УДК 517.9

М. О. Перестюк, П. В. Фекета (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ЗБЕРЕЖЕННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМ

We establish new conditions for the preservation of the asymptotically stable invariant toroidal manifold of the linear extension of a dynamical system on the torus under small perturbations in the set of nonwandering points. This approach is applied to the investigation of the existence and stability of invariant tori of the linear extensions of dynamical systems with simple structures of the limit sets and recurrent trajectories.

Установлены новые условия сохранения асимптотически устойчивого инвариантного тороидального многообразия линейного расширения динамической системы на торе при малых возмущениях на множестве неблуждающих точек. Данный подход применен к исследованию существования и устойчивости инвариантных торов линейных расширений динамических систем, имеющих простую структуру предельных множеств и рекуррентных траекторий.

Вступ. Одним із важливих питань якісної теорії багаточастотних коливань є питання грубості інваріантного многовиду та його збереження при малих збуреннях [1, 7, 11]. У багатьох роботах (див., наприклад, [3], §10) успішно застосовано другий метод Ляпунова для дослідження грубості інваріантного тороїдального многовиду та доведено, що малі збурення правої частини системи не руйнують інваріантний тор.

У даній роботі встановлено нові умови збереження асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду, які вимагають малості збурення не на всьому торі $\mathcal{T}_m$, а лише на множині неблукаючих точок динамічної системи на торі.

Роботу побудовано таким чином. У першому пункті наведено короткий опис систем диференціальних рівнянь, визначених в $\mathcal{T}_m \times \mathbb{R}^n$, їх основні властивості та поняття функції Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори. У другому пункті доведено теорему про збереження асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду при, в певному сенсі, малих збуреннях правої частини. Наведено приклад застосування теореми до системи, що має просту структуру множини неблукаючих точок, та проілюстровано переваги пропонованого методу.

1. Об'єкт дослідження та основні положення. Основним об'єктом дослідження є система диференціальних рівнянь, визначена в прямому добутку тора $\mathcal{T}_m$ та евклідового простору $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^T \in \mathcal{T}_m$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $A(\varphi), f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $C(\mathcal{T}_m)$ — простір неперервних 2π-періодичних по кожній компоненті φ_v, $v = 1, \ldots, m$, функцій, визначених на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$. Функція $a(\varphi)$ належить $C(\mathcal{T}_m)$ та задовольняє умову Ліпшиця

$$\big\|a(\varphi'') - a(\varphi')\big\| \leq L\big\|\varphi'' - \varphi'\big\| \tag{2}$$

для будь-яких $\varphi', \varphi'' \in \mathcal{T}^m$ та деякої сталої $L > 0$.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого рівняння з (1), який задовольняє початкову умову $\varphi_0(\varphi) = \varphi$. Умова Ліпшиця (2) гарантує існування та єдиність такого розв'язку.

Поряд із системою рівнянь (1) розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A\big(\varphi_t(\varphi)\big)x + f\big(\varphi_t(\varphi)\big), \tag{3}$$

яка залежить від $\varphi \in \mathcal{T}^m$, як від параметра. Систему рівнянь (3) одержано шляхом заміни φ на $\varphi_t(\varphi)$ у другому рівнянні системи (1). Під інваріантним многовидом $\mathcal{M}$ системи рівнянь (1) розуміємо множину, яка визначається функцією $u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ такою, що функція $x(t,\varphi) = u\big(\varphi_t(\varphi)\big)$ є розв'язком системи рівнянь (3) для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}^m$.

Основний підхід до дослідження інваріантних тороїдальних многовидів системи рівнянь (1) базується на понятті функції Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори [6]. Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A\big(\varphi_t(\varphi)\big)x, \tag{4}$$

яка залежить від $\varphi \in \mathcal{T}^m$, як від параметра. Позначимо через $\Omega^t_\tau(\varphi)$ матрицант системи рівнянь (4), який перетворюється в одиничну матрицю при $t = \tau$, тобто $\Omega^\tau_\tau(\varphi) \equiv E$.

Нехай $C(\varphi)$ — матриця, що належить простору $C(\mathcal{T}_m)$. Покладемо

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi)C\big(\varphi_\tau(\varphi)\big), & \tau \le 0, \\ -\Omega^0_\tau(\varphi)\Big(E - C\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\Big), & \tau > 0. \end{cases}$$

Означення 1 [7]. *Функція $G_0(\tau,\varphi)$ називається функцією Гріна – Самойленка системи рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x,$$

якщо інтеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big\|G_0(\tau,\varphi)\big\| d\tau$ рівномірно обмежений по φ, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big\|G_0(\tau,\varphi)\big\| d\tau \le K < \infty. \tag{5}$$

Тоді інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь (1) можна подати у вигляді

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau,\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Умова (5) забезпечує збіжність інтеграла, а існування функції Гріна – Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$ є достатньою умовою існування інваріантного тороїдального многовиду системи рівнянь (1).

