УДК 517.95

Г. А. Снітко (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА ОДНОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

The unique solvability conditions of the inverse problem of finding the minor coefficient with two unknown time-dependent parameters in a one-dimensional parabolic equation with integral overdetermination conditions in a free boundary domain are established.

Установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения младшего коэффициента с двумя неизвестными, зависящими от времени параметрами в одномерном параболическом уравнении с интегральными условиями переопределения в области со свободной границей.

1. Вступ. Задача, яку розглянуто в роботі, поєднує два типи задач – коефіцієнтну обернену задачу та задачу з вільною межею. Кожен із цих типів задач досліджували раніше. Зокрема, в [1, 2] досліджено обернену задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні з умовою перевизначення третього роду в області з відомою межею. В [1] встановлено умови глобального існування розв'язку оберненої задачі, а в [2] отримано умови локального існування розв'язку задачі, а також умови, за яких задача не може мати глобального розв'язку. В [3] знайдено умови локального за часом існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних розв'язку такої ж оберненої задачі з інтегральною умовою перевизначення. В [4, 5] встановлено умови однозначної розв'язності обернених задач визначення коефіцієнтів $(a(t), b(t))$ і $(a_0(t), a_1(t))$ у параболічних рівняннях

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),$$

$$u_t = (a_0(t) + xa_1(t))u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,h) \times (0,T).$$

В [6, 7] знайдено умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з невідомим, залежним від часу старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої є невідомою. У [8 – 10] досліджено обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при першій похідній за просторовою змінною невідомої функції в одновимірному параболічному рівнянні в області, частина або вся межа якої є невідомою. Наша мета — встановити умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення молодшого коефіцієнта параболічного рівняння з двома невідомими, залежними від часу параметрами в області з вільною межею.

2. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t)\colon h_1(t) < x < h_2(t),\ 0 < t < T\}$, де $h_1 = h_1(t),\ h_2 = h_2(t)$ — невідомі функції, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $b_1(t),\ b_2(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [h_1(0), h_2(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(h_1(t),t)=\mu_1(t),\quad u(h_2(t),t)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} x^{i-3}u(x,t)dx=\mu_i(t),\quad i=\overline{3,6},\quad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $h_1(0)=h_{01}$ — задане число.

Заміною змінної $y=\dfrac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$ задачу (1) – (4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h_1(t),\, h_3(t),\, b_1(t),\, b_2(t),\, v(y,t))$, де $h_3(t)=h_2(t)-h_1(t)$, $v(y,t)=u(yh_3(t)+h_1(t),t)$, в області з відомою межею $Q_T=\{(y,t):0<y<1, 0<t<T\}$:

$$v_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,v_{yy}+\frac{b_1(t)(yh_3(t)+h_1(t))+b_2(t)+h_1'(t)+y\,h_3'(t)}{h_3(t)}v_y+$$

$$+c(yh_3(t)+h_1(t),t)\,v+f(yh_3(t)+h_1(t),t),\quad (y,t)\in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0)=\varphi(yh_3(0)+h_1(0)),\quad y\in[0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t)=\mu_1(t),\quad v(1,t)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{7}$$

$$h_3(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_3(t),\quad t\in[0,T], \tag{8}$$

$$h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy+h_1(t)\mu_3(t)=\mu_4(t),\quad t\in[0,T], \tag{9}$$

$$h_3^3(t)\int\limits_0^1 y^2v(y,t)dy+2h_1(t)\mu_4(t)-h_1^2(t)\mu_3(t)=\mu_5(t),\quad t\in[0,T], \tag{10}$$

$$h_3^4(t)\int\limits_0^1 y^3v(y,t)dy+3h_1(t)\mu_5(t)-3h_1^2(t)\mu_4(t)+h_1^3(t)\mu_3(t)=\mu_6(t),\quad t\in[0,T], \tag{11}$$

де $h_1(0)=h_{01}$ — задане число.

3. Існування розв'язку задачі (5) – (11).

