УДК 517.764

К. М. Зубрилин (Феодос. политехн. ин-т Нац. ун-та кораблестроения им. адм. Макарова)

О СОХРАНЕНИИ ПОРЯДКА УПЛОЩЕНИЯ ИНДУЦИРОВАННЫМ ДИФФЕОМОРФИЗМОМ

We consider the structure of a smooth curve from the viewpoint of the concept of flattening and establish conditions under which the r-geodesic curve of the basis manifold is the projection of the r-geodesic curve in a tangential bundle of the second order. The necessary and sufficient condition under which the 2-geodesic diffeomorphism of affine-connected spaces induces a 2-geodesic diffeomorphism of tangential bundles of the second order is established.

Розглядається будова гладкої кривої з точки зору поняття сплощення. Наведено умови, за яких r-геодезична крива базисного многовиду є проекцією r-геодезичної кривої в дотичному розшаруванні другого порядку. Встановлено необхідну і достатню умову, при якій 2-геодезичний дифеоморфізм афінно зв'язних просторів індукує 2-геодезичний дифеоморфізм дотичних розшарувань другого порядку.

Введение. Изучение индуцированных отображений касательных расслоений восходит к работам К. Яно и Ш. Ишихара [1, 2]. При исследовании отображений касательных расслоений, индуцированных геодезическими, ими установлено, что геодезический диффеоморфизм аффинно связных пространств индуцирует геодезический диффеоморфизм касательных расслоений тогда и только тогда, когда базисное отображение будет аффинным. В целом геометрическая природа индуцированного отображения ими не установлена.

В работах [3, 4] С. Г. Лейко рассматривал диффеоморфизмы, индуцированные геодезическими диффеоморфизмами, в рамках теории уплощенных (p-геодезических) отображений. При этом касательные расслоения рассматривались как аффинно связные пространства относительно связности полного лифта и II-лифта. Случай связности горизонтального лифта рассмотрен в работе [5].

С другой стороны, как естественное обобщение случая геодезических отображений возникает задача поиска условий, при которых r-геодезический диффеоморфизм базисных многообразий индуцирует r-геодезический диффеоморфизм касательных расслоений. Случай $r = 1$, как отмечено выше, рассмотрен К. Яно и Ш. Ишихара; необходимым и достаточным условием является аффинность базисного диффеоморфизма, что равносильно обращению в нуль его тензора аффинной деформации.

В данной работе рассматривается строение гладкой кривой с точки зрения понятия уплощения. Приведены условия, при которых r-геодезическая кривая базисного многообразия является проекцией r-геодезической кривой в касательном расслоении второго порядка. Установлено необходимое и достаточное условие, при котором 2-геодезический диффеоморфизм аффинно связных пространств индуцирует 2-геодезический диффеоморфизм касательных расслоений второго порядка.

1. Уплощенные (r-геодезические) отображения. Выберем в n-мерном дифференцируемом многообразии M с аффинной связностью ∇ гладкую кривую $\mathscr{C}$. Пусть ξ — поле касательных векторов вдоль кривой $\mathscr{C}$. Поле ξ_r векторов r-й кривизны кривой $\mathscr{C}$ определяется рекуррентно: $\xi_r = \nabla_t \xi_{r-1},\ \xi_0 = \xi$.

Определение 1.1 [4]. *Говорят, что кривая $\mathscr{C}$ в точке p имеет уплощение m-го порядка, если в точке p векторы $\xi,\ \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ линейно независимы, а векторы $\xi,\ \xi_1, \ldots, \xi_{m-1},\ \xi_m$ линейно зависимы.*

Кривая, которая в каждой своей точке имеет уплощение m-го порядка, называется *m-геодезической кривой*. Из свойств линейной зависимости и линейной независимости векторов следует, что вдоль m-геодезической кривой $\mathscr{C}$ должно выполняться равенство

$$\xi_m = \alpha_0\,\xi + \alpha_1\,\xi_1 + \ldots + \alpha_{m-1}\,\xi_{m-1}, \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ — некоторые функции, определенные вдоль кривой $\mathscr{C}$.

Если рассматривать $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_m$ как дифференциальные операторы от параметра t, а функции $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ как функции от параметра t, то равенство (1.1) представляет собой дифференциальное уравнение m-геодезической кривой $\mathscr{C}$.

Если $a_\iota = 0$ вдоль кривой $\mathscr{C}$ для всех $\iota = \overline{0, m-1}$, то параметр t, к которому отнесена данная кривая, называется *абсолютно каноническим параметром*. Дифференциальное уравнение m-геодезической кривой $\mathscr{C}$, отнесенной к абсолютно каноническому параметру, имеет вид $\xi_m = 0$. По определению m-геодезической кривой вдоль кривой $\mathscr{C}$ порядок уплощения равен m.

Ослабим это требование, а именно, *абсолютно канонической m-геодезической кривой* будем называть кривую, вдоль которой вектор m-й кривизны равен нулю, а порядок уплощения не превышает m. Параметр этой кривой будем называть *каноническим параметром*.

Определение 1.2 [4]. *Точка p кривой $\mathscr{C}$ называется граничной точкой уплощения, если в каждой окрестности точки p есть хотя бы одна точка кривой $\mathscr{C}$, в которой порядок уплощения отличается от порядка уплощения в точке p.*

Граничную точку уплощения p кривой $\mathscr{C}$ будем называть *изолированной*, если найдется такая ее окрестность, в пределах которой нет граничных точек уплощения кривой $\mathscr{C}$, отличных от точки p. Примером изолированной граничной точки уплощения является точка перегиба.

Граничную точку уплощения p кривой $\mathscr{C}$ будем называть *предельной*, если в любой ее окрестности есть хотя бы одна граничная точка уплощения кривой $\mathscr{C}$, отличная от точки p. Точка $x = 0$ является предельной граничной точкой уплощения графика функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{-1/x} \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Дугой кривой $\mathscr{C}$, представленной параметризацией $\gamma\colon (a, b) \to M$, будем называть часть $\mathscr{D}$ кривой $\mathscr{C}$, которая параметризуется сужением γ на некоторый интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Если концы α и/или β принадлежат области параметров (a, b), то точки $\gamma(\alpha)$ и/или $\gamma(\beta)$ будем называть концами дуги $\mathscr{D}$.

Пусть вдоль кривой $\mathscr{C}$ с параметризацией $\gamma\colon (a, b) \to M$ задана целочисленная неотрицательная и ограниченная функция $\mathfrak{m}\colon (a, b) \to \mathbb{Z}$. Точку $\gamma(t)$, $t \in (a, b)$, кривой $\mathscr{C}$ будем называть *$\mathfrak{m}$-граничной*, если в любой окрестности этой точки есть точка $\gamma(\tau)$, отличная от $\gamma(t)$, в которой $\mathfrak{m}(\tau) \neq \mathfrak{m}(t)$.

Лемма 1.1. *Кривая $\mathscr{C}$, вдоль которой задана целочисленная неотрицательная ограниченная функция $\mathfrak{m}$, состоит из $\mathfrak{m}$-граничных точек и попарно непересекающихся дуг, на которых функция $\mathfrak{m}$ постоянна. При этом, если концы дуг лежат на кривой, они являются $\mathfrak{m}$-граничными точками.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon (a, b) \to M$ — параметризация кривой $\mathscr{C}$. На интервале (a, b) определим бинарное отношение $\mathcal{R}$ следующим образом. Для произвольных элементов $t, t' \in (a, b)$ верно $t\mathcal{R}t'$ тогда и только тогда, когда либо $t = t'$, либо найдется такой интервал

$I = (\alpha, \beta) \subset (a, b)$, на котором функция $\mathfrak{m}$ постоянна и которому принадлежат точки t, t'. Нетрудно показать, что бинарное отношение $\mathcal{R}$ является отношением эквивалентности в множестве (a, b). Это отношение эквивалентности определяет разбиение множества (a, b) на классы эквивалентности по $\mathcal{R}$.

Покажем, что каждый класс K эквивалентности по $\mathcal{R}$ есть либо одноточечное множество, либо интервал, на котором функция $\mathfrak{m}$ постоянна. Действительно, если K не одноточечное множество, то найдется такой интервал $I \subset (a, b)$, на котором функция $\mathfrak{m}$ постоянна и $I \subset K$. Значит, $K \subset (\inf K, \sup K)$. Обратно, для произвольного $s \in (\inf K, \sup K)$ найдется такой интервал $J \subset (a, b)$, на котором функция $\mathfrak{m}$ постоянна и $s \in J \subset K$, т. е. $(\inf K, \sup K) \subset K$. Таким образом, $(\inf K, \sup K) = K$.

Теперь допустим, что $t^* = \inf K \in (a, b)$, т. е. $\gamma\,(t^*)$ — левый конец дуги γ_K. Тогда найдется такой класс эквивалентности K', что $t^* \in K'$. Если бы $\{t^*\} \neq K'$, то по доказанному K' — интервал, а значит, $K \cap K' \neq \varnothing$, что невозможно, так как $K \neq K'$. Значит, $\{t^*\} = K'$. Случай $\sup K \in (a, b)$ рассматривается аналогично.

Покажем, что каждый одноточечный класс эквивалентности $K = \{t^*\}$ определяет $\mathfrak{m}$-граничную точку $\gamma(t^*)$ кривой $\mathscr{C}$. Для этого достаточно показать, что каждый интервал $I \subset \subset (a, b)$, содержащий точку t^*, содержит, по крайней мере, одну такую точку $s \in I$, что $\mathfrak{m}\,(t^*) \neq \mathfrak{m}(s)$. Допустим противное. Тогда найдется такой интервал $I \subset (a, b)$, содержащий точку t^*, что функция $\mathfrak{m}$ постоянна на I. По определению отношения $\mathcal{R}$ отсюда получаем $I \subset K = \{t^*\}$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Лемма доказана.

