УДК 519. 41/47

П. П. Барышовец (Нац. авиац. ун-т, Киев)

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ НЕАБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

We obtain a description locally finite groups containing at least one non-Abelian Sylov-subgroup in which complemented all non-Abelian subgroups.

Наведено опис локально скінченних груп, що містять принаймні одну неабелеву силовську підгрупу, в яких всі неабелеві підгрупи є доповнюваними.

1. Введение. Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и $AB = 1$. Ф. Холл [1] изучал конечные группы с дополняемыми подгруппами еще в 1937 г. Полное описание произвольных (как конечных, так и бесконечных) групп с таким свойством, получивших название вполне факторизуемых, было получено позже, в 1953 г., Н. В. Баевой [2] (см. также [3, 4]). В работах С. Н. Черникова [5] и Ю. М. Горчакова [6] было показано, что произвольные вполне факторизуемые группы совпадают с группами, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. Таким образом, выяснилось, что сужение системы дополняемых подгрупп от всех подгрупп группы до системы абелевых подгрупп не приводит к расширению класса вполне факторизуемых групп. Естественно в [7] возник вопрос об изучении неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами.

Исследования, связанные с понятием дополняемости (в более широком смысле разложимости или, иначе, факторизации) занимают важное место как в самой теории групп, так и в других разделах алгебры, позволяя изучать свойства группы по свойствам ее подгрупп (см., например, [8 – 12]). Более подробно отметим лишь классический результат Ф. Холла, показавшего еще в 30-х годах прошлого века в [8], что конечные разрешимые группы — это те конечные группы, в которых дополняема каждая силовская подгруппа.

В разные годы рассматривалось влияние дополняемости систем подгрупп, близких к системе неабелевых подгрупп, на строение группы, прежде всего нециклических [13] и непримарных [14, 15]. Невзирая на зачастую большие различия в строении групп указанных классов, некоторые общие подходы в сходных проблемных ситуациях для этих групп сохранялись.

В работах автора [16 – 19] изучались конечные группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Оказалось, в частности, что они разрешимы и их ступень разрешимости не превышает числа 3. В настоящей работе рассматриваются бесконечные неабелевы локально конечные группы, содержащие по крайней мере одну неабелеву силовскую подгруппу, в которых дополняемы все неабелевы подгруппы. Ее цель — доказательство двух теорем, описывающих строение соответственно нильпотентных и ненильпотентных локально конечных групп такого рода.

Перспективным в плане дальнейшего исследования влияния дополняемости систем подгрупп на строение группы, на взгляд автора, могло бы быть изучение групп с дополняемыми неметациклическими подгруппами.

2. Предварительные результаты. Пусть G — произвольная неабелева группа, имеющая свойство: любая неабелева подгруппа из G дополняема в G. Тогда все неабелевы подгруппы и неабелевы фактор-группы группы G, а также все прямые произведения вида $G \times H$, где H — абелева вполне факторизуемая группа, имеют то же свойство. Кроме того, фактор-группа группы G по ее неабелевому нормальному делителю вполне факторизуема.

Следуя Ф. Холлу и Тонту, локально конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами будем называть *A-группами* (как и в конечном случае).

Лемма 1. *В A-группе пересечение центра с коммутантом тривиально.*

Следует из аналогичного утверждения для конечных групп (Тонт [20]).

Лемма 2. *Если в неабелевой бесконечной бинарно конечной группе G с дополняемыми неабелевыми подгруппами коммутант конечен, то $G = H \times B$, где H — конечная группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами, а B — бесконечная вполне факторизуемая абелева группа.*

Доказательство. Пусть G' — конечная группа и A_1 — произвольная неабелева конечная подгруппа группы G. Пусть $A_2 = G'A_1$. Тогда $G = A_2 \leftthreetimes L$, где L — вполне факторизуемая абелева подгруппа конечного индекса в G. Поскольку группа автоморфизмов конечной группы конечна, то $|G : C_G(A_2)| < \infty$ и $B = L \bigcap C_G(A_2)$ — подгруппа конечного индекса из G, содержащаяся в $Z(G)$. Так как подгруппа $H = A_2 \leftthreetimes K$, где K — дополнение к B в L, дополняет B в G, причем $H \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, то $G = H \times B$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Локально конечная неабелева группа G с дополняемыми неабелевыми подгруппами не более чем трехступенно разрешима. В частности, если G нильпотентна, то $G'' = 1$.*

Доказательство. Поскольку длина ряда коммутантов локально конечной локально разрешимой группы совпадает с максимальной длиной ряда коммутантов ее конечных подгрупп [21], а у конечных неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами $G''' = 1$ (см. [19]), то и второй коммутант G'' произвольной локально конечной неабелевой группы G с дополняемыми неабелевыми подгруппами абелев. Осталось заметить, что у конечных нильпотентных групп такого рода $G'' = 1$.

Лемма доказана.

3. Нильпотентные группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами.

Лемма 4. *Неабелева нильпотентная группа G с дополняемыми неабелевыми подгруппами локально конечна.*

Доказательство. Пусть G — неабелева нильпотентная группа, в которой дополняемы все неабелевы подгруппы.