2. Основні результати. ***2.1. Теорема збурення.*** Розглянемо збурену систему диференціальних рівнянь, визначену в прямому добутку тора $\mathcal{T}_m$ та евклідового простору $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = \big(A + B(\varphi)\big)x + f(\varphi), \tag{6}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, A — стала матриця, $B(\varphi), f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. Задача полягає у встановленні нових достатніх умов існування інваріантного тора системи (6) у випадку, коли незбурена система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + f(\varphi) \tag{7}$$

має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид. Як відомо [3] (§10), система (6) має інваріантний тор для будь-якої функції $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, якщо збурення $B(\varphi)$ є малим для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$. У даній роботі послаблено цю умову, а саме, вимагається, щоб $\|B(\varphi)\| \leq \delta$ лише для $\varphi \in \Omega$, де Ω — множина неблукаючих точок динамічної системи $\dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$.

Означення 2 [4]. *Точку φ назвемо блукаючою, якщо існують її окіл $U(\varphi)$ і додатне число T такі, що*

$$U(\varphi) \cap \varphi_t\big(U(\varphi)\big) = 0 \quad \textit{для} \quad t \geq T. \tag{8}$$

Множину блукаючих точок позначатимемо через W, а множину неблукаючих точок — через $\Omega = \mathcal{T}_m - W$. З компактності тора $\mathcal{T}_m$ випливає, що множина Ω є непорожньою та компактною [4] (гл. II, § 5).

Теорема 1. *Нехай у системі* (6) *дійсні частини всіх власних значень матриці A є від'ємними*: $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0,\ j = 1, \ldots, n$. *Тоді існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якої функції $B(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ такої, що $\|B(\varphi)\| \leq \delta$, $\varphi \in \Omega$, і для будь-якої функції $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ система рівнянь* (6) *має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

Доведення. Матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A + B\big(\varphi_t(\varphi)\big)\Big)x, \tag{9}$$

залежної від $\varphi \in T_m$, як від параметра, допускає зображення

$$\Omega_0^t(\varphi) = X_0^t + \int\limits_0^t X_s^t B\big(\varphi_s(\varphi)\big)\Omega_0^s(\varphi)ds,$$

де X_τ^t — матрицант однорідної системи зі сталими коефіцієнтами $\dfrac{dx}{dt} = Ax$. Оскільки матрицант $\|X_0^t\| \leq Ke^{-\gamma t}$, $t \geq 0$, для деяких $K \geq 1$, $\gamma > 0$, то

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma t} + \int\limits_0^t Ke^{-\gamma(t-s)}\Big\|B\big(\varphi_s(\varphi)\big)\Big\|\|\Omega_0^s(\varphi)\|ds, \quad t \geq 0,$$

$$e^{\gamma t}\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K + K\int\limits_0^t \Big\|B\big(\varphi_s(\varphi)\big)\Big\|e^{\gamma s}\|\Omega_0^s(\varphi)\|ds, \quad t \geq 0.$$

Позначимо через $U_\varepsilon(\Omega)$ ε-окіл множини Ω і покажемо, що для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ і довільного $\varphi \in \mathcal{T}^m$ існує скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від φ, такий, що для моментів часу $t \geq T$ півтраєкторія $\varphi_t(\varphi) \in U_\varepsilon(\Omega)$.

Дійсно, оскільки $\mathcal{T}_m$ — компактна, а $U_\varepsilon(\Omega)$ — відкрита множини, то множина $\mathcal{T}_m - U_\varepsilon(\Omega)$ компактна і складається з блукаючих точок. Тому для кожної точки $\varphi \in \mathcal{T}_m - U_\varepsilon(\Omega)$ знайдеться окіл $U(\varphi)$, який задовольняє умову (8) для $t \geq T(\varphi)$. Внаслідок компактності фазового простору виберемо з цих околів скінченну кількість $U_1, U_2, \ldots, U_N$ так, щоб

$$\sum_{k=1}^{N} U_k = \mathcal{T}_m - U_\varepsilon(\Omega),$$

і позначимо відповідні числа $T(\varphi)$ через $T_1, T_2, \ldots, T_N$.