Следует отметить, что функция $\mathfrak{m}$ должна выражать определенные свойства кривой, чтобы разложение кривой на $\mathfrak{m}$-граничные точки и дуги было «интересным». Например, в качестве функции $\mathfrak{m}$ можно было бы взять функцию Дирихле, которая не имеет никакого отношения к кривой, и убедиться, что любая кривая состоит из $\mathfrak{m}$-граничных точек.

Дополним функцию $\mathfrak{m}$ условием, которое позволит уточнить «разложение» кривой на граничные точки и дуги.

***Замечание* 1.1.** Пусть функция $\mathfrak{m}$ из леммы 1.1 удовлетворяет следующему условию: для любой точки $t \in (a, b)$ найдется такой интервал $t \in I \subset (a, b)$, что $\mathfrak{m}(t) \leqslant \mathfrak{m}(s)$ для произвольного $s \in I$. Тогда найдется, по крайней мере, одна дуга, на которой функция $\mathfrak{m}$ постоянна и принимает наибольшее значение $\max_{t\in(a,b)} \mathfrak{m}(t)$.

Пусть $p = \max_{t\in(a,b)} \mathfrak{m}(t)$ и t_0 — такая произвольная точка, что $p = \mathfrak{m}\,(t_0)$. По предположению найдется такой интевал $I \subset (a, b)$, что для всех $t \in I$ верно $\mathfrak{m}\,(t_0) \leqslant \mathfrak{m}(t)$, т. е. $p \leqslant \mathfrak{m}(t)$. С другой стороны, $\mathfrak{m}(t) \leqslant p$. Следовательно, $p = \mathfrak{m}(t)$; иначе говоря, функция $\mathfrak{m}$ постоянна на интервале I. Значит, если K_0 — класс эквивалентности, содержащий точку t_0, то $I \subset K_0$, и дуга γ_{K_0} является искомой.

Теорема 1.1. *Любая гладкая кривая $\mathscr{C}$ в M состоит из граничных точек уплощения и попарно непересекающихся дуг, являющихся q-геодезическими кривыми (q зависит от дуги), концы которых, лежащие на кривой $\mathscr{C}$, являются граничными точками уплощения. Среди этих дуг есть, по крайней мере, одна, для которой q — наибольший из порядков уплощения точек данной кривой $\mathscr{C}$.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon (a, b) \to M$ — параметризация кривой $\mathscr{C}$ в M. Для каждого $t \in \in (a, b)$ порядок уплощения кривой $\mathscr{C}$ в точке $\gamma(t)$ обозначим через q_t. Понятно, что $(t \to q_t)$-граничные точки — это граничные точки уплощения. С другой стороны, пусть $t_0 \in (a, b)$ — произвольная точка и $p = q_{t_0}$. По определению в точке $x = \gamma(t_0)$ векторы ξ_x, ξ_{1x}, $\ldots$, ξ_{p-1x}

линейно независимы, т. е. $\xi_x \wedge \xi_{1x} \wedge \ldots \wedge \xi_{p-1x} \neq 0$. Поскольку функция $t \to \xi_{\gamma(t)} \wedge \xi_{1\gamma(t)} \wedge \ldots \ldots \wedge \xi_{p-1\gamma(t)}$ непрерывна, найдется такой интервал $I \subset (a, b)$, что для всех $t \in I$ векторы $\xi_{\gamma(t)}$, $\xi_{1\gamma(t)}, \ldots, \xi_{p-1\gamma(t)}$ линейно независимы. По определению точки уплощения $q_t \geqslant p$ для всех $t \in I$. Таким образом, теорема получается из леммы 1.1 и замечания 1.1.

Теорема доказана.

Определение 1.3 [4]. *Диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ двух аффинно связных пространств (M, ∇) и $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ называется r-геодезическим, если при этом диффеоморфизме все геодезические кривые первого пространства переходят в кривые второго пространства, в точках которых наибольший из порядков уплощения равен r.*

r-Геодезический диффеоморфизм $\rho\colon M \to M$ аффинно связного пространства (M, ∇) на себя называется *r-геодезическим преобразованием* аффинно связного пространства (M, ∇) [4].

Из данного определения и теоремы 1.1 следует, что геометрически r-геодезические диффеоморфизмы характеризуются тем, что они геодезические кривые преобразуют в кривые, которые на отдельных участках (дугах) являются m-геодезическими кривыми, причем $m \leqslant r$.

С. Г. Лейко найдены дифференциальные уравнения, описывающие r-геодезические диффеоморфизмы. Именно, пусть $\bar{u}^h = \bar{u}^h(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ — локальное представление диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$. Для того чтобы диффеоморфизм μ был r-геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по этому диффеоморфизму локальной системе координат выполнялись условия

$$\delta^{[h}_{(i} H^{h_1}_{i_1 i_2} \ldots H^{h_{r-1}}_{k_1 \ldots k_r} H^{h_r]}_{j_1 \ldots j_{r+1})} = 0, \qquad \delta^{[h}_{(i} H^{h_1}_{i_1 i_2} \ldots H^{h_{r-1}]}_{k_1 \ldots k_r)} \neq 0, \tag{1.2}$$

где H — тензор аффинной деформации диффеоморфизма μ, $\widetilde{\nabla}$ — смешанная ковариантная производная в смысле ван дер Вардена – Бортолотти относительно связностей ∇ и $\bar{\nabla}$, $H^h_{ij} = \widetilde{\nabla}_i \delta^h_j = \bar{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij}, \ldots, H^h_{j_1 \ldots j_m j_{m+1}} = \widetilde{\nabla}_{(j_{m+1}} H^h_{j_1 \ldots j_m)}$. Соотношения (1.2) называются основными уравнениями r-геодезического диффеоморфизма.

Оказывается, что в случае диффеоморфизмов исследование порядков уплощения точек кривой-образа $\bar{\mathscr{C}}$ в многообразии $\bar{M}$ с аффинной связностью $\bar{\nabla}$ можно свести к изучению порядков уплощения соответствующих точек геодезической кривой $\mathscr{C}$ в многообразии M относительно специальной связности на многообразии M — прообраза аффинной связности $\bar{\nabla}$ относительно диффеоморфизма. Это позволяет избежать применения аппарата смешанных тензоров и смешанной ковариантной производной ван дер Вардена – Бортолотти.

Определение 1.4 [4]. *Аффинная связность $\widetilde{\nabla}\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ на многообразии M, определяемая правилом $\widetilde{\nabla}_X Y = \left(\mu^{-1}\right)_* \left(\bar{\nabla}_{\mu_* X} \mu_* Y\right)$ для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, называется прообразом аффинной связности $\bar{\nabla}$ относительно диффеоморфизма μ.*

Теорема 1.2 [5]. *Пусть $\mu\colon M \to \bar{M}$ — диффеоморфизм многообразий, $\bar{\nabla}$ — аффинная связность на $\bar{M}$, $\widetilde{\nabla}$ — прообраз $\bar{\nabla}$ при диффеоморфизме μ, $\mathscr{C}$ — гладкая кривая в многообразии M и $\bar{\mathscr{C}} = \mu(\mathscr{C})$ — кривая-образ на $\bar{M}$.*

Для того чтобы в точке $\mu(p) \in \bar{\mathscr{C}}$, $p \in \mathscr{C}$, кривая-образ $\bar{\mathscr{C}}$ имела уплощение k-го порядка относительно связности $\bar{\nabla}$, необходимо и достаточно, чтобы в точке $p \in \mathscr{C}$ кривая $\mathscr{C}$ имела уплощение k-го порядка относительно прообраза $\widetilde{\nabla}$.

Для нахождения ковариантной производной произвольного векторного поля вдоль кривой относительно прообраза аффинной связности введем понятие тензора аффинной деформации диффеоморфизма. Легко проверить, что правило $P(X, Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ определяет тензорное поле $P \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, где X и Y — произвольные гладкие векторные поля на M. Тензорное поле P тесно связано с понятием тензора аффинной деформации H диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно связных пространств (см. [6, с. 153], пример 6) $H(X,Y)_p = \mu_*(P(X,Y))_{\mu(p)}$ для любых векторных полей X и Y на многообразии M и произвольной точки $p \in M$.

По этой причине тензорное поле P также будем называть *тензором аффинной деформации диффеоморфизма* μ.

Лемма 1.2. *Пусть вдоль кривой $\mathscr{C}$, отнесенной к параметру t, задано векторное поле χ. Тогда $\widetilde{\nabla}_t\chi = \nabla_t\chi + P(\xi,\chi)$, где ξ — поле касательных векторов вдоль кривой $\mathscr{C}$.*

Доказательство сводится к проверке данного равенства в произвольной координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$ многообразия M.

Теорема 1.3. *Пусть $\mu\colon M \to \bar{M}$ — диффеоморфизм аффинно связных пространств (M,∇) и $\left(\bar{M},\bar{\nabla}\right)$, $\widetilde{\nabla}$ — прообраз $\bar{\nabla}$ при диффеоморфизме μ, $\mathscr{C}$ — геодезическая кривая в многообразии M, отнесенная к каноническому параметру t. Тогда векторы кривизн $\tilde{\xi}_k$ кривой $\mathscr{C}$ относительно связности прообраза $\widetilde{\nabla}$ имеют вид $\tilde{\xi}_k = P_k(\xi,\ldots,\xi)$, где тензоры $P_k \in \mathfrak{T}_{r+1}^1(M)$ определяются рекуррентно $P_1 = P$, $P_k = \nabla P_{k-1} + c_1^2 c_2^3\left(P\otimes\delta\otimes P_{r-1}\right)$, а c_j^i — свертка по j-му ковариантному и i-му контравариантному индексам.*

Доказательство основано на применении математической индукции. Пусть ξ — поле касательных векторов к кривой $\mathscr{C}$. Тогда, согласно лемме 1.2, находим поле $\tilde{\xi}_1$ векторов 1-й кривизны кривой $\mathscr{C}$ относительно прообраза $\widetilde{\nabla}$ $\tilde{\xi}_1 = \widetilde{\nabla}_t\xi = \nabla_t\xi + P(\xi,\xi) = P(\xi,\xi)$, так как $\nabla_t\xi = 0$, ибо параметр t геодезической кривой $\mathscr{C}$ является каноническим. Пусть для поля $\tilde{\xi}_{r-1}$ $(r-1)$-й кривизны кривой $\mathscr{C}$ относительно прообраза $\widetilde{\nabla}$ имеется такое тензорное поле $P_{r-1} \in \mathfrak{T}_r^1(M)$, что $\tilde{\xi}_{r-1} = P_{r-1}(\xi,\ldots,\xi)$. Тогда, применяя лемму 1.2, получаем

$$\tilde{\xi}_r = \widetilde{\nabla}_t\tilde{\xi}_{r-1} = \nabla_t\tilde{\xi}_{r-1} + P\big(\xi,\tilde{\xi}_{r-1}\big) = \nabla_t\left(P_{r-1}(\xi,\ldots,\xi)\right) + P\left(\xi, P_{r-1}(\xi,\ldots,\xi)\right) =$$

$$= \left(\nabla P_{r-1}\right)(\xi,\ldots,\xi,\xi) + P\left(\xi, P_{r-1}(\xi,\ldots,\xi)\right).$$

Если ввести в рассмотрение тензор $P_r = \nabla P_{r-1} + c_1^2 c_2^3\left(P\otimes\delta\otimes P_{r-1}\right) \in \mathfrak{T}_{r+1}^1(M)$, то последнее равенство примет вид $\tilde{\xi}_r = P_r(\xi,\ldots,\xi)$.