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови*:

1) $a,\, c,\, f\in C^{1,0}(\mathbb{R}\times[0,T])$, $\varphi\in C^2[h_{01},h_{02}]$, $\mu_i\in C^1[0,T]$, $i=\overline{1,6}$;

2) $0<a_0\le a(x,t)\le a_1$, $c(x,t)\le 0$, $f(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$, $\varphi(x)\ge\varphi_0>0$, $x\in[h_{01},\infty)$, $\varphi'(x)>0$, $x\in[h_{01},h_{02}]$, $(h_{02}-x)\varphi'(h_{02}+h_{01}-x)-(x-h_{01})\varphi'(x)>0$, $\varphi'(x)-\varphi'(h_{02}+h_{01}-x)>0$, $x\in\left[h_{01},\dfrac{h_{01}+h_{02}}{2}\right)$, $\mu_i(t)>0$, $i=\overline{1,3}$, $t\in[0,T]$, *де* $h_{02}=h_2(0)$ — *розв'язок рівняння* $\displaystyle\int_{h_{01}}^{h_2(0)}\varphi(x)dx=\mu_3(0)$;

3) *умови узгодження нульового та першого порядків.*

Тоді можна вказати число T_0, $0 < T_0 \leq T$, *яке визначається вихідними даними, таке, що існує розв'язок* $(h_1, h_3, b_1, b_2, v) \in (C^1[0,T_0])^2 \times (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, *задачі* $(5)-(11)$.

Доведення. Згідно з умовами теореми існує єдиний розв'язок $h_{02} = h_2(0)$ рівняння $\int_{h_{01}}^{h_2(0)} \varphi(x)dx = \mu_3(0)$. Позначимо $h_{03} = h_{02} - h_{01}$. Встановимо оцінки функцій $h_1(t)$, $h_3(t)$. З умов (8), (9) отримуємо

$$h_3(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy}, \qquad t \in [0,T], \tag{12}$$

$$h_1(t) = \frac{\mu_4(t)}{\mu_3(t)} - \frac{h_3^2(t)}{\mu_3(t)} \int_0^1 yv(y,t)dy, \qquad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Використовуючи принцип максимуму [11] для розв'язку прямої задачі (5)–(7), одержуємо

$$v(y,t) \geq M_0 > 0, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

де стала M_0 визначається вихідними даними. Тоді з (12), (13) отримуємо наступні нерівності:

$$h_3(t) \leq \frac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_3(t) \equiv H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T],$$

$$|h_1(t)| \leq \frac{|\mu_4(t)|}{\mu_3(t)} + \mu_3(t)\left(\int_0^1 v(y,t)dy\right)^{-1} \leq \max_{[0,T]} \frac{|\mu_4(t)|}{\mu_3(t)} + \frac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_3(t) \equiv H_2 < \infty, \quad t \in [0,T].$$

Для оцінки знизу $h_3(t)$ оцінимо $v(y,t)$ зверху. Із принципу максимуму маємо

$$v(y,t) \leq M_1 < \infty, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

де M_1 визначається вихідними даними. Тоді для розв'язків рівняння (12) виконується нерівність

$$h_3(t) \geq \frac{1}{M_1} \min_{[0,T]} \mu_3(t) \equiv H_0 > 0, \qquad t \in [0,T].$$

Таким чином,

$$M_0 \leq v(y,t) \leq M_1, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \quad |h_1(t)| \leq H_2, \quad H_0 \leq h_3(t) \leq H_1, \qquad t \in [0,T]. \tag{14}$$

Доведення існування розв'язку задачі (5)–(11) базується на застосуванні теореми Шаудера про нерухому точку. Зведемо задачу до системи рівнянь. Введемо нову функцію

$$\widetilde{v}(y,t) = v(y,t) - \varphi(yh_{03} + h_{01}) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\widetilde{v}(y,t)$ одержуємо задачу

$$\widetilde{v}_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,\widetilde{v}_{yy}+\frac{b_1(t)(yh_3(t)+h_1(t))+b_2(t)+h_1'(t)+y\,h_3'(t)}{h_3(t)}(\widetilde{v}_y+d(y,t))+$$

$$+c(yh_3(t)+h_1(t),t)\widetilde{v}+F(y,t),\quad (y,t)\in Q_T, \tag{15}$$

$$\widetilde{v}(y,0)=0,\quad y\in[0,1],$$

$$\widetilde{v}(0,t)=\widetilde{v}(1,t)=0,\quad t\in[0,T],$$

де

$$d(y,t)=h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01})+\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0),$$

$$F(y,t)=h_{03}^2\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,\varphi''(yh_{03}+h_{01})+c(yh_3(t)+h_1(t),t)\times$$

$$\times\big(\varphi(yh_{03}+h_{01})+y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+(1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0))\big)+$$