Нехай довільна точка $\varphi \in \mathcal{T}_m - U_\varepsilon(\Omega)$ входить в окіл U_{n_1}. Згідно з (8) за час, що не перевищує T_{n_1}, вона вийде з нього назавжди. Нехай вона потрапить в окіл U_{n_2}. Його вона покине за час, що не перевищує T_{n_2}, і т. д. Нарешті, за час, що не перевищує $\sum_{k=1}^{N} T_k$, точка обов'язково потрапить в $U_\varepsilon(\Omega)$, оскільки повернутися в один із околів U_i, $i = 1, \ldots, N$, вона не може згідно з (8).

Отже, час перебування точки φ в $\mathcal{T}_m - U_\varepsilon(\Omega)$ не може перевищувати $T = \sum_{k=1}^{N} T_k$. Оскільки матриця $B(\varphi)$ належить $C(\mathcal{T}_m)$, то для довільного фіксованого $\eta > 0$ існує скінченний момент часу $T > 0$, не залежний від φ і такий, що $\left\|B\big(\varphi_t(\varphi)\big)\right\| \leq \delta + \eta$ для будь-якого $t \geq T$. Тоді

$$e^{\gamma t}\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq K + K\int_0^T \left\|B\big(\varphi_s(\varphi)\big)\right\| e^{\gamma s}\left\|\Omega_0^s(\varphi)\right\| ds +$$

$$+K\int_T^t \left\|B\big(\varphi_s(\varphi)\big)\right\| e^{\gamma s}\left\|\Omega_0^s(\varphi)\right\| ds, \quad t \geq 0.$$

Позначивши $K_1 = K + K\int_0^T \left\|B\big(\varphi_s(\varphi)\big)\right\| e^{\gamma s}\left\|\Omega_0^s(\varphi)\right\| ds$, одержимо

$$e^{\gamma t}\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq K_1 + K(\delta+\eta)\int_T^t e^{\gamma s}\left\|\Omega_0^s(\varphi)\right\| ds, \quad t \geq 0.$$

Застосувавши нерівність Гронуолла – Беллмана, отримаємо

$$e^{\gamma t}\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq K_1 e^{K(\delta+\eta)(t-T)}, \quad t \geq 0.$$

Остаточно маємо

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq K_0 e^{-(\gamma - K\delta - K\eta)t}, \quad t \geq 0,$$

де $K_0 = K_1 e^{-K(\delta+\eta)T}$. Покладемо $\delta < \dfrac{\gamma}{K}$ і виберемо η так, щоб $\gamma_0 = \gamma - K\delta - K\eta > 0$. Отже, ми довели, що існують сталі $K_0 \geq 1$ і $\gamma_0 > 0$ такі, що матрицант системи (9) задовольняє нерівності

$$\left\|\Omega_0^t(\varphi)\right\| \leq K_0 e^{-\gamma_0 t}, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

З (10) випливає, що функція

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0, \end{cases} \tag{11}$$

задовольняє оцінку $\left\|G_0(\tau, \varphi)\right\| \leq K_0 e^{-\gamma_0|\tau|}$, $\tau \in \mathbb{R}$, і є функцією Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори. Отже, система рівнянь (6) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид [11] (§ 5), який визначається співвідношенням

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Теорему 1 доведено.

2.2. Наслідки з теореми збурення та застосування. З доведеної теореми випливає важливий наслідок, який дозволяє досліджувати якісну поведінку розв'язків складних систем, що мають просту динаміку на множині неблукаючих точок Ω.

***Наслідок* 1.** *Нехай задано систему рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{12}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi), f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. *Нехай матриця* $A(\varphi)$ *є сталою на множині* Ω *і всі дійсні частини власних значень сталої матриці є від'ємними. Тоді для будь-якої функції* $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ *система* (12) *має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

Доведення. Враховуючи, що матриця $A(\varphi)|_{\varphi\in\Omega} = \tilde{A} = \mathrm{const}$, систему рівнянь (12) запишемо у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x + \big(A(\varphi) - \tilde{A}\big)x + f(\varphi). \tag{13}$$

Позначивши $B(\varphi) = A(\varphi) - \tilde{A}$, одержимо систему рівнянь, аналогічну системі (6) з теореми 1.

Наслідок 1 доведено.

