y d\tau = \frac{\varepsilon}{12}.$$

Для тих точок $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \delta_1$, $|z_0| < \delta_1$, для яких $(x+z, t+z_0) \notin Q$, маємо

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1}\int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\,|\tau-\hat{t}|^{\gamma}\left|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| dS_y d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1}\int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \eta_1^{\alpha\beta_1+2\gamma}\left|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| dS_y d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}\\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1}\eta_1^{\alpha\beta_1+2\gamma}\eta_1^{-\alpha}\int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| dS_y d\tau \leq \widetilde{C}^{\beta_1}\widetilde{C}_0\eta_1^{\alpha(\beta_1-1)+2\gamma} < \frac{\varepsilon}{12},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором η_1. Зауважимо, що при $\beta_1 \in (0,1)$ та $\gamma > -1$ повинна виконуватись умова $\alpha(\beta_1 - 1) + 2\gamma > 0$.

Показано, що існує $\widetilde{\delta}_2 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \widetilde{\delta}_2$, $|z_0| < \widetilde{\delta}_2 \quad \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \varepsilon/6$.

Отже, існує $\widehat{\delta}_2 = \min\{\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2\} > 0$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|z\| < \widehat{\delta}_2$, $|z_0| < \widehat{\delta}_2$, виконується $\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \varepsilon/2$.

Таким чином, множина $\{H_1 v\colon v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})\}$ є одностайно неперервною. За теоремою Шаудера та за умов лем 2–4 крайова задача (9)–(11) має розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Теорему 2 доведено.

З умов теореми 2, які накладені на γ та α, випливає таке зауваження.

***Зауваження* 3.** У випадках:

1) $0 < \beta_0 < 2(n-1)/(n+1)^2$ та $(n+1)\beta_0/2 < \beta_1 < (n-1)/(n+1)$, $-1 < \gamma < 0$, $0 \le p_1 + 2p_2 < (n+1)\big(1/\beta_1 - 1\big)$ і

якщо $\quad 0 \le p_3 < 1 + p_1 + 2p_2, \quad$ то $\quad -\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n)$,

якщо $\quad 1 + p_1 + 2p_2 \le p_3 < \dfrac{n+1}{\beta_1} - n, \quad$ то $\quad -\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < -(p_3 + n)$;

$$\frac{n-1}{n+1} \le \beta_1 < \frac{n+1}{n+3}, \qquad -1 < \gamma < -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1),$$

або

$$\frac{n+1}{n+3} \le \beta_1 < 1, \qquad -\frac{n+1}{2\beta_1}(1-\beta_1) < \gamma < -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1)$$

і якщо $\quad 0 \le p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1), 0 \le p_3 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n,\;$ то $\; -\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < \dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}$,

якщо $\quad 0 \le p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1), -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n \le p_3 < \dfrac{n+1}{\beta_1} - n, \quad$ то $\quad -\dfrac{n+1}{\beta_1} <$ $< \alpha < -(p_3 + n)$;

якщо $\quad -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1) \le p_1 + 2p_2 < (n+1)\left(\dfrac{1}{\beta_1} - 1\right), \quad 0 \le p_3 < 1 + p_1 + 2p_2, \quad$ то $-\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n)$,

якщо $\quad -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1) \le p_1 + 2p_2 < (n+1)\left(\dfrac{1}{\beta_1} - 1\right), \quad 1 + p_1 + 2p_2 \le p_3 < \dfrac{n+1}{\beta_1} - n$, то $\quad -\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < -(p_3 + n)$;

$$\frac{n-1}{n+1} \le \beta_1 < 1, \qquad -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1) \le \gamma < 0, \qquad 0 \le p_1 + 2p_2 < (n+1)\left(\frac{1}{\beta_1} - 1\right)$$

і якщо $\quad 0 \le p_3 < 1 + p_1 + 2p_2, \quad$ то $\quad -\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n)$,

якщо $\quad 1 + p_1 + 2p_2 \le p_3 < \dfrac{n+1}{\beta_1} - n, \quad$ то $\quad -\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < -(p_3 + n)$;