1. Покажем, что класс нильпотентности группы G равен 2. Действительно, если

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = G$$

— верхний центральный ряд группы G, причем $n > 2$, то A_2 — неабелев нормальный делитель группы G и потому $G = A_2 \leftthreetimes L$, где $L \cong G/A_2$ — абелева вполне факторизуемая группа. Фактор-группа G/A_1 будет группой класса нильпотентности 2, причем подгруппа

A_2/A_1 содержится в центре группы G/A_1 и дополняема в ней. Таким образом, группа G/A_1 абелева. Из полученного противоречия следует, что G — группа класса нильпотентности 2 и $G' \subseteq Z(G)$.

2. Покажем, что G содержит неединичные элементы конечного порядка. Действительно, предположим, что G — группа без кручения. Тогда она является R-группой [22, с. 413]. Если x и y — неперестановочные элементы группы G, то у подгруппы $H = \langle x, y \rangle$, порожденной элементами x и y, класс нильпотентности равен 2. Если $z = [x, y]$, то, очевидно, $\langle z \rangle = H'$. Так как центр $Z_1(G)$ группы G изолирован в G [22, с. 412], элементы x и z независимы. Если $y^{\beta} = x^{\alpha} z^{\gamma}$, где α, β и γ — целые числа, то, трансформируя это равенство элементом y и выполняя необходимые сокращения, получаем $z^{\alpha} = 1$, поэтому $\alpha = 0$. Значит, и элемент у не зависит от элементов x и z. Но тогда подгруппа $S = [\langle x^n \rangle \times \langle z^n \rangle]\langle y \rangle$, где n — некоторое натуральное число, является собственной неабелевой подгруппой конечного индекса из H. Значит, подгруппа S дополняема в H, поэтому H, а значит и G, содержат конечную неединичную подгруппу. Таким образом, G не может быть группой без кручения.

3. Предположим теперь, что группа G содержит элементы бесконечного порядка.

Покажем, что коммутант G' содержит неединичные элементы конечного порядка. Действительно, предположим, что G' — абелева группа без кручения. Пусть, далее, x, y — неперестановочные элементы группы G. Если $[x, y] = z$, то $\langle z \rangle = \langle x, y \rangle'$, и так как $[x^n, y] = z^n \neq 1$ для любого целого n, то x и y — элементы бесконечного порядка. Но тогда все элементы конечного порядка группы G содержатся в ее центре $Z(G)$ и потому составляют нормальную подгруппу F — периодическую часть группы G. Тогда в силу соотношения $F \cap G' = 1$ G/F — неабелева группа без кручения, что невозможно, как показано в пункте 2 доказательства данной леммы. Значит, коммутант G' содержит неединичные элементы конечного порядка.

Если периодическая часть F_1 коммутанта G' отлична от единицы и от G', то в группе G/F_1 коммутант G'/F_1 является абелевой группой без кручения, что противоречит доказанному выше. Значит, G' — периодическая группа. Тогда, очевидно, элементы конечного порядка группы G составляют подгруппу — периодическую часть F группы G, нормальную в G. Поскольку по предположению G содержит элементы бесконечного порядка, то F — абелева группа. Следовательно, в группе G существует такой элемент a бесконечного порядка, что $[F, a] \neq 1$. Тогда в силу включения $G' \subset F$ подгруппа $F\langle a \rangle$ нормальна в G и потому $G/F\langle a \rangle$ — абелева вполне факторизуемая группа. Значит, $G = F\langle a \rangle$. Но подгруппы $F\langle a^2 \rangle$ и $F\langle a^3 \rangle$ недополняемы в группе G и, значит, абелевы. Тогда элементы a^2 и a^3, а значит и $a = a^3 \cdot a^{-2}$, принадлежат $Z(G)$. Противоречие. Значит, G — периодическая группа и потому локально конечна.

Лемма доказана.

Замечание. Другое доказательство леммы 4 следует из результатов [23].

Теорема 1. *В неабелевой нильпотентной группе* G *тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда* $G = H \times B$ *и* B *— абелева вполне факторизуемая, а* H *— неабелева примарная* (*по числу* p) *группа одного из следующих типов*:

1) $H = A_1\langle b\rangle$, *где* A_1 *— нормальная элементарная абелева подгруппа и* $b^p \in Z(G)$;

2) H *— конечная p-группа Миллера – Морено*;

3) H *— прямое произведение с объединенным центром двух групп диэдра порядка* 8;

4) H *— прямое произведение с объединенным центром двух неабелевых групп порядка* p^3 *и экспоненты* p ;

5) $H = ((\langle a_0\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle) \leftthreetimes b_1) \leftthreetimes \langle b_2\rangle$, *где* $a_i^p = b_j^p = 1$, $[b_1, b_2] = a_0$, $[a_3, b_j] = a_j$, $[a_i, b_j] = 1$, *если* $i < 3$ $(i = 0,1,2,3;\ j = 1,2)$;

6) $H = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, *где* $a^4 = b^2 = c^2 = 1$, $[b,c] = a^2$, $[a,c] = 1$;

7) $H = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, *где* $a^4 = b^4 = c^2 = 1$, $[b,c] = b^2$, $[a,c] = a^2$;

8) $H = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle d\rangle$, *где* $a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$, $[a,d] = a^2$, $[b,d] = c$, $[c,d] = 1$;

9) $H = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $a^8 = b^2 = 1$, $[a,b] = a^{-2}$;

10) $H = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $a_1^9 = a_2^3 = b^3 = 1$, $[a_1,b] = a_2$, $[a_2,b] = a_1^6$;