$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t)-y\mu_2'(t)+\mu_1'(t)(y-1).$$

За допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\widetilde{v}_t=\frac{a(yh_3(t)+h_1(t),t)}{h_3^2(t)}\,\widetilde{v}_{yy}+c(yh_3(t)+h_1(t),t)\,\widetilde{v}$$

задачу (15) зводимо до рівняння

$$\widetilde{v}(y,t)=\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Bigg(\frac{b_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau))+b_2(\tau)+h_1'(\tau)+\eta h_3'(\tau)}{h_3(\tau)}(\widetilde{v}_\eta(\eta,\tau)+$$

$$+d(\eta,\tau))+F(\eta,\tau)\Bigg)d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{16}$$

Позначимо $w(y,t)=v_y(y,t)$, $p(t)=h_1'(t)$, $r(t)=h_3'(t)$. Запишемо (16) у вигляді

$$v(y,t)=\varphi(yh_{03}+h_{01})+y(\mu_2(t)-\mu_2(0))+(1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0))+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{b_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau))+b_2(\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}w(\eta,\tau)+F(\eta,\tau)\Bigg)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{17}$$

Здиференціювавши (17) за змінною y, отримаємо

$$w(y,t)=h_{03}\varphi'(yh_{03}+h_{01})+\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0)+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{b_1(\tau)(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau))+b_2(\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}w(\eta,\tau)+F(\eta,\tau)\Bigg)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{18}$$

Здиференціювавши (8) – (11) за змінною t і використавши (5), одержимо

$$b_1(t) = \Bigg[h_3(t)\int\limits_0^1 \big((6h_1(t)\mu_4(t) - 3\mu_5(t) - 3h_1^2(t)\mu_3(t) + 2h_3(t)\mu_4(t) - 2h_1(t)h_3(t)\mu_3(t))\times$$

$$\times(w(y,t)(h_3(t)ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t) + a(yh_3(t)+h_1(t),t)) - h_3^2(t)y(f(yh_3(t)+h_1(t),t)+$$

$$+v(y,t)c(yh_3(t)+h_1(t),t))) + y(3\mu_5(t) - h_3^2(t)\mu_3(t) - 6h_1(t)\mu_4(t) + 3h_1^2(t)\mu_3(t))\times$$

$$\times((ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t)h_3(t) + 2a(yh_3(t)+h_1(t),t))w(y,t) - h_3^2(t)y(c(yh_3(t)+h_1(t),t)\times$$

$$\times v(y,t) + f(yh_3(t)+h_1(t),t))) + h_3(t)y^2(h_3(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t) + 2h_1(t)\mu_3(t))\times$$

$$\times((h_3(t)ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t) + 3a(yh_3(t)+h_1(t),t))w(y,t) - h_3^2(t)y(c(yh_3(t)+h_1(t),t)\times$$

$$\times v(y,t) + f(yh_3(t)+h_1(t),t)))\big)dy + \mu_6'(t)(h_3(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t) + 2h_1(t)\mu_3(t))+$$

$$+\mu_5'(t)(3\mu_5(t) - h_3^2(t)\mu_3(t) - 3h_1(t)h_3(t)\mu_3(t) - 3h_1^2(t)\mu_3(t)) + \mu_4'(t)(6h_1^2(t)\mu_4(t)-$$

$$-6h_1(t)\mu_5(t) - 3h_3(t)\mu_5(t) + 6h_1(t)h_3(t)\mu_4(t) + 2h_3^2(t)\mu_4(t)) + \mu_3'(t)h_1(t)(3h_1(t)\mu_5(t)+$$