2) $\dfrac{2(n-1)}{(n+1)^2} \le \beta_0 < \dfrac{2}{n+3}$ та $\dfrac{(n+1)\beta_0}{2} < \beta_1 < \dfrac{n+1}{n+3}$, $-1 < \gamma < -\dfrac{n+1}{2}(1-\beta_1)$, або

$$\frac{n+1}{n+3} \le \beta_1 < 1, \qquad -\frac{n+1}{2\beta_1}(1-\beta_1) < \gamma < -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1)$$

і якщо $\quad 0 \le p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1), 0 \le p_3 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n,\;$ то $\; -\dfrac{n+1}{\beta_1} < \alpha < \dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}$,

якщо $\quad 0 \le p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1), \quad -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n \le p_3 < \dfrac{n+1}{\beta_1} - n, \quad$ то $\quad -\dfrac{n+1}{\beta_1} <$ $< \alpha < -(p_3 + n)$;

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-(n+1)\le p_1+2p_2<(n+1)\left(\dfrac{1}{\beta_1}-1\right)$, $0\le p_3<1+p_1+2p_2$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(1+p_1+2p_2+n)$,

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-(n+1)\le p_1+2p_2<(n+1)\left(\dfrac{1}{\beta_1}-1\right)$, $1+p_1+2p_2\le p_3<\dfrac{n+1}{\beta_1}-n$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(p_3+n)$;

$$\frac{(n+1)\beta_0}{2}<\beta_1<1,\qquad -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1)\le\gamma<0,\qquad 0\le p_1+2p_2<(n+1)\left(\frac{1}{\beta_1}-1\right)$$

і якщо $0\le p_3<1+p_1+2p_2$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(1+p_1+2p_2+n)$,

якщо $1+p_1+2p_2\le p_3<\dfrac{n+1}{\beta_1}-n$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(p_3+n)$;

3) $\dfrac{2}{n+3}\le\beta_0<\dfrac{2}{n+1}$, $\dfrac{(n+1)\beta_0}{2}<\beta_1<1$, $-\dfrac{n+1}{2\beta_1}(1-\beta_1)<\gamma<-\dfrac{n+1}{2}(1-\beta_1)$ і

якщо $0\le p_1+2p_2<-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-(n+1), 0\le p_3<-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-n$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}$,

якщо $0\le p_1+2p_2<-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-(n+1)$, $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-n\le p_3<\dfrac{n+1}{\beta_1}-n$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<$ $<\alpha<-(p_3+n)$;

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-(n+1)\le p_1+2p_2<(n+1)\left(\dfrac{1}{\beta_1}-1\right)$, $0\le p_3<1+p_1+2p_2$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(1+p_1+2p_2+n)$,

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1}-(n+1)\le p_1+2p_2<(n+1)\left(\dfrac{1}{\beta_1}-1\right)$, $1+p_1+2p_2\le p_3<\dfrac{n+1}{\beta_1}-n$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(p_3+n)$;

$$\frac{(n+1)\beta_0}{2}<\beta_1<1,\qquad -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1)\le\gamma<0,\qquad 0\le p_1+2p_2<(n+1)\left(\frac{1}{\beta_1}-1\right)$$

і якщо $0\le p_3<1+p_1+2p_2$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(1+p_1+2p_2+n)$,

якщо $1+p_1+2p_2\le p_3<\dfrac{n+1}{\beta_1}-n$, то $-\dfrac{n+1}{\beta_1}<\alpha<-(p_3+n)$;

умови теореми 2 виконуються.