11) $H = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes (\langle d\rangle \times \langle f\rangle)$, *где* $a_1^p = a_2^p = b^p = c^p = d^p = f^p = 1$, $[b,d] = a_1$, $[c,d] = a_2$, $[b,f] = 1$, $[c,f] = a_1$, $[a_i,f] = [a_i,d] = 1$, $i = 1,2$, $p > 2$;

12) $H = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes (\langle d\rangle \times \langle f\rangle)$, *где* $a_1^p = a_2^p = b^p = c^p = d^p = f^p = 1$, $[b,d] = a_1$, $[c,d] = a_2$, $[b,f] = a_2$, $[c,f] = a_1^m a_2^n$, $m \neq 0 \pmod p$, $n \neq 0 \pmod p$, $[a_i,f] = [a_i,d] = 1$, $i = 1,2$;

13) $H = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes (\langle b_1\rangle \times \langle b\rangle)$, *где* $a_1^p = a_2^p = a^p = b_1^p = b^p = 1$, $[a,b] = a_2$, $[a_2,b] = a_1$, $[a,b_1] = a_1$, $[a_1,b_1] = [a_2,b_1] = [a_1,b] = 1$, $p > 2$;

14) $H = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle) \leftthreetimes (\langle b_1\rangle \times \langle b\rangle)$, *где* $a_1^9 = a_2^3 = b_1^3 = b^3 = 1$, $[a_1,b] = a_2$, $[a_2,b] = a_1^6$, $[a_1,b_1] = a_1^3$, $[a_2,b_1] = 1$;

15) $H = ((\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle) \leftthreetimes \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $a_1^p = a_2^p = a_3^p = a^p = b^p = 1$, $[a_i,a] = [a_i,b] = 1$, $i = 1,2$, $[a_3,a] = a_1$, $[a_3,b] = a_2$, $[a,b] = a_3$.

Доказательство. *Необходимость*. В силу лемм 3 и 4 коммутант G' произвольной неабелевой нильпотентной группы G с дополняемыми неабелевыми подгруппами абелев.

Поскольку коммутаторы в группе G перестановочны, в случае непримарности коммутанта G' существуют коммутаторы $x = [a,b]$ и $y = [c,d]$ примарных порядков по разным простым числам p и q . Но тогда $\langle a,b,c,d\rangle$ — конечная неабелева нильпотентная группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами и непримарным коммутантом. Так как последнее невозможно, из полученного противоречия следует примарность коммутанта G' .

Пусть G' — p-группа. Тогда силовская p-подгруппа P группы G является неабелевым прямым множителем группы G, а дополнение P в G — абелева вполне факторизуемая группа. Итак, не теряя общности, можем считать, что $G = P$. Если коммутант G' группы G конечен, то из леммы 2 и описания в работах автора [16 – 19] конечных неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами следует, что $G = H \times B$ и B — абелева вполне факторизуемая, а H — неабелева примарная (по числу p) группа одного из типов теоремы 1.

Покажем, что если коммутант G' группы G бесконечен, то G — группа типа 1 теоремы 1. Поскольку каждый элемент коммутанта является произведением конечного числа коммутаторов (если точнее, то их степеней), в G можно выделить конечную подгруппу T с $|T'| \geq p^4$. Если K — нормальный делитель группы G, совпадающий с пересечением всех подгрупп, сопряженных с дополнением подгруппы T в G, то $TK/K \simeq T$. При неабелевой группе K фактор-группа TK/K вполне факторизуема и, значит, элементарная абелева. Это противоречит неабелевости группы T, следовательно, K — абелев нормальный делитель конечного индекса в группе G. Заметим, что $K \not\subset Z(G)$, иначе G' — конечная группа, что противоречит условию.

Покажем, что $G'K$ — абелева группа. Действительно, если $G'K$ — неабелева группа и B — ее дополнение в группе G, то $G = G'(KB)$ и вследствие нильпотентности группы G $G = K \leftthreetimes B$. Поскольку подгруппа B, очевидно, абелева, то $G' \subseteq K$. Последнее невозможно, так как $1 \neq T' \not\subset K$. Следовательно, $G'K$ — абелева группа. Пусть $G'K = D$ и U — такая конечная подгруппа группы G, что $G = DU$. Не теряя общности можно считать, что $U \supset T$. Но тогда U — группа типа 1 и, значит, $U = N\langle x \rangle$, где N — нормальная в U элементарная абелева подгруппа и $x^p \in Z(U)$. Тогда $G = (G'K)(N\langle x \rangle) = G'(K(N\langle x \rangle))$. Отсюда вследствие нильпотентности группы G $G = K(N\langle x \rangle)$. Предположим, что $[K, N] \neq 1$ и $a \in N$, $|a| = p$, $[K, a] \neq 1$. Тогда $a \notin K$. Подгруппа $K\langle a \rangle$ дополняема в группе G. Если I — дополнение $K\langle a \rangle$ в G, то KI дополняет $\langle a \rangle$ в группе G. Следовательно, $\langle a \rangle$ дополняема в группе U и поэтому вследствие нильпотентности группы U $a \notin U'$. Значит, $[K, U'] = 1$. Тогда KU' — абелев нормальный делитель группы G, содержащий ее коммутант G'. Подгруппа U', очевидно, нормальна в группе G. Не теряя общности можно считать, что $K \cap U' = 1$. Действительно, если $K \cap U' = K_1 \neq 1$, то вместо G достаточно рассмотреть фактор-группу G/K_1. Итак, $a \notin KU'$, $K \cap (U'\langle a \rangle) = 1$ и подгруппа $KU'\langle a \rangle$ — неабелев нормальный делитель группы G. Если R — дополнение подгруппы $KU'\langle a \rangle$ в группе G, то R — элементарная абелева группа и погруппа KR дополняет подгруппу $U'\langle a \rangle$ в группе G. Если $J = (KR) \cap U$, то $U = \langle U', a, J \rangle = (U' \times \langle a \rangle) \leftthreetimes J$ и $G = ((K \times U') \leftthreetimes \langle a \rangle) \leftthreetimes J$. Пусть $A = N\langle x^p \rangle$ — максимальная абелева подгруппа (индекса p) группы U. Поскольку $U'\langle a \rangle \subset A$, то $J \not\subset A$, но $J = J_1 \times \langle y \rangle$, где $J_1 \subseteq A$, а $y^p = 1$. Значит, $U = A\langle y \rangle$,