$$+h_1^3(t)\mu_3(t) - 4h_1^2(t)\mu_4(t) + 3h_3(t)\mu_5(t) - 6h_1(t)h_3(t)\mu_4(t) + 2h_1^2(t)h_3(t)\mu_3(t)-$$

$$-2h_3^2(t)\mu_4(t) + h_1(t)h_3^2(t)\mu_3(t))\Bigg]\Delta^{-1}(t), \qquad t\in[0,T], \tag{19}$$

$$b_2(t) = \Bigg[h_3(t)\int\limits_0^1 \big((4h_1(t)h_3(t)\mu_4(t) - 9h_1(t)\mu_5(t) + 6h_1^2(t)\mu_4(t) - 3h_3(t)\mu_5(t)-$$

$$-h_1^3(t)\mu_3(t) + 4\mu_6(t) - h_1^2(t)h_3(t)\mu_3(t))(w(y,t)(h_3(t)ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t) + a(yh_3(t)+$$

$$+h_1(t),t)) - h_3^2(t)y(v(y,t)c(yh_3(t)+h_1(t),t) + f(yh_3(t)+h_1(t),t))) + y(2h_3^2(t)\mu_4(t)-$$

$$-4\mu_6(t) - 6h_1^2(t)\mu_4(t) + 9h_1(t)\mu_5(t) + h_1^3(t)\mu_3(t) - h_1(t)h_3^2(t)\mu_3(t))(w(y,t)\times$$

$$\times(h_3(t)ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t) + 2a(yh_3(t)+h_1(t),t)) - h_3^2(t)y(v(y,t)c(yh_3(t)+h_1(t),t)+$$

$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t))) + h_3(t)y^2(h_1(t)h_3(t)\mu_3(t) - 2h_3(t)\mu_4(t) + 3\mu_5(t)-$$

$$-4h_1(t)\mu_4(t) + h_1^2(t)\mu_3(t))(w(y,t)(h_3(t)ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t) + 3a(yh_3(t)+h_1(t),t))-$$

$$-h_3^2(t)y(v(y,t)c(yh_3(t)+h_1(t),t) + f(yh_3(t)+h_1(t),t)))\big)dy + \mu_6'(t)(h_1(t)h_3(t)\mu_3(t)-$$

$$-2h_3(t)\mu_4(t) + 3\mu_5(t) - 4h_1(t)\mu_4(t) + h_1^2(t)\mu_3(t)) + \mu_5'(t)(2h_3^2(t)\mu_4(t) - 4\mu_6(t)-$$

$$-h_1(t)h_3^2(t)\mu_3(t) - 2h_1^3(t)\mu_3(t) + 6h_1^2(t)\mu_4(t) + 6h_1(t)h_3(t)\mu_4(t) - 3h_1^2(t)h_3(t)\mu_3(t))+$$

$$+\mu_4'(t)(h_1^4(t)\mu_3(t) + 8h_1(t)\mu_6(t) + 4h_3(t)\mu_6(t) - 9h_1^2(t)\mu_5(t) - 3h_3^2(t)\mu_5(t)-$$

$$-9h_1(t)h_3(t)\mu_5(t) + h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_3(t) + 2h_1^3(t)h_3(t)\mu_3(t)) + \mu_3'(t)(6h_1^2(t)\mu_5(t)-$$

$$-4h_1(t)\mu_6(t) - 2h_1^3(t)\mu_4(t) + 3h_3^2(t)\mu_5(t) - 2h_1(t)h_3^2(t)\mu_4(t) + 9h_1(t)h_3(t)\mu_5(t)-$$

$$\left.-4h_3(t)\mu_6(t) - 4h_1^2(t)h_3(t)\mu_4(t))h_1(t)\right]\Delta^{-1}(t), \qquad t \in [0,T], \tag{20}$$

$$p(t) = \Bigg[\int\limits_0^1 \big(h_3(t)\Delta(t)(h_3(t)(f(yh_3(t)+h_1(t),t) + c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t))-$$

$$-a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t)) + (3h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t) - 9\mu_5^2(t) + 12h_1(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-$$