***Зауваження* 4.** У випадках:

1) $0<\beta_0<\dfrac{2(n-1)}{(n+1)^2}$ та $0<\beta_1<\dfrac{n+1}{2}\beta_0$, $-1<\gamma<0$, $0\le p_1+2p_2<\dfrac{2}{\beta_0}-(n+1)$ і

якщо $0\le p_3<1+p_1+2p_2$, то $-\dfrac{2}{\beta_0}<\alpha<-(1+p_1+2p_2+n)$,

якщо $1+p_1+2p_2\le p_3<\dfrac{2}{\beta_0}-n$, то $-\dfrac{2}{\beta_0}<\alpha<-(p_3+n)$;

2) $\dfrac{2(n-1)}{(n+1)^2}\le\beta_0<\dfrac{2}{n+3}$, $0<\beta_1<\dfrac{n-1}{n+1}$, $-1<\gamma<0$, $0\le p_1+2p_2<\dfrac{2}{\beta_0}-(n+1)$ і

якщо $0 \leq p_3 < 1 + p_1 + 2p_2,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n),$

якщо $1 + p_1 + 2p_2 \leq p_3 < \dfrac{2}{\beta_0} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(p_3 + n);$

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \beta_1 < \frac{(n+1)\beta_0}{2}, \qquad -1 < \gamma < -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1)$$

і якщо $0 \leq p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1),\ 0 \leq p_3 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < \dfrac{2\gamma}{1-\beta_1},$

якщо $0 \leq p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1),\ -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n \leq p_3 < \dfrac{2}{\beta_0} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha <$ $-(p_3 + n);$

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1) \leq p_1 + 2p_2 < \dfrac{2}{\beta_0} - (n+1),\quad 0 \leq p_3 < 1 + p_1 + 2p_2,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n),$

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1) \leq p_1 + 2p_2 < \dfrac{2}{\beta_0} - (n+1),\quad 1 + p_1 + 2p_2 \leq p_3 < \dfrac{2}{\beta_0} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(p_3 + n);$

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \beta_1 < \frac{(n+1)\beta_0}{2}, \qquad -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1) \leq \gamma < 0, \qquad 0 \leq p_1 + 2p_2 < \frac{2}{\beta_0} - (n+1)$$

і якщо $0 \leq p_3 < 1 + p_1 + 2p_2,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n),$

якщо $1 + p_1 + 2p_2 \leq p_3 \leq \dfrac{2}{\beta_0} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(p_3 + n);$

3) $\dfrac{2}{n+3} \leq \beta_0 < \dfrac{2}{n+1},\ 0 < \beta_1 < \dfrac{n-1}{n+1},\ -1 < \gamma < 0,\quad 0 \leq p_1 + 2p_2 < \dfrac{2}{\beta_0} - (n+1)$ і

якщо $0 \leq p_3 < 1 + p_1 + 2p_2,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n),$

якщо $1 + p_1 + 2p_2 \leq p_3 < \dfrac{2}{\beta_0} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(p_3 + n);$

$\dfrac{n-1}{n+1} \leq \beta_1 < 1 - \beta_0,\qquad -1 < \gamma < -\dfrac{n+1}{2}(1-\beta_1),$ або $1 - \beta_0 \leq \beta_1 < \dfrac{(n+1)\beta_0}{2},$ $-\dfrac{1-\beta_1}{\beta_0} < \gamma < -\dfrac{n+1}{2}(1-\beta_1)$

і якщо $0 \leq p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1),\ 0 \leq p_3 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < \dfrac{2\gamma}{1-\beta_1},$

якщо $0 \leq p_1 + 2p_2 < -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1),\quad -\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - n \leq p_3 < \dfrac{2}{\beta_0} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha <$ $< -(p_3 + n);$

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1) \leq p_1 + 2p_2 < \dfrac{2}{\beta_0} - (n+1),\qquad 0 \leq p_3 < 1 + p_1 + 2p_2,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n),$

якщо $-\dfrac{2\gamma}{1-\beta_1} - (n+1) \leq p_1 + 2p_2 < \dfrac{2}{\beta_0} - (n+1),\quad 1 + p_1 + 2p_2 \leq p_3 < \dfrac{2}{\beta_0} - n,$ то $-\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(p_3 + n);$

$$\frac{n-1}{n+1} \le \beta_1 < \frac{(n+1)\beta_0}{2}, \qquad -\frac{n+1}{2}(1-\beta_1) \le \gamma < 0, \qquad 0 \le p_1 + 2p_2 < \frac{2}{\beta_0} - (n+1)$$

і якщо $\quad 0 \le p_3 < 1 + p_1 + 2p_2, \quad$ то $\quad -\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(1 + p_1 + 2p_2 + n),$

якщо $\quad 1 + p_1 + 2p_2 \le p_3 < \dfrac{2}{\beta_0} - n, \quad$ то $\quad -\dfrac{2}{\beta_0} < \alpha < -(p_3 + n);$

умови теореми 2 виконуються.