$A = U' \times \langle a \rangle \times J_1$, $y^p = 1$ и $Z(U) \subset A$. Поскольку $|U'| \geq p^4$, то в силу леммы 8 [16] отсюда следует, что $|A : Z(U)| \geq p^2$. Подгруппа $\overline{M} = UK/K$ в фактор-группе G/K в силу соотношения $U \bigcap K = 1$ изоморфна группе U. Пусть $\overline{L} = Z(\bar{M})\langle \overline{a} \rangle$, где $\langle \overline{a} \rangle$ — образ подгруппы $\langle a \rangle$ в фактор-группе G/K. Так как прообраз L подгруппы $\overline{L}$ в G неабелев, он дополняем в G, а подгруппа $\overline{L}$ дополняема в фактор-группе G/K. Тем самым мы показали, что подгруппа $\langle Z(U), a \rangle$ дополняема в U. Предположим, что $a \in Z(U)$. Тогда $U = U_1 \times \langle a \rangle$ и $K\langle a \rangle$ — неабелев нормальный делитель группы G и фактор-группа $G/K\langle a \rangle$ элементарная абелева. Из полученного противоречия следует, что $a \notin Z(U)$. Если S — дополнение подгруппы $Z(U) \times \langle a \rangle$ в группе U, то $S \not\subset A$, и поэтому $U = AS$. Но тогда $S \not\subset A$. Поскольку, $|U| < |A| \cdot |S|$, то $A \bigcap S = W \neq 1$. Если S — абелева группа, то $W \subseteq Z(U)$, что невозможно. Если S — неабелева группа, то $S' \subseteq A$ и $1 \neq S' \bigcap Z(S) \subset Z(U)$, что снова невозможно. Из полученного противоречия следует, что KN — абелева группа. Нетрудно убедиться, что G — группа типа 1.

Доказательство *достаточности* несложно, и мы его опускаем. Отметим только, что дополняемость неабелевых подгрупп в группе типа 1 доказывается аналогично доказательству леммы 10 [16].

Теорема доказана.

4. Бесконечные ненильпотентные группы, содержащие, по крайней мере, одну неабелеву силовскую подгруппу, в которых дополняемы все неабелевы подгруппы. Строение локально конечных групп такого рода описывает следующая теорема.

Теорема 2. *В локально конечной ненильпотентной группе* G, *содержащей, по крайней мере, одну неабелеву силовскую подгруппу, тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда* $G = H \times B$, *где* B *— вполне факторизуемая абелева группа, а* H *— группа одного из типов*:

1) H *— конечная ненильпотентная группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами, содержащая, по крайней мере, одну неабелеву силовскую подгруппу;*

2) $H = K\langle c \rangle$, K *— абелева нормальная вполне факторизуемая группа,* $|c| = q^m$, $c^q \in \in Z(H)$, $|K : C_K(\langle c \rangle)| = \infty$, q *— простое число,* m *— натуральное и элемент* c *действует нетождественно на силовской* q*-подгруппе группы* K;

3) $H = L \leftthreetimes P$, L *разлагается в прямое произведение нормальных в* H *подгрупп простых порядков* L_α, *а* P *либо неабелева группа порядка* p^3 *и экспоненты* p, *либо группа диэдра порядка* 8, *в обоих случаях* $1 \neq C_P(L) \neq P$ *и* $\pi(P) \notin \pi(L)$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются следующие леммы.

Лемма 5. *Если в бесконечной неабелевой локально вполне факторизуемой группе* G *дополняемы все неабелевы подгруппы, то она вполне факторизуема.*

Доказательство. Из двуступенной разрешимости вполне факторизуемых групп [4] в силу результатов работы С. Н. Черникова [21] следует, что группа G двуступенно разрешима (т. е. коммутант ее абелев), а также что все ее силовские подгруппы являются элементарными абелевыми.

Пусть D — подгруппа Миллера – Морено из G. Вследствие выбора G порядок подгруппы D равен pq, где p и q — различные простые числа. Пусть порядок коммутанта D' равен p. Предположим сначала, что G' — p-группа и P — силовская p-подгруппа группы G, содержащая G'. Тогда подгруппа P нормальна в G и G/P — абелева вполне факторизуемая группа.