***Приклад* 1.** Нехай задано систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \qquad \frac{dx}{dt} = -\cos\varphi \cdot x + f(\varphi), \tag{14}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_1$, $x \in \mathbb{R}$, $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_1)$.

Динамічна система $\dfrac{d\varphi}{dt} = -\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$ на торі $\mathcal{T}_1$ має лише одну неблукаючу точку $\varphi = 0$. Точка $\varphi = 0$ є нерухомою, а всі інші траєкторії прямують до неї при $t \to +\infty$. Оскільки

$$\mathrm{Re}\lambda\big(A(\varphi)|_{\varphi\in\Omega}\big) = \mathrm{Re}\lambda\big(-\cos(\varphi)|_{\varphi=0}\big) = -1 < 0,$$

система рівнянь (14) має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.

У рамках класичної теорії збурення інваріантного тора можна довести достатні умови існування асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду нелінійної системи рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + F(\varphi, x), \tag{15}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \bar{J}_h$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $a_1(\varphi, x) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m, \bar{J}_h)$, $F(\varphi, x) \in C^{(0,2)}(\mathcal{T}_m, \bar{J}_h)$, $\bar{J}_h = \big\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \le h, h > 0\big\}$. Систему рівнянь (15) можна записати у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a_1(\varphi, x), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + A_1(\varphi, x)x + f(\varphi), \tag{16}$$

де $A_1(\varphi, x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial F(\varphi, \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$, $f(\varphi) = F(\varphi, 0)$.

***Наслідок* 2.** *Нехай у системі рівнянь* (15) *матриця* $A(\varphi)$ *є сталою на множині неблукаючих точок* Ω *і дійсні частини всіх власних значень сталої матриці є від'ємними*:

$$A(\varphi)|_{\varphi\in\Omega} = \tilde{A}, \qquad \mathrm{Re}\lambda_j(\tilde{A}) < 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Тоді існують достатньо малі сталі η *і* δ *та достатньо малі сталі Ліпшиця* L_1 *та* L_2 *такі, що для довільних функцій* $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $a_1(\varphi, x) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m, \bar{J}_h)$, $F(\varphi, x) \in C^{(0,2)}(\mathcal{T}_m, \bar{J}_h)$ *таких, що*

$$\max_{\varphi\in\mathcal{T}_m, x\in\bar{J}_h} \big\|a_1(\varphi, x)\big\| \le \eta, \qquad \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m, x\in\bar{J}_h} \big\|A_1(\varphi, x)\big\| \le \delta,$$

$$\big\|a_1(\varphi, x') - a_1(\varphi, x'')\big\| \le L_1\big\|x' - x''\big\|, \qquad \big\|A_1(\varphi, x') - A_1(\varphi, x'')\big\| \le L_2\big\|x' - x''\big\|$$

для будь-яких $x', x'' \in \bar{J}_h$, *система рівнянь* (15) *має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з [5]. Наведемо його короткий план. З наслідку 1 випливає, що система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi) \tag{17}$$

має асимптотично стійкий інваріантний тор. Інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь (16) шукатимемо методом послідовних наближень. За початковий многовид $\mathbb{M}_0$ покладемо $x = 0$, за $\mathbb{M}_k$ — інваріантний тор системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a_1(\varphi, u_{k-1}(\varphi)), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + A_1(\varphi, u_{k-1}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{18}$$

де $x = u_{k-1}(\varphi)$ — інваріантний тороїдальний многовид на $(k-1)$-му кроці. Як відомо [3] (гл. 2, § 10), інваріантний тор системи рівнянь (18) існує на кожному кроці за рахунок мализни сталих η та δ. Збіжність послідовності функцій $\{u_k(\varphi)\}$ забезпечується достатньою мализною сталих Ліпшиця L_1 та L_2.

Наслідок 2 доведено.

Розглянемо випадок, коли функція $A\big(\varphi_t(\varphi)\big)$ є періодичною по t для $\varphi \in \Omega$. Зокрема, така ситуація реалізується, коли множина Ω складається з однієї траєкторії, що є циклом.