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = \varkappa_0(x,t)\big|u(x,t)\big|^{\beta_0}, \qquad (x,t) \in Q, \tag{17}$$

$$u\,|_{\Sigma} = F_1(x,t) + \varkappa_1(x,t)\big|u(x,t)\big|^{\beta_1}|\tau - \hat{t}\,|^{\gamma}, \qquad (x,t) \in \Sigma, \tag{18}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \qquad x \in \Omega, \tag{19}$$

при $\beta_0,\ \beta_1 \in (1,+\infty)$, $\gamma \in (0,+\infty)$, $\varkappa_0 \in L^{\infty}(Q)$, $\varkappa_1 \in L^{\infty}(\Sigma)$, $\sup_{(x,t)\in Q}|\varkappa_0(x,t)| = \widehat{\varkappa}_0$, $\sup_{(x,t)\in\Sigma}|\varkappa_1(x,t)| = \widehat{\varkappa}_1$, F_1 — довільна регулярна функція, $F_2(x) = C_0\delta(x - \hat{x})$.

Теорема 3. *Нехай* $\beta_0 \in \left(1; 1 + \dfrac{2}{n}\right)$, $\beta_1 \in \left(1; 1 + \dfrac{1}{n}\right)$, $\gamma \in \left[\dfrac{n(\beta_1 - 1)}{2}; +\infty\right)$, $-\dfrac{2\gamma}{\beta_1 - 1} \le \alpha \le -n$ *та* $\alpha > \max\left\{-\dfrac{n+2}{\beta_0}; -\dfrac{n+1}{\beta_1}\right\}$. *Тоді існують додатні сталі* $\varkappa_i$ *такі, що при* $\widehat{\varkappa}_i < \varkappa_i$, $i = 0,1$, *задача* (17)–(19) *має розв'язок у просторі* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *і при* $k > -\alpha - n - 1$ *цей розв'язок належить* $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Зауважимо, що стала $\varkappa_0$ залежить від сталих β_0, $\widetilde{C}$ та $\widehat{L}_{1,0}$, а стала $\varkappa_1$ — від β_1, $\widetilde{C}$ та $\widehat{L}_{2,1}$.

Для доведення теореми 3 використаємо принцип стискаючих відображень: покажемо існування сталої $\widetilde{C}$ такої, що задача (17)–(19) однозначно розв'язна у $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$. Тоді при $k > -\alpha - n - 1$ цей розв'язок належатиме $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$. Використаємо наступну лему.

Лема 5. *За умов теореми* 3 *існують додатні сталі* $\widetilde{C}$, $\varkappa_i$ *такі, що при* $\widehat{\varkappa}_i \le \varkappa_i$, $i = 0,1$, *оператор* H_1 *відображає* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *в себе.*

Доведення. При $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, де $\widetilde{C}$ — довільна додатна стала, розглянемо

$$\|H_1 v; \widehat{P}\|'_{\alpha} \le \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,) \left(\widehat{\varkappa}_0 \int_0^t d\tau \int_{\Omega} \big|G(x,t;y,\tau)\big|\,\big|v(y,\tau)\big|^{\beta_0}\,dy + \right.$$

$$\left. + \widehat{\varkappa}_1 \int_{\Sigma} \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| \big|v(y,\tau)\big|^{\beta_1}|\tau - \hat{t}\,|^{\gamma}\,dS_y d\tau\right) + \|h; \widehat{P}\|'_{\alpha}.$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$, $\gamma > 0$ і те, що при $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ існує додатна стала $\widehat{K}_0$ така, що $\|h;\ \widehat{P}\|'_{\alpha} \le \widehat{K}_0$ (лема 2), маємо

$$\|H_1 v; \widehat{P}\|'_{\alpha} \le \widehat{\varkappa}_0 \widehat{L}_{1,0} \widetilde{C}^{\beta_0} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \left\{\max\left\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_0-1)+2},\ \big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\right\}\right\} +$$

$$+ \widehat{\varkappa}_1 \widehat{L}_{2,1} \widetilde{C}^{\beta_1} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \left\{\max\left\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_1-1)+2\gamma},\ \big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\right\}\right\} + \widehat{K}_0.$$