Покажем, что подгруппа P дополняема в G. Пусть x — элемент простого порядка q из D. Тогда подгруппа $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ неабелева и, значит, дополняема в G. Пусть $G = (P \leftthreetimes \langle x \rangle) K$, $(P \leftthreetimes \langle x \rangle) \cap K = 1$. Тогда, очевидно, $(P \leftthreetimes K) \cdot \langle x \rangle = G$, $(P \leftthreetimes K) \cap \langle x \rangle = 1$. Поскольку индекс q подгруппы $P \leftthreetimes K$ взаимно прост с порядками элементов подгруппы P, то по теореме Диксона [24, 25] получаем, что подгруппа P дополняема в G: $G = P \leftthreetimes H$, где H — абелева вполне факторизуемая группа.

Не теряя общности группу G можно считать прямо неразложимой. Это значит, что центр $Z(G) = 1$, а в силу леммы 2 коммутант G' бесконечен. Докажем теперь, что подгруппа P разложима в прямое произведение подгрупп порядка p, нормальных в группе G. Если U — подгруппа простого порядка из P, то U дополняема в группе G. Пусть $G = U \cdot W$ и $U \cap W = 1$. Тогда пересечение $W \cap P = R$ нормально в группе W, а значит, и в группе $G = PW$.

Предложение 1. *Если* $R \lhd G$ *и* $R \subset P$, *то в подгруппе* H *есть такой элемент* y *порядка* $q \neq p$, *что* $R \cdot \langle y \rangle$ *— неабелева группа.*

Действительно, иначе $R \cdot H$ была бы абелевой группой, $R \subset Z(H)$ и, значит, $R = 1$, что противоречит бесконечности коммутанта G'.

Пусть y — произвольный элемент из подгруппы H порядка $q \neq p$ такой, что $R \cdot \langle y \rangle$ — неабелева группа. Тогда подгруппа $R \cdot \langle y \rangle$ дополняема в группе G. Если

$$G = (R \leftthreetimes \langle y \rangle) \cdot S \quad \text{и} \quad (R \leftthreetimes \langle y \rangle) \cap S = 1,$$

то

$$G = (R \leftthreetimes S) \cdot \langle y \rangle \quad \text{и} \quad (R \leftthreetimes S) \cap \langle y \rangle = 1. \tag{1}$$

В силу той же теоремы Диксона из соотношений (1) следует, что подгруппа R дополняема в группе G. Пусть T — ее дополнение в группе G. Поскольку подгруппа R имеет индекс p в P, пересечение $R_1 = P \cap T$ является подгруппой порядка p, нормальной в T, а значит, и в G. Повторив рассуждения из [14, с. 127], покажем, что группа G вполне факторизуема.

Предположим, что коммутант G' группы G непримарен. Пусть P — силовская p-подгруппа коммутанта G' по наименьшему простому числу $p \in \pi(G')$, а x — такой элемент из G, что $[P, x] \neq 1$. Тогда если M — подгруппа Миллера – Морено из группы $P\langle x \rangle$, то вследствие локальной вполне факторизуемости группы G можно считать, что $|M| = pq$, где $|x| = q$ — простое число, делящее число $p-1$ и, значит, меньшее p. Это значит, что силовских q-подгрупп в коммутанте G' нет. Подгруппа $G'\langle x\rangle$ неабелева и, значит, дополняема в группе G. Пусть

$$G = G'\langle x\rangle \cdot L, \qquad G'\langle x\rangle \bigcap L = 1.$$

Тогда $G = (G' \leftthreetimes L)\langle x\rangle$, $(G' \leftthreetimes L)\bigcap\langle x\rangle = 1$. Отсюда по теореме Диксона следует дополняемость коммутанта G' в группе G. Пусть $G = G' \leftthreetimes N$. Если коммутант G' группы G непримарен, то все его силовские подгруппы нормальны в G. Предположим, что V — любая силовская подгруппа коммутанта G' (или сам коммутант G', если $\pi(G)$ — простое число). Тогда по доказанному выше группа $V \leftthreetimes N$ вполне факторизуема и, значит, V разлагается в прямое произведение подгрупп простых порядков, нормальных в $V \leftthreetimes N$, а значит, и в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Локально конечная ненильпотентная прямо неразложимая не вполне факторизуемая группа G с бесконечным коммутантом и дополняемыми неабелевыми подгруппами содержит бесконечную максимальную абелеву нормальную подгруппу конечного индекса.*

Доказательство. Действительно, в силу леммы 5 G содержит конечную неабелеву не вполне факторизуемую подгруппу T. Если F — дополнение подгруппы T в G, то пусть X — пересечение всех подгрупп, сопряженных в G с F. Подгруппа X нормальна в G. Предположим, что X — неабелева группа. Тогда фактор-группа G/X вполне факторизуема, что противоречит соотношению $X \bigcap T = 1$. Значит, X — абелев нормальный делитель конечного индекса группы G. Не теряя общности можно считать, что X — максимальный абелев нормальный делитель конечного индекса группы G.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть H — локально конечная ненильпотентная прямо неразложимая не вполне факторизуемая группа с бесконечным коммутантом и дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если H содержит, по крайней мере, одну неабелеву силовскую подгруппу, то H — группа типа* 2 *или* 3 *из теоремы* 2.