Тензорное поле P_r будем называть *r-м тензором аффинной деформации диффеоморфизма* μ. Таким образом, 1-й тензор P_1 аффинной деформации — это тензор P аффинной деформации диффеоморфизма μ. Если $(r-1)$-й тензор P_{r-1} аффинной деформации уже определен, то r-й тензор P_r определяется равенством

$$P_r\left(X_1,\ldots,X_r,X_{r+1}\right) = \nabla P_{r-1}\left(X_1,\ldots,X_r,X_{r+1}\right) + P\left(X_{r+1}, P_{r-1}\left(X_1,\ldots,X_r\right)\right)$$

для произвольных векторных полей $X_1,\ldots,X_r,X_{r+1}$ на M.

2. Уплощенные (r-геодезические) кривые в касательном расслоении второго порядка. ***Адаптированная система координат.*** Предположим, что на многообразии M задана аффинная связность ∇. Пусть $\left(\pi_2^{-1}(U);\chi^A\right)$, $\chi^A = \left(x^h,y^h,z^h\right)$ — система координат в касательном расслоении $\mathbf{T}^2M$, индуцированная системой координат $\left(U;u^h\right)$ в M, и $\Gamma_{\alpha\beta}^h$ — компоненты аффинной связности ∇ в $\left(U;u^h\right)$.

Систему координат $\left(\pi_2^{-1}(U);\breve{\chi}^A\right)$, $\breve{\chi}^A = \left(x^h,y^h,v^h\right)$, где $v^h = z^h + y^\alpha y^\beta\Gamma_{\alpha\beta}^h$, будем называть *адаптированной*.

Очевидно, якобиан $\left(\dfrac{\partial\breve{\chi}^{A'}}{\partial\chi^{A}}\right)$ преобразования $\breve{\chi}^{A'}=\breve{\chi}^{A'}\left(\chi^{A}\right)$ от индуцированной системы координат к адаптированной имеет вид

$$\left(\frac{\partial\breve{\chi}^{A'}}{\partial\chi^{A}}\right)=\begin{pmatrix}\delta_h^{h'} & 0 & 0\\ 0 & \delta_h^{h'} & 0\\ y^\alpha y^\beta\partial_h\Gamma^{h'}_{\alpha\beta} & 2y^\alpha\Gamma^{h'}_{\alpha h} & \delta_h^{h'}\end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование $\chi^{A}=\chi^{A}\left(\breve{\chi}^{A'}\right)$ имеет якобиан $\left(\dfrac{\partial\chi^{A}}{\partial\breve{\chi}^{A'}}\right)$

$$\left(\frac{\partial\chi^{A}}{\partial\breve{\chi}^{A'}}\right)=\begin{pmatrix}\delta_{h'}^{h} & 0 & 0\\ 0 & \delta_{h'}^{h} & 0\\ -y^\alpha y^\beta\partial_{h'}\Gamma^{h}_{\alpha\beta} & -2y^\alpha\Gamma^{h}_{\alpha h'} & \delta_{h'}^{h}\end{pmatrix}.$$

Пусть векторное поле Y в индуцированной координатной окрестности $\left(\pi_2^{-1}(U);\chi^A\right)$, $\chi^A=$ $=\left(x^h,y^h,z^h\right)$, имеет компоненты $\left(Y^A\right)$, а в адаптированной координатной окрестности $\left(\pi_2^{-1}(U);\breve{\chi}^A\right)$, $\breve{\chi}^A=\left(x^h,y^h,v^h\right)$, — компоненты $\left(\breve{Y}^A\right)$. Тогда очевидно, что закон преобразования компонент векторного поля при переходе от индуцированной системы координат к адаптированной имеет вид

$$\breve{Y}^{j'}=Y^{j'},\quad \breve{Y}^{\bar{j}'}=Y^{\bar{j}'},\quad \breve{Y}^{\bar{\bar{j}}'}=y^\alpha y^\beta\partial_j\Gamma^{j'}_{\alpha\beta}Y^j+2y^\alpha\Gamma^{j'}_{\alpha j}Y^{\bar{j}}+Y^{\bar{\bar{j}}'}, \tag{2.1}$$

и закон обратного преобразования компонент векторного поля при переходе от адаптированной системы координат к индуцированной имеет вид

$$Y^{i'}=\breve{Y}^{i'},\quad Y^{\bar{i}'}=\breve{Y}^{\bar{i}'},\quad Y^{\bar{\bar{i}}'}=-y^\alpha y^\beta\partial_i\Gamma^{i'}_{\alpha\beta}\breve{Y}^i-2y^\alpha\Gamma^{i'}_{\alpha i}\breve{Y}^{\bar{i}}+\breve{Y}^{\bar{\bar{i}}'}.$$

Пусть теперь $\left(U;u^h\right)$ и $\left(U';u'^{h'}\right)$ — две произвольные координатные системы, а $\left(\pi_2^{-1}(U);\breve{\chi}^A\right)$, $\breve{\chi}^A=\left(x^h,y^h,v^h\right)$ и $\left(\pi_2^{-1}(u');\breve{\chi}'^{A'}\right)$, $\breve{\chi}'^{A'}=\left(x'^{h'},y'^{h'},v'^{h'}\right)$ — соответствующие им адаптированные индуцированные системы координат. Пусть преобразование координат в $U\cap U'$ выражается равенствами $u'^{h'}=u'^{h'}\left(u^h\right)$; тогда преобразование индуцированных координат в $\pi_2^{-1}(U)\cap\pi_2^{-1}(U')$ представляется равенствами [2]

$$x'^{h'}=u'^{h'}\left(x^h\right),\quad y'^{h'}=\frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h}y^h,\quad z'^{h'}=\frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h}z^h+\frac{\partial^2u'^{h'}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}y^\alpha y^\beta. \tag{2.2}$$

Найдем выражения для преобразования адаптированных координат в $\pi_2^{-1}(U)\cap\pi_2^{-1}(U')$. Для этого достаточно найти выражение для преобразования координаты v^h. Из (2.2) получим

$$v'^{h'}=\frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h}z^h+\left(\frac{\partial^2u'^{h'}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}+\frac{\partial u'^{\alpha'}}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u'^{\beta'}}{\partial u^\beta}\Gamma'^{h'}_{\alpha'\beta'}\right)y^\alpha y^\beta=\frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h}z^h+\frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h}\Gamma^h_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta=$$

$$=\frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h}\left(z^h+\Gamma^h_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\right)=\frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h}v^h.$$

Таким образом, преобразование адаптированных координат выражается равенствами

$$x'^{h'} = u'^{h'}\left(x^h\right), \quad y'^{h'} = \frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h} y^h, \quad v'^{h'} = \frac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h} v^h.$$

Матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial \breve{\chi}'^{A'}}{\partial \breve{\chi}^A}\right)$ данного преобразования имеет вид

$$\left(\frac{\partial \breve{\chi}'^{A'}}{\partial \breve{\chi}^A}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial^2 u'^{h'}}{\partial u^h \partial u^\alpha} y^\alpha & \dfrac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 u'^{h'}}{\partial u^h \partial u^\alpha} v^\alpha & 0 & \dfrac{\partial u'^{h'}}{\partial u^h} \end{pmatrix}.$$

Векторные поля $Y^\bullet$, $Y^{\bar\bullet}$, $Y^{\bar{\bar\bullet}}$. Пусть теперь на подмножестве $\hat{E} \subset \mathbf{T}^2 M$ касательного расслоения $\mathbf{T}^2(M)$ задано векторное поле Y, т. е. $p \to Y_p$, $p \in \hat{E}$. На проекции $E = \pi_2\left(\hat{E}\right) \subset M$ определим три векторных поля $Y^\bullet$, $Y^{\bar\bullet}$, $Y^{\bar{\bar\bullet}}$ следующим образом. Пусть $\left(U; u^h\right)$ — такая координатная окрестность в M, что $U \cap E \neq \varnothing$. Предположим, что векторное поле Y в индуцированной координатной окрестности $\left(\pi_2^{-1}(U); x^h, y^h, z^h\right)$ имеет компоненты $\left(Y^h, Y^{\bar h}, Y^{\bar{\bar h}}\right)$, так что верно представление $Y = Y^h \dfrac{\partial}{\partial x^h} + Y^{\bar h} \dfrac{\partial}{\partial y^h} Y^{\bar{\bar h}} \dfrac{\partial}{\partial z^h}$. Векторные поля $Y^\bullet$, $Y^{\bar\bullet}$, $Y^{\bar{\bar\bullet}}$ в $U \cap E$ определяются равенствами

$$Y^{\bullet h} = Y^h, \quad Y^{\bar\bullet h} = Y^{\bar h} + y^\alpha \Gamma^h_{\alpha j} Y^j, \quad Y^{\bar{\bar\bullet} h} = Y^{\bar{\bar h}} + 2y^\alpha \Gamma^h_{\alpha j} Y^{\bar j} + v^\alpha \Gamma^h_{\alpha j} Y^j + y^\alpha y^\beta \partial_j \Gamma^h_{\alpha\beta} Y^j.$$

Если векторное поле Y имеет компоненты $\left(\breve{Y}^h, \breve{Y}^{\bar h}, \breve{Y}^{\bar{\bar h}}\right)$ в адаптированной системе координат $\left(\pi_2^{-1}(U); x^h, y^h, v^h\right)$, то с учетом (2.1) координатные определения векторных полей $Y^\bullet$, $Y^{\bar\bullet}$, $Y^{\bar{\bar\bullet}}$ примут вид

$$Y^{\bullet h} = \breve{Y}^h, \quad Y^{\bar\bullet h} = \breve{Y}^{\bar h} + y^\alpha \Gamma^h_{\alpha j} \breve{Y}^j, \quad Y^{\bar{\bar\bullet} h} = \breve{Y}^{\bar{\bar h}} + v^\alpha \Gamma^h_{\alpha j} \breve{Y}^j.$$

Нетрудно показать, что векторные поля $Y^\bullet$, $Y^{\bar\bullet}$, $Y^{\bar{\bar\bullet}}$ определены корректно.