Звідси випливає, що за умов

$$\alpha\beta_0 > -n-2, \quad \alpha\beta_1 > -n-1, \quad \alpha(\beta_0-1)+2 \geq 0, \quad \alpha(\beta_1-1)+2\gamma \geq 0, \quad -\alpha \geq 0 \quad (20)$$

при $v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$, $\widetilde{C}\,' = \widetilde{C}\,'(\beta_0;\beta_1) = \widehat{\varkappa}_0\widehat{L}_{1,0}\widetilde{C}^{\beta_0} + \widehat{\varkappa}_1\widehat{L}_{2,1}\widetilde{C}^{\beta_1} + \widehat{K}_0$

$$\|H_1 v; \widehat{P}\|'_\alpha \leq \widetilde{C}\,'. \quad (21)$$

Розглянемо нерівність

$$\mathcal{B}_i\widetilde{C}^{\beta_i} + \frac{\widehat{K}_0}{2} \leq \frac{\widetilde{C}}{2}, \qquad \text{де} \quad \mathcal{B}_i = \begin{cases} \widehat{\varkappa}_0\widehat{L}_{1,0}, & i=0, \\ \widehat{\varkappa}_1\widehat{L}_{2,1}, & i=1. \end{cases} \quad (22)$$

Згідно з [21, с. 320], при $a>0$, $b>0$, $\alpha>1$ та умові $\min_{0\leq s<+\infty}(bs^\alpha - s) \leq -a$ існує $r>0$, яке задовольняє нерівність $a + br^\alpha \leq r$.

Розглянемо функцію $\mathcal{F}(s) = \mathcal{B}_i s^{\beta_i} - \dfrac{s}{2}$ і знайдемо $\min_{0\leq s<+\infty}\mathcal{F}(s)$. Маємо $\mathcal{F}'(s) = {}$ $= \mathcal{B}_i\beta_i s^{\beta_i-1} - \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{F}'(s) = 0 \Leftrightarrow s_0 = (2\mathcal{B}_i\beta_i)^{-\frac{1}{\beta_i-1}}$; s_0 — точка локального та абсолютного мінімуму функції $\mathcal{F}(s)$. Тоді $\mathcal{F}(s_0) = \mathcal{B}_i(2\mathcal{B}_i\beta_i)^{-\frac{\beta_i}{\beta_i-1}} - \dfrac{(2\mathcal{B}_i\beta_i)^{-\frac{1}{\beta_i-1}}}{2} = -\dfrac{1}{2(2\mathcal{B}_i\beta_i)^{\frac{1}{\beta_i-1}}}\dfrac{\beta_i-1}{\beta_i}$;

(22) $\Leftrightarrow \min_{0\leq s<+\infty}\mathcal{F}(s) \leq -\dfrac{\widehat{K}_0}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2(2\mathcal{B}_i\beta_i)^{\frac{1}{\beta_i-1}}}\dfrac{\beta_i-1}{\beta_i} \leq -\dfrac{\widehat{K}_0}{2} \Leftrightarrow \widehat{\varkappa}_0 \leq \dfrac{(\beta_0-1)^{\beta_0-1}}{2\widehat{L}_{1,0}\widehat{K}_0^{\beta_0-1}\beta_0^{\beta_0}}$, $\widehat{\varkappa}_1 \leq \dfrac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}}{2\widehat{L}_{2,1}\widehat{K}_0^{\beta_1-1}\beta_1^{\beta_1}}$. Тому при таких $\widehat{\varkappa}_i$, $i=0,1$, та за умов (2) із (21) одержуємо існування додатної сталої $\widetilde{C}$ такої, що оператор H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе.