Доказательство. 1. Предположим, что группа H содержит неабелевы силовские подгруппы P и Q по различным простым числам p и q. Тогда если P_1 и Q_1 — конечные подгруппы Миллера – Морено из этих силовских подгрупп, то у конечной неабелевой подгруппы $R = \langle P_1, Q_1\rangle$ дополняемы все неабелевы подгруппы, причем R содержит неабелевы силовские подгруппы по различным простым числам p и q. Получили противоречие с описанием групп такого рода [19]. Итак, группа H содержит неабелевы силовские подгруппы лишь по одному простому числу, например по p. Пусть P — такая силовская подгруппа.

2. Покажем, что

$$H = L \leftthreetimes P, \tag{2}$$

где L — вполне факторизуемая абелева p'-группа.

Предположим, что группа H содержит конечную недисперсивную подгруппу H_1. Поскольку коммутант H' бесконечен, существует коммутатор $k = [k_1, k_2] \notin (H_1)'$. Тогда конечная подгруппа $\langle k_1, k_2, H_1 \rangle$ тоже недисперсивна, а порядок коммутанта больше, чем $|(H_1)'|$, что противоречит [19]. Значит, группа H локально дисперсивна.

Пусть P_1 — конечная неабелева подгруппа из P, а H_2 — конечная неабелева подгруппа, у которой порядок коммутанта является произведением не менее четырех простых чисел, одинаковых или различных. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 6, находим такую абелевую нормальную подгруппу K_1 конечного индекса в H, что $K_1 \cap H_3 = 1$, где $H_3 = \langle P_1, H_2 \rangle$. Рассмотрим фактор-группу H/K_1. Она либо недисперсивна, либо ее неабелева силовская подгруппа нормальна в H/K_1, либо нормально дополняема в ней [19]. Первые два случая невозможны в силу теоремы [19] и выбора группы H_3. Значит, в фактор-группе H/K_1 неабелева силовская подгруппа нормально дополняема. Такое же строение будут иметь и конечные ненильпотентные подгруппы группы H, содержащие неабелеву силовскую подгруппу.

В силу леммы 6 группа H содержит бесконечную максимальную абелеву нормальную подгруппу K конечного индекса в H. Поскольку H/K — вполне факторизуемая группа, то $P' \subseteq P \cap K \neq 1$. С другой стороны, так как K — абелева, а P — неабелева группа, то $P \not\subset K$.

Покажем, что $[H:K] = p^{\alpha}$, $\alpha \in N$. Действительно, пусть $q \in \pi([H:K])$, $q \neq p$. Если D — такая конечная подгруппа из H, что $H = KD$, то, как отмечалось выше, $D = D_{p'} \leftthreetimes D_p$. Предположим, что $x \in K$, $[x, D_{p'}] \neq 1$. Пусть $T = \langle x, D, P_1 \rangle$. Тогда $T = T_{p'} \leftthreetimes T_p$, где $T_{p'}$ — вполне факторизуемая абелева, а T_p — неабелева p-группа. Если x — p'-элемент, то x и $D_{p'}$ содержатся в абелевой группе $T_{p'}$ и, значит, $[x, D_{p'}]=1$. Если x — p-элемент, то $x \in (K \cap T) = T_1 \lhd T$. Поскольку T_1 — абелева группа, силовская p-подгруппа I из T_1 нормальна в T. Значит, $[I, T_{p'}] = 1$, $[I, D_{p'}] = 1$. Следовательно, $D_{p'} \subseteq K$, $[H:K] = p^{\alpha}$, $\alpha \in N$.

Так как H/K — вполне факторизуемая примарная группа, H/K — элементарная абелева группа. Значит, $H' \subseteq K$, H' — абелева группа. Поскольку силовские подгруппы конечных ненильпотентных подгрупп группы H по всем числам $q \neq p$ элементарные абелевы, то нетрудно убедиться, что у самой группы H силовские подгруппы по всем числам $q \neq p$ элементарные абелевы.

Силовская подгруппа группы H по любому числу $q \neq p$ содержится в K и вследствие абелевости K единственна и в K, и в H. Значит, силовские подгруппы по всем числам $q \neq p$ группы H нормальны в H. Обозначим их произведение через L. Подгруппа P неабелева и, значит, дополняема в H. Пусть $H = P \cdot U$, $P \cap U = 1$. Так как $U \cdot L = L$, то (2) доказано.

Покажем, что $L \cap Z(H) = 1$. При доказательстве этого утверждения L можно считать силовской q-подгруппой группы H. Пусть $1 \neq Z_1 = L \bigcap Z(H)$. Тогда $|H : L| = p^{\delta}$, $\pi(Z_1) = \{q\}$. Подгруппа Z_1 дополняема в L, $p \neq q$. В силу теоремы Диксона [24, 25] подгруппа Z_1 дополняема в группе H: $H = Z_1 \cdot H_2$, $Z_1 \bigcap H_2 = 1$. Поскольку $Z_1 \subset Z(H)$, то Z_1 — прямой множитель группы H, а так как группа H предполагалась прямо неразложимой, то $L \bigcap Z(H) = 1$.

Предположим, что $P = P_2 \times P_3$, где P_2 — неабелева группа, а P_3 — абелева группа. Если $[L, P_3] \neq 1$, то LP_3 — неабелев нормальный делитель группы H и $H/LP_3 \simeq P_2$ — вполне факторизуемая абелева группа. Из полученного противоречия следует, что $[L, P_3] = 1$ и P_3 — прямой множитель группы H. Так как группа H предполагалась прямо неразложимой, то и группа P прямо неразложима, т. е. $P_3 = 1$.