Компоненты* II*-лифта аффинной связности в адаптированной системе координат.

Лемма 2.1. *Компоненты* $\breve{\Gamma}^A_{BC}$ II*-лифта* ∇^{II} *аффинной связности* ∇ *без кручения в адаптированной координатной окрестности* $\left(\pi_2^{-1}(U); \breve{\chi}^A\right)$ *имеют вид*

$$\breve{\Gamma}^h_{BC} : \begin{cases} \breve{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}, & \breve{\Gamma}^h_{i\bar j} = 0, \quad \breve{\Gamma}^h_{i\bar{\bar j}} = 0, \\ \breve{\Gamma}^h_{\bar i j} = 0, & \breve{\Gamma}^h_{\bar i\bar j} = 0, \quad \breve{\Gamma}^h_{\bar i\bar{\bar j}} = 0, \\ \breve{\Gamma}^h_{\bar{\bar i} j} = 0, & \breve{\Gamma}^h_{\bar{\bar i}\bar j} = 0, \quad \breve{\Gamma}^h_{\bar{\bar i}\bar{\bar j}} = 0, \end{cases} \qquad \breve{\Gamma}^{\bar h}_{BC} : \begin{cases} \breve{\Gamma}^{\bar h}_{ij} = \partial\Gamma^h_{ij}, & \breve{\Gamma}^{\bar h}_{i\bar j} = \Gamma^h_{ij}, \quad \breve{\Gamma}^{\bar h}_{i\bar{\bar j}} = 0, \\ \breve{\Gamma}^{\bar h}_{\bar i j} = \Gamma^h_{ij}, & \breve{\Gamma}^{\bar h}_{\bar i\bar j} = 0, \quad \breve{\Gamma}^{\bar h}_{\bar i\bar{\bar j}} = 0, \\ \breve{\Gamma}^{\bar h}_{\bar{\bar i} j} = 0, & \breve{\Gamma}^{\bar h}_{\bar{\bar i}\bar j} = 0, \quad \breve{\Gamma}^{\bar h}_{\bar{\bar i}\bar{\bar j}} = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{BC}:\begin{cases}\breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{ij} = \quad v^s\partial_s\Gamma^h_{ij} + y^\alpha y^\beta\Big(\nabla_j R^h_{\beta,\alpha i} - \nabla_\alpha R^h_{i,j\beta} + & \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{i\bar{j}} = 2y^\alpha R^h_{j,\alpha i}, \quad \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{i\bar{\bar{j}}} = \Gamma^h_{ij}, \\ \qquad + 2R^h_{s,\beta i}\Gamma^s_{j\alpha} + 2R^h_{s,\beta j}\Gamma^s_{i\alpha}\Big), & \\ \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{\bar{i}j} = 2y^\alpha R^h_{i,\alpha\, j}, & \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0, \qquad \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{\bar{i}\bar{\bar{j}}} = 0, \\ \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{\bar{\bar{i}}j} = \Gamma^h_{ij}, & \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{\bar{\bar{i}}\bar{j}} = 0, \qquad \breve{\Gamma}^{\bar{\bar{\bar{h}}}}_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}} = 0.\end{cases}$$

Доказательство. Закон преобразования компонент аффинной связности при переходе от индуцированной системы координат $\left(\pi_2^{-1}(U);\chi^A\right)$ к адаптированной $\left(\pi_2^{-1}(U);\breve{\chi}^A\right)$ имеет вид

$$\breve{\Gamma}^{A'}_{B'C'} = \frac{\partial\breve{\chi}^{A'}}{\partial\chi^A}\left(\frac{\partial^2\chi^A}{\partial\breve{\chi}^{B'}\partial\breve{\chi}^{C'}} + \frac{\partial\chi^B}{\partial\breve{\chi}^{B'}}\frac{\partial\chi^C}{\partial\breve{\chi}^{C'}}\hat{\Gamma}^A_{BC}\right).$$

Отсюда получаем

$$\breve{\Gamma}^{h'}_{i'j'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{i'j'}}_{=\Gamma^{h'}_{ij}} - y^\alpha y^\beta\partial_{j'}\Gamma^j_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{\bar{j}}}}_{=0} - y^\alpha y^\beta\partial_{i'}\Gamma^i_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}j'}}_{=0} + y^\alpha y^\beta\partial_{i'}\Gamma^i_{\alpha\beta}y^{\alpha'}y^{\beta'}\partial_{j'}\Gamma^j_{\alpha'\beta'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}}}_{=0},$$

что дает $\breve{\Gamma}^{h'}_{i'j'} = \Gamma^{h'}_{i'j'}$. Аналогично, из

$$\breve{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{j}'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{j}'}}_{=0} - 2y^\alpha\Gamma^j_{\alpha j'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{\bar{j}}}}_{=0} - y^\alpha y^\beta\partial_{i'}\Gamma^i_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{j}'}}_{=0} + 2y^\alpha y^\beta\partial_{i'}\Gamma^i_{\alpha\beta}y^{\alpha'}\Gamma^j_{\alpha' j'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}}}_{=0}$$

находим $\breve{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{j}'} = 0$, а из $\breve{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{\bar{j}}'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{\bar{j}}'}}_{=0} - y^\alpha y^\beta\partial_{i'}\Gamma^i_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}'}}_{=0}$ будем иметь $\breve{\Gamma}^{h'}_{i'\bar{\bar{j}}'} = 0$. Из равенства

$$\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{j}'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{j}'}}_{=0} - 2y^\alpha\Gamma^j_{\alpha j'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{\bar{j}}}}_{=0} - 2y^\alpha\Gamma^i_{\alpha i'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{j}'}}_{=0} + 4y^\alpha\Gamma^i_{\alpha i'}y^{\alpha'}\Gamma^j_{\alpha' j'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}}}_{=0}$$

получаем $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{j}'} = 0$, а из $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{\bar{j}}'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{\bar{j}}'}}_{=0} - 2y^\alpha\Gamma^i_{\alpha i'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}'}}_{=0}$, имеем $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{\bar{j}}'} = 0$. Кроме того, $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'\bar{\bar{j}}'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'\bar{\bar{j}}'}}_{=0} = 0$.

Из равенства

$$\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'j'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'j'}}_{=0} - y^\alpha y^\beta\partial_{j'}\Gamma^j_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'\bar{\bar{j}}}}_{=0} - 2y^\alpha\Gamma^i_{\alpha i'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}j'}}_{=0} + 2y^{\alpha'}\Gamma^i_{\alpha' i'}y^\alpha y^\beta\partial_{j'}\Gamma^j_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}\bar{\bar{j}}}}_{=0}$$

следует $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{i}'j'} = 0$, из $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'j'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'j'}}_{=0} - y^\alpha y^\beta\partial_{j'}\Gamma^j_{\alpha\beta}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'\bar{\bar{j}}}}_{=0}$ получим $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'j'} = 0$. Понятно, что $\breve{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'\bar{j}'} = \underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'\bar{j}'}}_{=0} - 2y^\alpha\Gamma^j_{\alpha j'}\underbrace{\hat{\Gamma}^{h'}_{\bar{\bar{i}}'\bar{\bar{j}}}}_{=0} = 0$. Таким образом получаем первую часть равенств (2.3). Аналогичным образом находим остальные равенства.

Лемма доказана.

Структура векторов кривизн. Пусть $\hat{\mathscr{C}}$ — такая кривая в касательном расслоении $\mathbf{T}^2 M$, что ее проекция $\mathscr{C} = \pi_2\left(\hat{\mathscr{C}}\right)$ является кривой в базисном многообразии M. Если $\hat{\gamma}\colon I \to \hat{\mathscr{C}}$, $I = (a, b)$ — параметризация кривой $\hat{\mathscr{C}}$, то $\gamma = \pi_2 \circ \hat{\gamma}\colon I \to \mathscr{C}$ — параметризация ее проекции $\mathscr{C} = \pi_2\left(\hat{\mathscr{C}}\right)$.

Произвольно выберем координатную окрестность $\left(U; u^h\right)$. Если параметрические уравнения кривой $\hat{\mathscr{C}}$ в индуцированной координатной окрестности $\left(\pi_2^{-1}(U); x^h, y^h, z^h\right)$ имеют вид

$$x^h = x^h(t), \quad y^h = y^h(t), \quad z^h = z^h(t), \quad t \in I, \quad I = (a, b), \tag{2.4}$$

то ее проекция $\mathscr{C} = \pi_2\left(\hat{\mathscr{C}}\right)$ будет иметь параметрические уравнения $u^h = u^h(t)$, причем $u^h(t) = x^h(t)$ для $t \in I$. При этом вектор-функции $y^h(t)$ и $z^h(t)$ можно рассматривать как векторные поля вдоль кривой $\mathscr{C}$. Обратно, если вдоль кривой $\mathscr{C}$ с параметрическими уравнениями $u^h = x^h(t)$ заданы векторные поля $y^h(t)$ и $z^h(t)$, то равенства (2.4) представляют собой параметрические уравнения кривой $\hat{\mathscr{C}}$ в $\mathbf{T}^2 M$, проекцией которой является исходная кривая $\mathscr{C}$.