Лему 5 доведено.

Доведення теореми **3.** Використаємо принцип стискаючих відображень.

За лемою 5 існують додатні сталі $\widetilde{C}$, $\varkappa_0 = \varkappa_0(\widehat{L}_{1,0}, h, \beta_0)$, $\varkappa_1 = \varkappa_1(\widehat{L}_{2,1}, h, \beta_1)$ такі, що при $\widehat{\varkappa}_i \leq \varkappa_i$, $i=0,1$, оператор H_1 діє із простору $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе.

Для довільних $v, w \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ розглянемо

$$\|H_1 v - H_1 w;\ \widehat{P}\|'_\alpha = \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big|(H_1 v)(x,t) - (H_1 w)(x,t)\big| \leq$$

$$\leq \widehat{\varkappa}_0 \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\,\big||v(y,\tau)|^{\beta_0} - |w(y,\tau)|^{\beta_0}\big|\,dy +$$

$$+\widehat{\varkappa}_1 \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\int\limits_\Sigma \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right|\,\big||v(y,\tau)|^{\beta_1} - |w(y,\tau)|^{\beta_1}\big|\,\big|\tau-\hat{t}\big|^\gamma\,dS_y d\tau.$$

Враховуючи, що при $a>0$, $b>0$, $\lambda>1$ виконується нерівність $a^\lambda - b^\lambda \leq R(\lambda)(a-b)(a+b)^{\lambda-1}$, де $R(\lambda)$ — додатна стала [22, с. 133], при $a = \big|v(y,\tau)\big|$, $b = \big|w(y,\tau)\big|$, $\lambda = \beta_i$, $i=0,1$, одержуємо

$\big||v(y,\tau)|^{\beta_i}-|w(y,\tau)|^{\beta_i}\big| \le R(\beta_i)\big||v(y,\tau)|-|w(y,\tau)|\big|\Big(|v(y,\tau)|+|w(y,\tau)|\Big)^{\beta_i-1}$, $i=0,1$, а отже,

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big| \, \big||v(y,\tau)|^{\beta_0} - |w(y,\tau)|^{\beta_0}\big| \, dy \le$$

$$\le R(\beta_0)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\Big(|v(y,\tau)| + |w(y,\tau)|\Big)^{\beta_0-1}\big|v(y,\tau)-w(y,\tau)\big|\, dy \le$$

$$\le 2R(\beta_0)\widetilde{C}^{\beta_0-1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_0-1)}\big|v(y,\tau)-w(y,\tau)\big|\, dy \le$$

$$\le 2R(\beta_0)\widetilde{C}^{\beta_0-1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha\beta_0} \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}}\big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\times$$

$$\times\big|v(y,\tau)-w(y,\tau)\big|\, dy \le 2R(\beta_0)\widetilde{C}^{\beta_0-1}\|v-w;\,\widehat{P}\|_\alpha' \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \big|G(x,t;y,\tau)\big|\big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha\beta_0} dy,$$

$$\int\limits_\Sigma \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| \, \big||v(y,\tau)|^{\beta_1} - |w(y,\tau)|^{\beta_1}\big| \, \big|\tau-\hat{t}\,\big|^\gamma \, dS_y d\tau \le$$

$$\le 2R(\beta_1)\widetilde{C}^{\beta_1-1}\int\limits_\Sigma \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha\beta_1}\,\big|\tau-\hat{t}\big|^\gamma \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}}\big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\times$$

$$\times\big|v(y,\tau)-w(y,\tau)\big|\, dS_y d\tau \le 2R(\beta_1)\widetilde{C}^{\beta_1-1}\|v-w;\,\widehat{P}\|_\alpha'\times$$

$$\times\int\limits_\Sigma \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}\right| \big[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha\beta_1}\,\big|\tau-\hat{t}\,\big|^\gamma \, dS_y d\tau.$$