***Наслідок* 3.** *Нехай задано систему рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{19}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi), f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. *Нехай матриця* $A\big(\varphi_t(\varphi)\big)$ *є періодичною по* t *при* $\varphi \in \Omega$ *і всі мультиплікатори лінійної системи* $\dfrac{dx}{dt} = A\big(\varphi_t(\varphi)\big)x$, $\varphi \in \Omega$, *містяться всередині одиничного кола. Тоді для будь-якої функції* $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ *система рівнянь* (19) *має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

Доведення Для довільної точки $\varphi \in \mathcal{T}_m$ і для довільного фіксованого числа $\eta > 0$ існують точка $\varphi^* \in \Omega$ та момент часу $T > 0$ такі, що $\Big\|A\big(\varphi_t(\varphi)\big) - A\big(\varphi_t(\varphi^*)\big)\Big\| \le \eta$ для всіх $t \ge T$. Розглянемо однорідну системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A\big(\varphi_t(\varphi^*)\big)x + \big(A\big(\varphi_t(\varphi)\big) - A\big(\varphi_t(\varphi^*)\big)\big)\,x, \tag{20}$$

яка залежить від $\varphi, \varphi^* \in \mathcal{T}_m$, як від параметрів. Оскільки матриця $A\big(\varphi_t(\varphi^*)\big)$ є періодичною по t і всі мультиплікатори системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A\big(\varphi_t(\varphi^*)\big)x \tag{21}$$

лежать всередині одиничного кола, то матрицант X_τ^t системи рівнянь (21) задовольняє оцінку $\big\|X_0^t\big\| \le Ke^{-\gamma t}$ для всіх $t \ge 0$ і деяких $K \ge 1$, $\gamma > 0$. Міркуючи, як і при доведенні теореми 1, одержуємо, що для матриканта Ω_0^t системи рівнянь $\dfrac{dx}{dt} = A(\varphi_t\big(\varphi)\big)x$ справедлива оцінка $\big\|\Omega_0^t\big\| \le K_1e^{-\gamma_1 t}$ для всіх $t \ge 0$ і деяких $K_1 \ge 1$, $\gamma_1 > 0$, чого достатньо для існування асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду системи рівнянь (19).

Наслідок 3 доведено.

Зауважимо, що для знаходження мультиплікаторів періодичної системи рівнянь необхідно побудувати фундаментальну матрицю, що в загальному випадку є складною задачею. Однак на множині Ω матриця $A(\varphi_t(\varphi))$, $\varphi \in \Omega$, може мати більш просту структуру і є придатнішою для дослідження. Для ефективного використання наслідку 3 можна також використати метод наближеного відшукання мультиплікаторів [2] (§ 3.18).

Узагальнюючи наслідки 1 та 3, можна сформулювати достатні умови існування асимптотично стійкого інваріантного тора лінійного розширення динамічної системи, що має просту структуру граничних множин і рекурентних траєкторій.

Наслідок 4. *Нехай множина неблукаючих точок Ω динамічної системи $\dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, складається лише із скінченної кількості стаціонарних точок $\{\bar\varphi_1, \ldots, \bar\varphi_k\} = \Phi$ та циклів $\{\mathbb{C}_1, \ldots, \mathbb{C}_l\}$ і дійсні частини всіх власних значень матриць $A(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, є від'ємними, а мультиплікатори лінійних систем $\dfrac{dx}{dt} = A\big(\varphi_t(\varphi)\big)x$, $\varphi \in \mathbb{C}_i$, $i = 1, \ldots, l$, лежать всередині одиничного кола. Тоді система рівнянь* (19) *має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

Висновки. Техніка доведення теореми 1 є достатньо класичною та гнучкою. Застосовуючи нерівності типу Гронуолла – Беллмана для різних класів функцій, можна одержати аналогічні результати для інших класів диференціальних рівнянь, зокрема для імпульсних систем [8, 10, 12]. Так, в роботі [9] доведено аналог наслідку 1 для лінійного розширення динамічної системи на торі з імпульсними збуреннями в нефіксовані моменти часу.

Доведені в роботі теореми та наслідки дозволяють ефективно досліджувати поведінку розв'язків достатньо широкого класу багаточастотних систем. Зокрема, лінійні розширення динамічної системи на торі, що має просту структуру множини неблукаючих точок, придатні для якісного аналізу без знаходження матриканта.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1992. – 272 с.
4. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: ОГИЗ, 1947. – 448 с.

5. *Перестюк М. О., Фекета П. В.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2009. – Вип. 18. – С. 106 – 112.
6. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. I. Аналитические методы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970.
7. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Наук. думка, 1987.
9. *Perestyuk M., Feketa P.* Invariant sets of impulsive differential equations with particularities in ω-limit set // Abstract and Appl. Anal. – 2011. – **2011**. – Article ID 970469. – 14 p.
10. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities. – Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
11. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
12. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995.

Одержано 23.05.12,
після доопрацювання — 26.05.13