Пусть вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}}$ задано векторное поле Y. Тогда вдоль ее проекции $\mathscr{C} = \pi_2\left(\hat{\mathscr{C}}\right)$ определены три векторных поля $Y^{\bullet}$, $Y^{\bar{\bullet}}$, $Y^{\bar{\bar{\bullet}}}$.

Лемма 2.2. *Если векторное поле Y, заданное вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}} \in \mathbf{T}^2 M$, имеет в индуцированной координатной окрестности $\left(\pi_2^{-1}(U); x^h, y^h, z^h\right)$ компоненты Y^h, $Y^{\bar{h}}$, $Y^{\bar{\bar{h}}}$, то ковариантная производная $\nabla_t^{\mathrm{II}} Y$ в адаптированной координатной окрестности имеет компоненты*

$$\begin{aligned}
{\nabla_t}^{\mathrm{II}} Y^h &= \nabla_t Y^{\bullet h}, \\
\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^{\bar{h}} &= \nabla_t Y^{\bar{\bullet} h} - y^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h \nabla_t Y^{\bullet j} + y^\alpha R_{j,\alpha i}^h \frac{dx^i}{dt} Y^{\bullet j}, \\
\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^{\bar{\bar{h}}} &= \nabla_t Y^{\bar{\bar{\bullet}} h} - v^\alpha \Gamma_{\alpha s}^h \nabla_t Y^{\bullet s} + 2 y^\alpha R_{j,\alpha i}^h Y^{\bullet i} \nabla_t y^j + 2 y^\alpha R_{i,\alpha j}^h Y^{\bar{\bullet} i} \frac{dx^j}{dt} + \\
&\quad + \left(v^\alpha R_{i,\alpha j}^h + y^\alpha y^\beta \left(\nabla_j R_{\beta,\alpha i}^h - \nabla_\alpha R_{i,j\beta}^h\right)\right) Y^{\bullet i} \frac{dx^j}{dt}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\breve{Y}^h$, $\breve{Y}^{\bar{h}}$, $\breve{Y}^{\bar{\bar{h}}}$ — компоненты векторного поля Y в адаптированной системе координат. Найдем выражение для компонент $\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^h$:

$$\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^h = \frac{d\breve{Y}^h}{dt} + \breve{\Gamma}_{BC}^h \breve{Y}^B \frac{d\breve{\chi}^C}{dt} = \frac{d\breve{Y}^h}{dt} + \Gamma_{ij}^h \breve{Y}^i \frac{dx^j}{dt} = \frac{dY^{\bullet h}}{dt} + \Gamma_{ij}^h Y^{\bullet i} \frac{dx^j}{dt} = \nabla_t Y^{\bullet h}.$$

Теперь найдем выражение для компонент $\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^{\bar{h}}$:

$$\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^{\bar{h}} = \frac{d\breve{Y}^{\bar{h}}}{dt} + \breve{\Gamma}_{BC}^{\bar{h}} \breve{Y}^B \frac{d\breve{\chi}^C}{dt} = \frac{d\breve{Y}^{\bar{h}}}{dt} + y^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{ij}^h \breve{Y}^i \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{ij}^h \breve{Y}^i \frac{dy^j}{dt} + \Gamma_{ij}^h \breve{Y}^{\bar{i}} \frac{dx^j}{dt}.$$

Согласно определению $Y^{\bar{\bullet} h}$ ковариантной производной и выражению для компонент тензора кривизны находим $\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^{\bar{h}} = \nabla_t Y^{\bar{\bullet} h} - y^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h \nabla_t Y^{\bullet j} + y^\alpha R_{j,\alpha i}^h \dfrac{dx^i}{dt} \breve{Y}^j$. Подобным образом получаем выражение для компонент $\nabla_t^{\mathrm{II}} Y^{\bar{\bar{h}}}$.

Лемма доказана.

Векторы кривизн вдоль кривой в касательном расслоении $\mathbf{T}^2 M$. Пусть $\hat{\xi}$ (соответственно ξ) — поле касательных векторов вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}}$ (соответственно $\mathscr{C}$). Тогда очевидно, что в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$ имеем $\xi^h = \dfrac{du^h}{dt}$, а в индуцированной (адаптированной) координатной окрестности $\left(\pi_2^{-1}(U); x^h, y^h, z^h\left(v^h\right)\right)$ $\hat{\xi}^h = \dfrac{dx^h}{dt}$, $\hat{\xi}^{\bar{h}} = \dfrac{dy^h}{dt}$, $\hat{\xi}^{\bar{\bar{h}}} = \dfrac{dz^h}{dt}$ $\left(\hat{\xi}^{\bar{\bar{h}}} = \dfrac{dv^h}{dt}\right)$. Очевидно $\hat{\xi}^{\bullet} = \xi$, ибо $\hat{\xi}^{\bullet h} = \hat{\xi}^h = \dfrac{dx^h}{dt} = \dfrac{du^h}{dt} = \xi^h$.

Следующая теорема выражает строение векторов кривизн произвольной кривой в $\mathbf{T}^2 M$.

Теорема 2.1. *Если $\hat{\xi}_r$ (соответственно ξ_r) — поле векторов r-й кривизны вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}}$ (соответственно $\mathscr{C}$), то в адаптированной системе координат*

$$\hat{\xi}_r^h = \xi_r^h,$$

$$\hat{\xi}_r^{\bar{h}} = \nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bullet}}_{r-1}{}^h - y^\alpha \Gamma^h_{\alpha j} \xi^j_r + y^\alpha R^h_{j,\alpha i} \xi^i \xi^j_{r-1},$$

$$\hat{\xi}_r^{\bar{\bar{h}}} = \nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bar{\bullet}}}_{r-1}{}^h - v^\alpha \Gamma^h_{\alpha s} \xi^s_r + 2 y^\alpha R^h_{j,\alpha i} \xi^i_{r-1} \nabla_t y^j + 2 y^\alpha R^h_{i,\alpha j} \hat{\xi}^{\bar{\bullet}}_{r-1}{}^i \xi^j +$$

$$+ \left(v^\alpha R^h_{i,\alpha j} + y^\alpha y^\beta \left(\nabla_j R^h_{\beta,\alpha i} - \nabla_\alpha R^h_{i,j\beta}\right)\right) \xi^i_{r-1} \xi^j.$$

Доказательство. Индукцией по r легко показать, что $\hat{\xi}^{\bullet}_r = \xi_r$. Действительно, при $r = 0$ это очевидно. Предположим, что равенство $\hat{\xi}^{\bullet}_r = \xi_r$ справедливо. Тогда

$$\hat{\xi}^{\bullet}_{r+1}{}^h = \hat{\xi}^h_{r+1} = \nabla^{\mathrm{II}}_t \hat{\xi}^h_r = \nabla_t \hat{\xi}^{\bullet h}_r = \nabla_t \xi^h_r = \xi^h_{r+1},$$

т. е. $\hat{\xi}^{\bullet}_{r+1} = \xi_{r+1}$. В таком случае равенства получаются из леммы 2.2.

***Замечание* 2.1.** По определению $\hat{\xi}^{\bar{\bullet} h} = \hat{\xi}^{\bar{h}} + y^\alpha \Gamma^h_{\alpha j} \xi^j$. С учетом равенств $\hat{\xi}^{\bar{h}} = \dfrac{dy^h}{dt}$, $\hat{\xi}^h = \dfrac{du^h}{dt}$ будем иметь $\hat{\xi}^{\bar{\bullet}} = \nabla_t y$. Далее, используя второе равенство из теоремы 2.1, находим

$$\hat{\xi}^{\bar{\bullet} h}_1 = \nabla^2_t y^h + y^\alpha R^h_{j,\alpha i} \xi^i \xi^j.$$

Аналогично $\hat{\xi}^{\bar{\bar{\bullet}}} = \nabla_t v$. С учетом теоремы 2.1 имеем

$$\hat{\xi}^{\bar{\bar{\bullet}} h}_1 = \nabla^2_t v^h + 4 y^\alpha R^h_{j,\alpha i} \xi^i \nabla_t y^j + \left(v^\alpha R^h_{i,\alpha j} + y^\alpha y^\beta \left(\nabla_j R^h_{\beta,\alpha i} - \nabla_\alpha R^h_{i,j\beta}\right)\right) \xi^i \xi^j.$$

***Следствие* 2.1.** *Если проекция $\mathscr{C}$ кривой $\hat{\mathscr{C}} \subset \mathbf{T}^2 M$, $\pi_2\left(\hat{\mathscr{C}}\right) = \mathscr{C}$, имеет в точке $p \in \mathscr{C}$ уплощение r-го порядка, то кривая $\hat{\mathscr{C}}$ в точке $\hat{p} \in \hat{\mathscr{C}}$, $\pi_2(\hat{p}) = p$, имеет уплощение порядка $m \geqslant r$.*

Действительно, по условию векторы кривизн $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{r-1}$ в точке $p \in \mathscr{C}$ линейно независимы. Но тогда и векторы $\hat{\xi}, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_{r-1}$ также линейно независимы в точке $\hat{p} \in \hat{\mathscr{C}}$.