$$-12h_1^2(t)\mu_4^2(t) + 4h_1^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - h_1^4(t)\mu_3^2(t) + 8\mu_4(t)\mu_6(t) - 8h_1(t)\mu_3(t)\mu_6(t)+$$

$$+6h_1^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t) - 6h_1(t)h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 12h_1^2(t)\ h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+$$

$$+3h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_3^2(t) + 4h_1^3(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_3(t) - 2h_3^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 6h_1(t)h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+$$

$$+2h_1(t)h_3^3(t)\mu_3^2(t) + 3h_1^2(t)h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_3(t) + 12h_1(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t) + 3h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_5(t)-$$

$$-4h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_6(t))(w(y,t)(yh_3(t)a_x(yh_3(t)+h_1(t),t) + a(yh_3(t)+h_1(t),t))-$$

$$-h_3^2(t)y(v(y,t)c(yh_3(t)+h_1(t),t) + f(yh_3(t)+h_1(t),t))) + h_3(t)y(4h_3(t)\mu_1(t)\mu_6(t)-$$

$$-4\mu_3(t)\mu_6(t) - 2h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + 12h_1^2(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_4(t) - 12h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_5(t)+$$

$$+6h_1(t)\mu_3(t)\mu_5(t) - 4h_1^3(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_3(t) + 2h_1(t)h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_3(t) + h_3^3(t)\mu_3^2(t)-$$

$$-3h_3(t)\mu_3(t)\mu_5(t) + 6\mu_4(t)\mu_5(t) + 6h_1(t)h_3(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 12h_1(t)\mu_4^2(t)-$$

$$-3h_1^2(t)h_3(t)\mu_3^2(t) + 6h_1^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 2h_1^3(t)\mu_3^2(t))((ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t)h_3(t)+$$

$$+2a(yh_3(t)+h_1(t),t))w(y,t) - h_3^2(t)y(v(y,t)c(yh_3(t)+h_1(t),t) + f(yh_3(t)+h_1(t),t)))+$$

$$+h_3^2(t)y^2(2h_3(t)\mu_3(t)\mu_4(t) + 6h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_4(t) - 4\mu_4^2(t) + 2h_1(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-h_3^2(t)\mu_3^2(t) - 2h_1(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_3(t) - 2h_1(t)h_3(t)\mu_3^2(t) - 3h_1^2(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_3(t)-$$

$$-2h_1^2(t)\mu_3^2(t) + 2h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) - 3h_3(t)\mu_1(t)\mu_5(t) + 3\mu_3(t)\mu_5(t) + h_1^2(t)\mu_3^2(t))\times$$

$$\times(w(y,t)(h_3(t)ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t) + 3a(yh_3(t)+h_1(t),t))-$$

$$-yh_3^2(t)(f(yh_3(t)+h_1(t),t) + c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)))\big)dy - a(h_1(t),t)\times$$

$$\times\Delta(t)w(0,t) + \mu_6'(t)((h_3(t)+h_1(t))\mu_3(t)(2\mu_4(t) - (h_3(t)+h_1(t))\mu_3(t))+$$

$$+h_3(t)\mu_1(t)(2\mu_4(t)(3h_1(t)+h_3(t)) - h_1(t)\mu_3(t)(3h_1(t)+2h_3(t))) + 3\mu_5(t)(\mu_3(t)-$$

$$-h_3(t)\mu_1(t))) + \mu_5'(t)(h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_3(t)(2h_3^2(t) + 5h_1^2(t) + 6h_1(t)h_3(t))+$$

$$+h_3(t)\mu_1(t)(4\mu_6(t)-3h_1(t)\mu_5(t))-4\mu_3(t)\mu_6(t)+2\mu_4(t)(3\mu_5(t)-h_3^3(t)\mu_3(t))+$$

$$+(h_1(t)+h_3(t))(\mu_3(t)((h_1(t)+h_3(t))^2\mu_3(t)-3\mu_5(t))-6h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_4(t)))+$$

$$+\mu_4'(t)((h_1(t)+h_3(t))^2(3\mu_3(t)\mu_5(t)-h_1^2(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_3(t)-2\mu_3(t)\mu_4(t)(h_1(t)+h_3(t)))+$$