Покажем, что $[L, Z(P)] = 1$. Действительно, иначе подгруппа $LZ(P)$ дополняема в группе H и, значит, подгруппа $Z(P)$ дополняема в группе H, а значит, и в P. Если $P = Z(P) \rightthreetimes Y$, то $P = Z(P) \times Y$, т. е. подгруппа P прямо разложима, что невозможно. Значит, $[L, Z(P)] = 1$.

Поскольку у конечных ненильпотентных групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами, содержащих неабелеву силовскую подгруппу, централизатор подгруппы Фиттинга абелев (см. теорему в [19]), нетрудно убедиться, что $C_P(L)$ — абелева группа. Подгруппа $C_P(L)$, а значит и $J = L \times C_P(L)$, нормальна в H. Пусть $B = KJ$. Поскольку обе подгруппы (K и J) абелевы и нормальны в группе H, то $B' \subseteq K \bigcap J$ и $B' \subseteq Z(B)$. Так как B, очевидно, A-группа, то $Z(B) = 1$ и, значит, $B' = 1$, т. е. B — абелева группа, $J \subseteq K$. Тогда $K = L \times K_p$, где $K_p = C_P(L)$ — абелева нормальная подгруппа конечного индекса группы P.

Предположим, что P — бесконечная группа. Отсюда в силу леммы 2 и доказанной выше прямой неразложимости группы P следует, что ее коммутант P' бесконечен. Тогда в силу теоремы 1 $P = S\langle b \rangle$, где S — нормальная элементарная абелева подгруппа и $b^p \in Z(P)$. Пусть $[L, S] \neq 1$. Тогда группа P содержит абелевы нормальные подгруппы K_p и $S\langle b^p \rangle$ индекса p^{α}, $\alpha \in N$, и p соответственно, причем $K_p \neq S\langle b^p \rangle$. Следовательно, $P = K_p \bigcap (S\langle b^p \rangle)$ и подгруппа конечного индекса $K_p \bigcap (S\langle b^p \rangle)$ группы P содержится в ее центре. Отсюда следует, что коммутант P' группы P конечен. Так как выше было показано обратное, то из полученного противоречия получаем, что $[L, S] = 1$, а H — группа типа 2 из теоремы 2.

Пусть теперь группа P конечная. Покажем, что группа L разлагается в прямое произведение минимальных нормальных делителей группы H.

Предложение 2. *Если* $X \lhd H$, $X \subset L$, *то* $(XP)' = X \times P'$.

Доказательство. Если $[X, P] = 1$, то $X \subseteq Z(H) \bigcap L$, что, как показано выше, невозможно. Пусть $[X, P] \neq 1$. Ясно, что $(XP)' \subseteq X \times P'$. Предположим, что $(XP)' \neq$

$\neq X \times P'$. Если $x_1 \in [X, P]$, $x_2 \in X$, $x_2 \notin (XP)'$, то в центре конечной группы $\langle x_1, x_2, P \rangle$ содержится подгруппа Z_1 из X. Эта подгруппа Z_1 содержится и в пересечении центра группы H с L. По доказанному ранее последнее тривиально. Значит, $(XP)' = X \times P'$.

Следствие. *В частности,* $(LP)' = L \times P'$.

Пусть X_α — произвольное конечное множество элементов из L. Подгруппа $U_\alpha = \langle X_\alpha, P \rangle$ конечна, $U_\alpha \cap L = C_\alpha \lhd H$ и, значит, в силу предложения 2 $C_\alpha = (U_\alpha)'$.

Рассмотрим подгруппу $B = \bigcup_\alpha C_\alpha$, порожденную всеми подгруппами C_α. Она, очевидно, нормальна в H и содержится в L. Поскольку любой элемент из L содержится, по крайней мере, в одном множестве X_α, то $L \subseteq B$. Значит, $L = \bigcup_\alpha C_\alpha$. Отсюда с помощью трансфинитной индукции и предложения 2 нетрудно получить разложение

$$L = \prod_\alpha C_\alpha \qquad (3)$$

подгруппы L в прямое произведение конечных минимальных нормальных делителей группы H.

Пусть теперь L_1 — один из множителей этого разложения подгруппы L.

Возможны следующие случаи.

1. $|P/C_P(L)| = p$. Применим к группе L_1P лемму 7 [19]. Предположим сначала, что L_1P — группа типа 1 указанной леммы. Тогда $L_1P = B\langle a \rangle$, где B — абелева нормальная вполне факторизуемая подгруппа, $|a| = p^\alpha$ и $a^p \in Z(L_1P)$. Если $[L, B] = 1$, то H — группа типа 3 теоремы 2. Пусть $[L, B] \neq 1$. Тогда $P = B \cdot K_p$ и подгруппа $K_p \cap B$ индекса p^2 группы P содержится в ее центре. Отсюда следует, что коммутант P' группы P имеет порядок p. Не теряя общности можно считать, что P' — подгруппа $\langle x \rangle$ порядка p из B. Пусть $\langle y \rangle$ — такая подгруппа того же порядка из B, что $[L, y] \neq 1$. Тогда $H = LP = (L\langle x, y \rangle) \leftthreetimes J$, где J — элементарная абелева группа. Поскольку P — неабелева группа, для некоторой подгруппы $\langle z \rangle$ порядка p из J произведение $M_1 = (\langle x \rangle \times \langle y \rangle) \leftthreetimes \langle z \rangle$ будет группой Миллера – Морено порядка p^3 из P. Так как $Z(P) \subset B$ и, значит, $Z(P)$ — элементарная абелева группа, из прямой неразложимости группы P и равенства $P = M_1 \cdot Z(P)$ следует, что $P = M_1$.