Теорема 2.2. *Если кривая $\mathscr{C}$ является r-геодезической с дифференциальным уравнением $\xi_r = a_0 \xi + \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \xi_\iota$, а векторные поля y и v удовлетворяют уравнениям*

$$\nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bullet} h}{}_{r-1} - \left(a_0 \hat{\xi}^{\bar{\bullet} h} + \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bullet} h}{}_{\iota-1}\right) + y^\alpha R^h_{j,\alpha i} \xi^i \left(\xi^j_{r-1} - \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \xi^j_{\iota-1}\right) = 0,$$

$$\nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bar{\bullet}}h}{}_{r-1} - \left(a_0 \hat{\xi}^{\bar{\bar{\bullet}}h} + \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bar{\bullet}}h}{}_{\iota-1}\right) + 2y^\alpha R^h_{j,\alpha i}\left(\xi^i_{r-1} - \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \xi^i_{\iota-1}\right)\nabla_t y^j +$$

$$+ 2y^\alpha R^h_{i,\alpha j}\left(\hat{\xi}^{\bar{\bullet}}_{r-1}{}^i - \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \hat{\xi}^{\bar{\bullet}}_{\iota-1}{}^i\right)\xi^j +$$

$$+ \left(v^\alpha R^h_{i,\alpha j} + y^\alpha y^\beta \left(\nabla_j R^h_{\beta,\alpha i} - \nabla_\alpha R^h_{i,j\beta}\right)\right)\left(\xi^i_{r-1} - \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \xi^i_{\iota-1}\right)\xi^j = 0,$$

то кривая $\hat{\mathscr{C}}$ является r-геодезической с уравнением $\hat{\xi}_r = a_0\hat{\xi} + \sum_{\iota=1}^{r-1} a_\iota \hat{\xi}_\iota$.

Доказательство получается из теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Если кривая $\mathscr{C}$ является абсолютно канонической r-геодезической с дифференциальным уравнением $\xi_r = 0$, а векторные поля y и v удовлетворяют уравнениям*

$$\nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bullet}h}{}_{r-1} + y^\alpha R^h_{j,\alpha i}\xi^i \xi^j_{r-1} = 0, \tag{2.5}$$

$$\nabla_t \hat{\xi}^{\bar{\bar{\bullet}}h}{}_{r-1} + 2y^\alpha R^h_{j,\alpha i}\xi^i_{r-1}\nabla_t y^j + 2y^\alpha R^h_{i,\alpha j}\hat{\xi}^{\bar{\bullet}}_{r-1}{}^i \xi^j + \Big(v^\alpha R^h_{i,\alpha j} +$$

$$+ y^\alpha y^\beta \left(\nabla_j R^h_{\beta,\alpha i} - \nabla_\alpha R^h_{i,j\beta}\right)\Big)\xi^i_{r-1}\xi^j = 0, \tag{2.6}$$

то кривая $\hat{\mathscr{C}}$ является абсолютно канонической r-геодезической с дифференциальным уравнением $\hat{\xi}_r = 0$.

При $r = 1$ равенства (2.5) и (2.6) с учетом замечания принимают вид

$$\nabla_t^2 y^h + y^\alpha R^h_{j,\alpha i}\xi^i \xi^j = 0, \tag{2.7}$$

$$\nabla_t^2 v^h + 4y^\alpha R^h_{j,\alpha i}\xi^i \nabla_t y^j + \left(v^\alpha R^h_{i,\alpha j} + y^\alpha y^\beta \left(\nabla_j R^h_{\beta,\alpha i} - \nabla_\alpha R^h_{i,j\beta}\right)\right)\xi^i \xi^j = 0. \tag{2.8}$$

Таким образом, *для того чтобы кривая $\hat{\mathscr{C}}$ в $\mathbf{T}^2 M$ была геодезической кривой, отнесенной к каноническому параметру, необходимо и достаточно, чтобы ее проекция $\mathscr{C}$ в M была геодезической кривой, отнесенной к каноническому параметру, а векторные поля y и v вдоль этой кривой удовлетворяли уравнениям* (2.7) *и* (2.8). Этот результат принадлежит К. Яно и Ш. Ишихара [2].

3. Уплощенные (r-геодезические) диффеоморфизмы касательных расслоений второго порядка.

Теорема 3.1. II-*лифт r-го тензора P_r аффинной деформации диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно связных пространств (M, ∇) и $(\bar{M}, \bar{\nabla})$ совпадает с r-м тензором $\hat{P}_r$ аффинной деформации индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2 \bar{M}$ касательных расслоений второго порядка, рассматриваемых как аффинно связные пространства $(\mathbf{T}^2 M, \nabla^{\mathrm{II}})$ и $(\mathbf{T}^2 \bar{M}, \bar{\nabla}^{\mathrm{II}})$, т. е.* $\hat{P}_r = P_r^{\mathrm{II}}$.

Доказательство проводится индукцией по порядку r тензора P_r. Как показано в [8], тензор $\hat{P}$ аффинной деформации индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2 \bar{M}$ касательных расслоений второго порядка равен II-лифту тензора P аффинной деформации базисного диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$, т. е. $\hat{P} = P^{\mathrm{II}}$. Это показывает, что при $r = 1$ утверждение верно. Предположим теперь, что утверждение верно для $r-1$, т. е. $\hat{P}_{r-1} = P^{\mathrm{II}}_{r-1}$. Учитывая определение тензора r-й аффинной деформации и свойства лифтов [2], получаем

$$\hat{P}^{\mathrm{II}}_r\left(X^{\mathrm{II}}_1, \ldots, X^{\mathrm{II}}_r, X^{\mathrm{II}}_{r+1}\right) = \nabla^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{II}}_{r-1}\left(X^{\mathrm{II}}_1, \ldots, X^{\mathrm{II}}_r, X^{\mathrm{II}}_{r+1}\right) + P^{\mathrm{II}}\left(X^{\mathrm{II}}_{r+1}, P^{\mathrm{II}}_{r-1}\left(X^{\mathrm{II}}_1, \ldots, X^{\mathrm{II}}_r\right)\right) =$$

$$= \left(\nabla P_{r-1}\right)\left(X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}\right)^{\mathrm{II}} + P\left(X_{r+1}, P_{r-1}\left(X_1, \ldots, X_r\right)\right)^{\mathrm{II}} =$$

$$= P_r\left(X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}\right)^{\mathrm{II}} = P^{\mathrm{II}}_r\left(X^{\mathrm{II}}_1, \ldots, X^{\mathrm{II}}_r, X^{\mathrm{II}}_{r+1}\right)$$

для произвольных векторных полей $X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}$ на M. Отсюда имеем $\hat{P}_r = P^{\mathrm{II}}_r$.

Лемма 3.1. *Для произвольных тензорных полей T_j, $j = \overline{1, m}$, имеют место формулы*

$$(T_1 \otimes \ldots \otimes T_m)^0 = T^0_1 \otimes \ldots \otimes T^0_m,$$

$$(T_1 \otimes \ldots \otimes T_m)^{\mathrm{I}} = \sum_{i=1}^{m} T^0_1 \otimes \ldots \otimes T^{\mathrm{I}}_i \otimes \ldots \otimes T^0_m,$$

$$(T_1 \otimes \ldots \otimes T_m)^{\mathrm{II}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} T^0_1 \otimes \ldots \otimes T^{\mathrm{II}}_i \otimes \ldots \otimes T^0_m + 2 \sum_{i,j=1,\ i<j}^{m} T^0_1 \otimes \ldots \otimes T^{\mathrm{I}}_i \otimes \ldots \otimes T^{\mathrm{I}}_j \otimes \ldots \otimes T^0_m.$$

Доказательство проводится индукцией по числу m.

Лемма 3.2. *Пусть P_m (соответственно $\hat{P}_m$) — m-й тензор аффинной деформации диффеоморфизма $\mu\colon M \to \bar{M}$ (соответственно индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2 \bar{M}$), $\hat{\xi}$ (соответственно ξ) — поле касательных векторов вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}}$ (соответственно вдоль ее проекции $\mathscr{C} = \pi_2(\hat{\mathscr{C}})$) в касательном расслоении $\mathbf{T}^2 M$ (в M). Тогда векторное поле $\hat{P}_m\left(\hat{\xi}, \ldots, \hat{\xi}\right)$, заданное вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}}$, в индуцированной координатной окрестности имеет компоненты*

$$\hat{P}_m\left(\hat{\xi}, \ldots, \hat{\xi}\right)^h = P_m\left(\xi, \ldots, \xi\right)^h,$$

$$\hat{P}_m\left(\hat{\xi}, \ldots, \hat{\xi}\right)^{\bar{h}} = \partial P_m\left(\xi, \ldots, \xi, \xi\right)^h + (m+1) S\left(P_m\right)\left(\bar{\xi}, \xi, \ldots, \xi\right)^h,$$

$$\hat{P}_m\left(\hat{\xi}, \ldots, \hat{\xi}\right)^{\bar{\bar{h}}} = \partial^2 P_m\left(\xi, \ldots, \xi\right)^h + 2(m+1) S\left(\partial P_m\right)\left(\bar{\xi}, \xi, \ldots, \xi\right)^h +$$

$$+ (m+1) S\left(P_m\right)\left(\bar{\bar{\xi}}, \xi, \ldots, \xi\right)^h + \frac{(m+1)m}{2} S\left(P_m\right)\left(\bar{\xi}, \bar{\xi}, \xi, \ldots, \xi\right)^h,$$

где S — операция симметрирования, $\bar{\xi} = \left(\hat{\xi}^{\bar{h}}\right)_{h=\overline{1,n}}$, $\bar{\bar{\xi}} = \left(\hat{\xi}^{\bar{\bar{h}}}\right)_{h=\overline{1,n}}$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.1 и лемму 3.1.