$$+3h_3(t)\mu_1(t)\mu_5(t)(5h_1^2(t)+h_3^2(t)+4h_1(t)h_3(t))-4h_3(t)\mu_1(t)\mu_6(t)(2h_1(t)+h_3(t))-$$

$$-2h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_4(t)(3h_1^2(t)+h_3^2(t)+3h_1(t)h_3(t))-9\mu_5^2(t)+8\mu_4(t)\mu_6(t))+$$

$$+\mu_3'(t)((h_1(t)+h_3(t))(4h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_6(t)+9\mu_5^2(t)-8\mu_4(t)\mu_6(t)+(h_1(t)+$$

$$+h_3(t))(4\mu_3(t)\mu_6(t)-6\mu_4(t)\mu_5(t)-h_1^3(t)h_3(t)\mu_1(t)\mu_3(t)+(h_1(t)+h_3(t))\times$$

$$\times(4\mu_4^2(t)-3\mu_3(t)\mu_5(t))))+h_1(t)h_3(t)\mu_1(t)(2h_1(t)\mu_4(t)(2h_3^2(t)+5h_1(t)h_3(t)+3h_1^2(t))-$$

$$\left.-3\mu_5(t)(h_3^2(t)+4h_1(t)h_3(t)+3h_1^2(t))))\right]\big(h_3(t)\mu_1(t)\Delta(t)\big)^{-1},\qquad t\in[0,T], \tag{21}$$

$$r(t)=\Bigg[\int\limits_0^1\big(h_3(t)\mu_2(t)(a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t)-h_3(t)(f(yh_3(t)+h_1(t),t)+$$

$$+c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)))\Delta(t)+((\mu_2(t)-\mu_1(t))(9\mu_5^2(t)-3h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-$$

$$-12h_1(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-12h_1^2(t)\mu_4^2(t)-4h_1^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+h_1^4(t)\mu_3^2(t)-8\mu_4(t)\mu_6(t)+$$

$$+8h_1(t)\mu_3(t)\mu_6(t)-6h_1^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t))+6h_1(t)h_3^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+$$

$$+6h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-3h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_2(t)\mu_3^2(t)+2h_3^2(t)\mu_2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-2h_1(t)h_3^3(t)\mu_2(t)\mu_3^2(t)+3h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-3h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-$$

$$-6h_1(t)h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+6h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+3h_1^2(t)h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-$$

$$-2h_3^4(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+2h_1(t)h_3^4(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_3(t))(w(y,t)(yh_3(t)a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)\times$$

$$\times a(h_1(t)+yh_3(t),t))-h_3^2(t)y(v(y,t)c(yh_3(t)+h_1(t),t)+f(yh_3(t)+h_1(t),t)))+$$

$$+h_3(t)y((4\mu_3(t)\mu_6(t)-6h_1(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-6\mu_4(t)\mu_5(t)+12h_1(t)\mu_4^2(t)-6h_1^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+$$

$$+2h_1^3(t)\mu_3^2(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))-h_3^3(t)\mu_2(t)\mu_3^2(t)+3h_3(t)\mu_2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-$$

$$-6h_1(t)h_3(t)\mu_2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+3h_1^2(t)h_3(t)\mu_2(t)\mu_3^2(t)+h_3^4(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-3h_3^2(t)\times$$

$$\times\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_5(t)+6h_1(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-3h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_3(t))(w(y,t)(h_3(t)y\times$$

$$\times a_x(yh_3(t)+h_1(t),t)+2a(yh_3(t)+h_1(t),t))-y(c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)+$$

$$+f(yh_3(t)+h_1(t),t))h_3^2(t))+h_3^2(t)y^2((\mu_2(t)-\mu_1(t))(4\mu_4^2(t)-2h_1(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+$$

$$+2h_1^2(t)\mu_3^2(t)-3\mu_3(t)\mu_5(t)-h_1^2(t)\mu_3^2(t))-2h_3(t)\mu_2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+h_3^2(t)\mu_2(t)\mu_3^2(t)+$$