Використовуючи властивості функції Гріна G, при умовах теореми щодо α та $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$, $\gamma > 0$ знаходимо

$$\|H_1 v - H_1 w;\,\widehat{P}\|_\alpha' \le 2\widehat{\varkappa}_0\widehat{L}_{1,0}R(\beta_0)\widetilde{C}^{\beta_0-1}\|v-w;\,\widehat{P}\|_\alpha'\times$$

$$\times\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\Big\{\max\Big\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_0-1)+2},\ \big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\Big\}\Big\}+$$

$$+2\widehat{\varkappa}_1\widehat{L}_{2,1}R(\beta_1)\widetilde{C}^{\beta_1-1}\|v-w;\,\widehat{P}\|_\alpha'\times$$

$$\times\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\Big\{\max\Big\{\big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{\alpha(\beta_1-1)+2\gamma},\ \big[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t}\,)\big]^{-\alpha}\Big\}\Big\}\le$$

$$\leq 2\max\left\{\widehat{\varkappa}_0\widehat{L}_{1,0}R(\beta_0)\widetilde{C}^{\beta_0-1};\ \widehat{\varkappa}_1\widehat{L}_{2,1}R(\beta_1)\widetilde{C}^{\beta_1-1}\right\}\|v-w;\ \widehat{P}\|'_{\alpha}.$$

За умов $\widehat{\varkappa}_0\widehat{L}_{1,0}K_2(\beta_0,\ \widetilde{C})<\dfrac{1}{2}$, $\widehat{\varkappa}_1\widehat{L}_{2,1}K_2(\beta_1,\ \widetilde{C})<\dfrac{1}{2}$ одержуємо, що оператор H_1 є стисним у $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Лему 3 доведено.

Висновки. У статті знайдено достатні умови існування та досліджено характер точкових степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами.

1. *Лопушанська Г. П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2002. – 285 с.
2. *Лопушанська Г. П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Мат. студ. – 2001. – **15**, № 2. – С. 179 – 190.
3. *Чмир О. Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134 – 143.
4. *Lopushanska H.* Solutions with strong power singularities to nonlinear elliptic boundary value problems // Мат. вісн. НТШ. – 2006. – **3**. – С. 247 – 260.
5. *Чмир О. Ю., Меньшикова О. В.* Про розв'язок нелінійної першої крайової задачі для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 660. – С. 14 – 19.
6. *Чмир О. Ю.* Характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2011. – Вип. 74. – С. 191 – 206.
7. *Galaktionov V., Livine H. A.* On critical Fujita exponents for heat equations with a nonlinear condition on the boundary // Isr. J. Math. – 1996. – **94**. – P. 125 – 146.
8. *Hu B., Yin H. M.* On critical exponents for the heat equation with a mixed nonlinear Dirichlet – Newmann nonlinear boundary condition // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – **209**. – P. 683 – 711.
9. *Gomez J. L., Marquez V., Wolanski N.* Blow-up results and localization of blow-up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition // J. Different. Equat. – 1991. – **92**. – P. 384 – 401.
10. *Lin Z. G., Wang M. X.* The blow-up properties of solutions to semilinear heat equation with nonlinear boundary conditions // Z. angew. Math. und Phys. – 1999. – **50**. – S. 361 – 374.
11. *Arrieta J. M., Carvalho A. N., Rodrigues-Bernal A.* Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities // J. Different. Equat. – 1999. – **156**. – P. 376 – 406.
12. *Fujita H.* On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\triangle u+u^{1+\sigma}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. – 1966. – **13**. – P. 109 – 124.
13. *Fujita H.* On some nonexistence and non-uniqueness theorems for nonlinear parabolic equations // Proc. Sympos. Pure Math. – 1970. – **18**. – P. 105 – 113.
14. *Ryuichi Suzuki.* Existence and nonexistence of global solutions of quasilinear parabolic equations // J. Math. Soc. Jap. – 2002. – **54**, № 4. – P. 747 – 792.
15. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач.– Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
16. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
17. *Ивасишен С. Д.* О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 35 – 45.
18. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191 – 192. – С. 82 – 88.
19. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
20. *Чмир О. Ю.* Точкові особливості розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 220 – 234.
21. *Крейн В. С.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
22. *Соболев С. Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

Одержано 18.09.12,
після доопрацювання — 13.05.13