Теорема 3.2. *r-Геодезический диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно связных пространств (M, ∇) и $\left(\bar{M}, \bar{\nabla}\right)$ индуцирует диффеоморфизм $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2 \bar{M}$ касательных расслоений второго порядка, рассматриваемых как аффинно связные пространства $\left(\mathbf{T}^2 M, \nabla^{\mathrm{II}}\right)$ и $\left(T^2 \bar{M}, \bar{\nabla}^{\mathrm{II}}\right)$, порядок уплощения которого m не меньше r, т. е. $m \geqslant r$.*

Доказательство. Произвольным образом выберем геодезическую кривую $\hat{\mathscr{C}}$ в касательном расслоении $\mathbf{T}^2M$, отнесенную к каноническому параметру t. Согласно замечанию к следствию 2.2, ее проекция $\mathscr{C} = \pi_2\left(\hat{\mathscr{C}}\right)$ является геодезической кривой в M (t — канонический параметр). Пусть $\tilde{\nabla}$ — прообраз аффинной связности $\bar{\nabla}$ при диффеоморфизме μ. Как показано в [4], прообраз $\widetilde{\bar{\nabla}^{\mathrm{II}}}$ II-лифта $\bar{\nabla}^{\mathrm{II}}$ совпадает с II-лифтом прообраза $\tilde{\nabla}^{\mathrm{II}}$. Пусть $\hat{\xi}_m$ (соответственно ξ_m) — поле векторов m-й кривизны вдоль геодезической кривой $\hat{\mathscr{C}}$ (соответственно $\mathscr{C}$) относительно прообраза $\tilde{\nabla}^{\mathrm{II}}$ (соответственно $\tilde{\nabla}$). Поскольку $\mu\colon M \to \bar{M}$ — r-геодезический диффеоморфизм, относительно связности $\tilde{\nabla}$ кривая $\mathscr{C}$ в каждой своей точке $p \in \mathscr{C}$ имеет уплощение порядка $m_{p,\mathscr{C}} \leqslant r$, причем $\max_{\mathscr{C},p\in\mathscr{C}} m_{p,\mathscr{C}} = r$. Согласно следствию 2.1, кривая $\hat{\mathscr{C}}$ в соответствующей точке $\hat{p} \in \hat{\mathscr{C}}$, $\pi_2(\hat{p}) = p$, имеет уплощение порядка $k_{\hat{p},\hat{\mathscr{C}}} \geqslant m_{p,\mathscr{C}}$. Поэтому $\max_{\hat{\mathscr{C}},\hat{p}\in\hat{\mathscr{C}}} k_{\hat{p},\hat{\mathscr{C}}} \geqslant$ $\geqslant \max_{\mathscr{C},p\in\mathscr{C}} m_{p,\mathscr{C}} = r$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.3. *Для того чтобы r-геодезический диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно связных пространств (M, ∇) и $\left(\bar{M}, \bar{\nabla}\right)$ индуцировал r-геодезический диффеоморфизм касательных расслоений второго порядка $\mu_*\colon \mathbf{T}^2M \to \mathbf{T}^2\bar{M}$, достаточно, чтобы выполнялось равенство* $S(P_r) = 0$.

Доказательство. Пусть $\hat{\mathscr{C}}$ — произвольная геодезическая кривая в касательном расслоении $\mathbf{T}^2M$, $\hat{\xi}$ — поле касательных векторов вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}}$, $\hat{\hat{\xi}}_m$ — поле векторов m-й кривизны вдоль геодезической кривой $\hat{\mathscr{C}}$ относительно захвата $\tilde{\nabla}^{\mathrm{II}}$ и $\hat{P}_m$ — тензор m-й аффинной деформации диффеоморфизма μ_*. Согласно теореме 1.3, справедливо равенство $\hat{\hat{\xi}}_m = \hat{P}_m\left(\hat{\xi}, \ldots, \hat{\xi}\right)$. Беря II-лифт от равенства $S(P_r) = 0$, получаем $S\left(P_r^{\mathrm{II}}\right) = 0$. В силу теоремы 3.1 имеем $S\left(\hat{P}_r\right) = 0$. Тогда справедливо равенство $\hat{\hat{\xi}}_r = \hat{P}_r\left(\hat{\xi}, \ldots, \hat{\xi}\right) = 0$. Последнее показывает, что для индуцированного диффеоморфизма $\mu_*\colon \mathbf{T}^2M \to \mathbf{T}^2\bar{M}$ порядок уплощения $m \leqslant r$. С другой стороны, в силу теоремы 3.2 $m \geqslant r$. Значит, $m = r$.

Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Для того чтобы 2-геодезический диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно связных пространств (M, ∇) и $\left(\bar{M}, \bar{\nabla}\right)$ индуцировал 2-геодезический диффеоморфизм касательных расслоений второго порядка $\mu_*\colon \mathbf{T}^2M \to \mathbf{T}^2\bar{M}$, рассматриваемых как аффинно связные пространства $\left(\mathbf{T}^2M, \nabla^{\mathrm{II}}\right)$ и $\left(\mathbf{T}^2\bar{M}, \bar{\nabla}^{\mathrm{II}}\right)$, необходимо и достаточно, чтобы тензор P_2 2-й аффинной деформации диффеоморфизма μ удовлетворял условию $S(P_2) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость*. Произвольным образом выберем точку $p \in M$ и вектор $X \in \mathbf{T}_pM$. Проведем через точку p в направлении вектора X геодезическую кривую $\mathscr{C}$, которая в координатной окрестности $\left(U; u^h\right)$ описывается параметрическими уравнениями $u^h = u^h(t)$ (t — натуральный параметр). Произвольно выберем $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим якобиево поле y вдоль кривой $\mathscr{C}$ (см. (2.7)) с начальными условиями $y(t_0) = y_0$, $\dfrac{dy}{dt}(t_0) = Y$ (t_0 — значение параметра t, соответствующее точке p). Аналогично возьмем $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $Z \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим векторное поле z вдоль кривой $\mathscr{C}$, которое удовлетворяет уравнению (2.8) с начальными условиями $z(t_0) = z_0$, $\dfrac{dz}{dt}(t_0) = Z$ (где $v^h(t) = z^h(t) - y^\alpha(t)\, y^\beta(t)\, \Gamma^h_{\alpha\beta}\left(u^i(t)\right)$). Тогда, согласно замечанию к следствию 2.2, равенства $x^h = u^h(t)$, $y^h = y^h(t)$, $z^h = z^h(t)$ представляют собой в индуцированной координатной окрестности $\pi_2(U)$ параметрические уравнения геодезической кривой $\hat{\mathscr{C}} \subset \mathbf{T}^2M$, проекцией которой является кривая $\mathscr{C}$. При этом геодезическая $\hat{\mathscr{C}}$ проходит через точку $\hat{p} = (p, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\hat{X} = (X, Y, Z)$.

Пусть $\hat{\xi}$ (соответственно ξ) — поле касательных векторов вдоль кривой $\hat{\mathscr{C}}$ (соответственно $\mathscr{C}$), $\hat{\tilde{\xi}}_m$ (соответственно $\tilde{\xi}_m$) — поле векторов m-й кривизны вдоль геодезической кривой $\hat{\mathscr{C}}$ (соответственно $\mathscr{C}$) относительно прообраза $\tilde{\nabla}$ (соответственно $\tilde{\nabla}^{\mathrm{II}}$) и $\hat{P}_m$ (соответственно P_m) — тензор m-й аффинной деформации диффеоморфизма μ_* (соответственно μ). Согласно теореме 1.3, справедливо равенство $\hat{\tilde{\xi}}_m = \hat{P}_m\left(\hat{\xi}, \ldots, \hat{\xi}\right)$ (соответственно $\tilde{\xi}_m = P_m(\xi, \ldots, \xi)$). В частности, $\tilde{\xi}_1 = P(\xi,\xi)$, $\hat{\tilde{\xi}}_1 = \hat{P}\left(\hat{\xi},\hat{\xi}\right)$, $\tilde{\xi}_2 = P_2(\xi,\xi,\xi)$, $\hat{\tilde{\xi}}_2 = \hat{P}_2\left(\hat{\xi},\hat{\xi},\hat{\xi}\right)$. С учетом леммы 3.2 и симметричности тензора P аффинной деформации получим

$$\hat{P}\left(\hat{\xi},\hat{\xi}\right)^h = P(\xi,\xi)^h,$$

$$\hat{P}\left(\hat{\xi},\hat{\xi}\right)^{\bar{h}} = \partial P(\xi,\xi)^h + 2S(P)\left(\bar{\xi},\xi\right)^h,$$

$$\hat{P}\left(\hat{\xi},\hat{\xi}\right)^{\bar{\bar{h}}} = \partial^2 P(\xi,\xi)^h + 4S(\partial P)\left(\bar{\xi},\xi\right)^h + 2S(P)\left(\bar{\bar{\xi}},\xi\right)^h + S(P)\left(\bar{\xi},\bar{\xi}\right)^h.$$

Аналогичным образом с учетом леммы 3.2 будем иметь

$$\hat{P}_2\left(\hat{\xi},\hat{\xi},\hat{\xi}\right)^h = P_2(\xi,\xi,\xi)^h, \qquad \hat{P}_2\left(\hat{\xi},\hat{\xi},\hat{\xi}\right)^{\bar{h}} = \partial P_2(\xi,\xi,\xi)^h + 3S(P_2)\left(\bar{\xi},\xi,\xi\right)^h,$$

$$\hat{P}_2\left(\hat{\xi},\hat{\xi},\hat{\xi}\right)^{\bar{\bar{h}}} = \partial^2 P_2(\xi,\xi,\xi)^h + 6S(\partial P_2)\left(\bar{\xi},\xi,\xi\right)^h + 3S(P_2)\left(\bar{\bar{\xi}},\xi,\xi\right)^h + 3S(P_2)\left(\bar{\xi},\bar{\xi},\xi\right)^h.$$

Для точки p получим $\xi|_p = X$, $\left.\tilde{\xi}_1\right|_p = P|_p(X,X)$, $\left.\tilde{\xi}_2\right|_p = P_2|_p(X,X,X)$, а для точки $\hat{p} = (p, y_0, z_0)$

$$\left.\hat{\xi}\right|_{\hat{p}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

$$\left.\hat{\tilde{\xi}}_1\right|_{\hat{p}} = \begin{pmatrix} P|_p(X,X)^h \\ \partial\, P|_p(X,X)^h + 2\, P|_p(Y,X)^h \\ \partial^2\, P|_p(X,X)^h + 4\partial\, P|_p(Y,X)^h + 2\, P|_p(Z,X)^h + P|_p(Y,Y)^h \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\left.\hat{\tilde{\xi}}_2\right|_{\hat{p}} = \begin{pmatrix} P_2|_p(X,X,X)^h \\ \partial\, P_2|_p(X,X,X)^h + 3S\left(P_2|_p\right)(Y,X,X)^h \\ \partial^2\, P_2|_p(X,X,X)^h + 6S\left(\partial\, P_2|_p\right)(Y,X,X)^h + \\ +3S\left(P_2|_p\right)(Z,X,X)^h + 3S\left(P_2|_p\right)(Y,Y,X)^h \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Поскольку диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ является 2-геодезическим, кривая $\mathscr{C}$ в точке p имеет порядок уплощение $m \leqslant 2$. По предположению индуцированный диффеоморфизм $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2\bar{M}$ также является 2-геодезическим, поэтому кривая $\hat{\mathscr{C}}$ в точке $\hat{p} = (p, y_0, z_0)$ имеет уплощение порядка $k \leqslant 2$.