2. $|P/C_P(L)| \geq p^2$. Тогда L_1P — группа типа 2 из леммы 7 или типа 1 или 2 из леммы 8 (см. [19]). Если C_β — любой из множителей разложения (3), то $C_\beta P$ — конечная неабелева группа с неабелевой силовской подгруппой и дополняемыми неабелевыми подгруппами. Применяя ко всем таким подгруппам теорему из [19], получаем, что LP — группа типа 3 из теоремы 2.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. *Необходимость* следует из лемм 5 и 7. Докажем *достаточность*. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы 2. Так как $G = H \times B$, где B — вполне факторизуемая абелева группа, то достаточно доказать дополняемость неабелевых подгрупп из группы H. Действительно, если F — подгруппа группы G, то

$$FB = F\big((F \cap B)K\big) = FK = F \times K,$$

где K — дополнение подгруппы $F \cap B$ в B. С другой стороны, по свойству прямого произведения (см. [25, с. 104]) $FB = (H \cap FB) \times B$. Следовательно, если подгруппа $H \cap FB$ дополняема в H, то FB, а значит и F, дополняема в группе G. Осталось заметить, что группы $H \cap FB$ и F одновременно абелевы или неабелевы.

Случай конечной неабелевой группы H рассмотрен в [19]. Дополняемость неабелевых подгрупп в группе H типа 2 доказывается аналогично лемме 10 [16].

Пусть H — группа типа 3 и R — ее неабелева подгруппа. Тогда $RL = L \rtimes (RL \cap P)$ по лемме Черникова (лемма 3.7 [9]). Пусть $D = RL \cap P$. Единственной недополняемой подгруппой в группе P является ее коммутант P'. Так как $C_P(L) \lhd P$, $1 \neq C_P(L) \neq P$, то $P' \subseteq C_P(L)$. Следовательно, подгруппа RL абелева в случае $D = P'$ и этот случай невозможен. Таким образом, подгруппа D дополняема в группе P. Пусть $P = D \cdot N$, $D \cap N = 1$.

Тогда $H = LP = L(DN) = (LD)N = (LR)N$, $LR \cap N = 1$. Но

$$RL = \big(R(R \cap L)\big)L = R\big((R \cap L)L\big) = R\big((R \cap L)T\big) = \big(R(R \cap L)\big)T = RT = T \rtimes R,$$

где T — дополнение к подгруппе $R \cap L$ в L, составленное из множителей некоторого разложения подгруппы L в прямое произведение нормальных в H подгрупп простых порядков. Отсюда следует, что подгруппа TN дополняет подгруппу R в группе H. Достаточность доказана.

1. *Hall Ph.* Complemented groups // J. London Math. Soc. – 1937. – **12**. – P. 201 – 204.
2. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. – **92**, № 5. – С. 877 – 880.
3. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**. – С. 273 – 292.
4. *Черникова Н. В.* К основной теореме о вполне факторизуемых группах // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 49 – 58.
5. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб. – 1954. – **35**. – С. 93 – 128.
6. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**, вып. 2. – С. 15 – 31.
7. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193 – 209.
8. *Hall Ph.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. – 1937. – **12**. – P. 198 – 200.
9. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
10. *Зайцев Д. И.* О прямых разложениях бесконечных абелевых групп с операторами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 3. – С. 303 – 309.
11. *Сысак Я. П.* Произведения бесконечных групп. – Киев, 1982. – 36 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 82. 53).
12. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
13. *Зуб О. Н.* Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 134 – 159.

14. *Алексеева Э. С.* Бесконечные непримарно факторизуемые группы // Некоторые вопросы теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 123 – 140.
15. *Сучков Н. М.* О некоторых линейных группах с дополняемыми подгруппами // Алгебра и логика. – 1977. – **16**, № 5. – С. 603 – 620.
16. *Барышовец П. П.* Конечные неабелевы 2-группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Теоретико-групповые исследования. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 34 – 50.
17. *Барышовец П. П.* О конечных неабелевых p-группах с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Строение групп и свойства их подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 39 – 62.
18. *Барышовец П. П.* О конечных неабелевых группах с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 733 – 737.
19. *Барышовец П. П.* Конечные ненильпотентные группы, в которых все неабелевы подгруппы дополняемы // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 2. – С. 147 – 153.
20. *Taunt D.* On A-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45**, № 1. – P. 24 – 42.
21. *Черников С. Н.* Бесконечные локально разрешимые группы // Мат. сб. – 1940. – **49**, № 7. – С. 35 – 64.
22. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
23. *Мищенко Б. И.* Локально ступенчатые группы с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 1098 – 1100.
24. *Dixon J.* Complements of normal subgroups in infinite groups // Proc. London Math. Soc. – 1967. – **17**. – P. 431 – 446.
25. *Dixon J.* Corrigenda. Complements of normal subgroups in infinite groups // Proc. London Math. Soc. – 1968. – **18**. – P. 768.

Получено 21.11.12