***Случай* 1:** $m = 2$. Поскольку кривая $\mathscr{C}$ в точке p имеет уплощение порядка 2, векторы $\xi|_p$ и $\left.\tilde{\xi}_1\right|_p$ линейно независимы, а вектор $\left.\tilde{\xi}_2\right|_p$ линейно выражается через $\xi|_p$ и $\left.\tilde{\xi}_1\right|_p$. Пусть

$\left.\tilde{\xi}_2\right|_p = \alpha \left.\tilde{\xi}_1\right|_p + \beta \left.\xi\right|_p$, т. е.

$$\left.P_2\right|_p (X, X, X) = \alpha \left.P\right|_p (X, X) + \beta X. \tag{3.3}$$

Из линейной независимости векторов $\left.\xi\right|_p$, $\left.\tilde{\xi}_1\right|_p$ следует линейная независимость векторов $\left.\hat{\xi}\right|_{\hat{p}}$ и $\left.\hat{\tilde{\xi}}\right|_{\hat{p}}$ для любых y_0, Y и z_0, Z. Но тогда кривая $\hat{\mathscr{C}}$ в точке $\hat{p} = (p, y_0, z_0)$ имеет уплощение 2-го порядка. В таком случае

$$\left.\hat{\tilde{\xi}}_2\right|_{\hat{p}} = \hat{\alpha} \left.\hat{\tilde{\xi}}_1\right|_{\hat{p}} + \hat{\beta} \left.\hat{\xi}\right|_{\hat{p}}. \tag{3.4}$$

Отсюда будем иметь $\left.P_2\right|_p (X, X, X) = \hat{\alpha} \left.P\right|_p (X, X) + \hat{\beta} X$. Сопоставляя полученный результат с (3.3), находим $\hat{\alpha} = \alpha$ и $\hat{\beta} = \beta$. В таком случае из (3.4), (3.1) и (3.2) находим

$$\partial \left.P_2\right|_p (X, X, X)^h + 3S\left(\left.P_2\right|_p\right)(Y, X, X)^h = \alpha\partial \left.P\right|_p (X, X)^h + \alpha 2 \left.P\right|_p (Y, X)^h + \beta Y^h.$$

Возьмем слоевые координаты $y_0 = z_0 = 0$ и $Y = Z = X$. Тогда последние равенства примут вид $3 \left.P_2\right|_p (X, X, X) = 2\alpha \left.P\right|_p (X, X) + \beta X$. Отсюда

$$\left.P_2\right|_p (X, X, X) = \frac{2}{3}\alpha \left.P\right|_p (X, X) + \frac{1}{3}\beta X. \tag{3.5}$$

Вычитая из (3.3) равенство (3.5), получаем $\frac{1}{3}\alpha \left.P\right|_p (X, X) + \frac{2}{3}\beta X = 0$. Поскольку векторы X и $\left.P\right|_p (X, X)$ линейно независимы, то $\alpha = \beta = 0$, что с учетом (3.3) дает

$$\left.P_2\right|_p (X, X, X) = 0. \tag{3.6}$$

Случай 2: $m = 1$. Поскольку кривая $\mathscr{C}$ в точке p имеет уплощение порядка 1, векторы $\left.\xi\right|_p$ и $\left.\tilde{\xi}_1\right|_p$ коллинеарны, тогда $\left.\tilde{\xi}_1\right|_p = \lambda \left.\xi\right|_p$, ибо $\left.\xi\right|_p \neq 0$. Итак, $\left.P\right|_p (X, X) = \lambda X$. Возьмем слоевые координаты $y_0 = z_0 = 0$ и $Y = Z = X$, тогда

$$\left.\hat{\xi}\right|_{\hat{p}} = \begin{pmatrix} X \\ X \\ X \end{pmatrix}, \ \left.\hat{\tilde{\xi}}_1\right|_{\hat{p}} = \begin{pmatrix} \left.P\right|_p (X, X) \\ 2 \left.P\right|_p (X, X) \\ 3 \left.P\right|_p (X, X) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ 2X \\ 3X \end{pmatrix}, \ \left.\hat{\tilde{\xi}}_2\right|_{\hat{p}} = \begin{pmatrix} \left.P_2\right|_p (X, X, X) \\ 3 \left.P_2\right|_p (X, X, X) \\ 6 \left.P_2\right|_p (X, X, X) \end{pmatrix}.$$

При $\lambda \neq 0$ векторы $\left.\hat{\xi}\right|_{\hat{p}}$ и $\left.\hat{\tilde{\xi}}_1\right|_{\hat{p}}$ линейно независимы, а потому кривая $\hat{\mathscr{C}}$ в точке $\hat{p}$ имеет уплощение порядка 2. Значит, выполняется равенство (3.4), из которого следует

$$\left.P_2\right|_p (X, X, X) = \hat{\alpha} \left.P\right|_p (X, X) + \hat{\beta} X, \qquad 3 \left.P_2\right|_p (X, X, X) = 2\hat{\alpha} \left.P\right|_p (X, X) + \hat{\beta} X,$$

$$6 \left.P_2\right|_p (X, X, X) = 3\hat{\alpha} \left.P\right|_p (X, X) + \hat{\beta} X.$$

Вычитая из второго и третьего равенств первое, получаем

$$2 \left.P_2\right|_p (X, X, X) = \hat{\alpha} \left.P\right|_p (X, X), \qquad 5 \left.P_2\right|_p (X, X, X) = 2\hat{\alpha} \left.P\right|_p (X, X).$$

Отсюда, так как $\left.P\right|_p (X, X) \neq 0$, получаем $\hat{\alpha} = 0$. Учитывая это, находим $\hat{\beta} = 0$, и тогда опять-таки приходим к равенству (3.6).

Пусть теперь $\lambda = 0$. Если p — граничная точка уплощения, то найдется такая последовательность точек $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $p_n \to p$, в которых кривая $\mathscr{C}$ имеет уплощение порядка 2. Тогда для этих точек, как доказано, справедливо равенство $P_2|_{p_n}\left(\xi|_{p_n}, \xi|_{p_n}, \xi|_{p_n}\right) = 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая при этом непрерывность, получаем равенство (3.6). Поэтому будем считать, что p — не граничная точка уплощения. В таком случае найдется такой интервал $I = (a, b)$ точки t_0, в пределах которого кривая $\mathscr{C}$ имеет уплощение первого порядка. Тогда справедливо равенство $\tilde{\xi}_1 = \lambda\xi$, где λ — функция $t \in I$, причем по предположению $\lambda(t_0) = 0$. Если в любой окрестности точки t_0 найдется такая точка $t' \in I$, что $\lambda(t') \neq 0$, то можно построить последовательность точек $t_n \in I$ такую, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ и $\lambda(t_n) \neq 0$. Как показано выше, для таких точек равенство (3.6) выполняется. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая непрерывность, получаем равенство (3.6) и для точки t_0. В таком случае, без ограничения общности, можно считать, что $\lambda = 0$ всюду в интервале I. Но тогда $\tilde{\xi}_2 = \widetilde{\nabla}_t\tilde{\xi}_1 = \widetilde{\nabla}_t(\lambda\xi) = \lambda'\xi + \lambda\widetilde{\nabla}_t\xi = \lambda'\xi + \lambda\tilde{\xi}_1 = 0$, что влечет равенство $P_2(\xi, \xi, \xi) = 0$ вдоль I. Из произвольности точки $p \in M$ и вектора $X \in \mathbf{T}_pM$ получаем требуемое. *Достаточность* получается из теоремы 3.3.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.1.** Из теорем 1.2 и 1.3 следует, что r-геодезический диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$, удовлетворяющий условию $S(P_r) = 0$, геометрически характеризуется тем, что каждая геодезическая кривая, отнесенная к каноническому параметру, переходит в абсолютно каноническую r-геодезическую кривую, отнесенную к каноническому параметру. Здесь прослеживается аналогия с аффинным диффеоморфизмом, который геометрически характеризуется тем, что каждая геодезическая кривая, отнесенная к каноническому параметру, переходит в геодезическую кривую, также отнесенную к каноническому параметру.

1. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. Differential geometry. – New York: Marcel Dekker, 1973. – 434 p.
2. *Yano K., Ishihara S.* Differential geometry of tangent bundles of order 2 // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – **20**, № 3. – P. 318 – 354.
3. *Лейко С. Г.* Линейные p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений высших порядков и высших степеней // Тр. Геометрич. сем. – 1982. – Вып. 14. – С. 34 – 46.
4. *Лейко С. Г.* P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 62 – 71.
5. *Зубрілін К. М.* P-геодезичні дифеоморфізми дотичних розшарувань із зв'язністю горизонтального ліфта, індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами баз // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 48 – 60.
6. *Лейко С. Г.* Ріманова геометрія: навч. пос. – Одеса: Астропринт, 2000. – 212 с.
7. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
8. *Зубрилин К. М.* p-Геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях второго порядка, индуцированные концциркулярными преобразованиями баз // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 346 – 364.

Получено 12.10.12,
после доработки — 17.12.12