$$+2h_1(t)h_3(t)\mu_2(t)\mu_3^2(t)+2h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_3(t)-$$

$$-2h_1(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_3(t))(w(y,t)(h_3(t)ya_x(yh_3(t)+h_1(t),t)+3a(yh_3(t)+h_1(t),t))-$$

$$-yh_3^2(t)(f(yh_3(t)+h_1(t),t)+c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)))\big)dy+\Delta(t)(w(0,t)\times$$

$$\times a(h_1(t),t)\mu_2(t)-a(h_1(t)+h_3(t),t)\mu_1(t)w(1,t))+\mu_6'(t)((\mu_2(t)-\mu_1(t))(4\mu_4^2(t)-$$

$$-3\mu_3(t)\mu_5(t)-2h_1(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+h_1^2(t)\mu_3^2(t))+\mu_2(t)(h_3^2(t)\mu_3^2(t)-2h_3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+$$

$$+2h_1(t)h_3(t)\mu_3^2(t)-h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_3(t)+2h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)-2h_1(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_3(t)))+$$

$$+((\mu_2(t)-\mu_1(t))(4\mu_3(t)\mu_6(t)-6\mu_4(t)\mu_5(t)+3h_1(t)\mu_3(t)\mu_5(t)+2h_3^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-h_1^3(t)\mu_3^2(t)-2h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t))+\mu_2(t)(3h_3(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-h_3^3(t)\mu_3^2(t)-3h_1(t)h_3^2(t)\mu_3^2(t)-$$

$$-3h_1^2(t)h_3(t)\mu_3^2(t)-3h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)+h_3^4(t)\mu_1(t)\mu_3(t)+3h_1(t)h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_3(t)+$$

$$+3h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_3(t)))\mu_5'(t)+\mu_4'(t)((\mu_2(t)-\mu_1(t))(2h_1^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-3h_1^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)+$$

$$+9\mu_5^2(t)-8\mu_4(t)\mu_6(t))+\mu_2(t)(6h_1^2(t)h_3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+6h_1(t)h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+$$

$$+2h_3^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-3h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-6h_1(t)h_3(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-6h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+$$

$$+6h_1(t)h_3^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)+3h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_5(t)-6h_1(t)h_3^3(t)\mu_1(t)\mu_4(t)-2h_3^4(t)\mu_1(t)\mu_4(t))+$$

$$+((\mu_2(t)-\mu_1(t))(3h_1^3(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-9h_1(t)\mu_5^2(t)+6h_1^2(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-4h_1^3(t)\mu_4^2(t)+$$

$$+8h_1(t)\mu_4(t)\mu_6(t)-4h_1^2(t)\mu_3(t)\mu_6(t))+\mu_2(t)(9h_1^2(t)h_3(t)\mu_3(t)\mu_5(t)+$$

$$+9h_1(t)h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+6h_3^2(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-12h_1(t)h_3^2(t)\mu_4^2(t)+3h_3^3(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-$$

$$-9h_3(t)\mu_5^2(t)+12h_1(t)h_3(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-12h_1^2(t)h_3(t)\mu_4^2(t)-4h_3^3(t)\mu_4^2(t)-$$

$$-4h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_6(t)+8h_3(t)\mu_4(t)\mu_6(t)-8h_1(t)h_3(t)\mu_3(t)\mu_6(t)+\mu_1(t)(4h_1^3(t)h_3^2(t)\mu_4(t)-$$

$$-3h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_5(t)-h_1^4(t)h_3^2(t)\mu_3(t)-3h_1(t)h_3^3(t)\mu_5(t)+6h_1^2(t)h_3^3(t)\mu_4(t)-$$

$$-2h_1^3(t)h_3^3(t)\mu_3(t)+2h_1(t)h_3^4(t)\mu_4(t)-h_1^2(t)h_3^4(t)\mu_3(t))))\mu_3'(t)\Big]\times$$

$$\times\big(h_3(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\Delta(t)\big)^{-1},\qquad t\in[0,T], \tag{22}$$

де

$$\Delta(t)=6h_3(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-12h_1(t)h_3(t)\mu_4^2(t)+6h_1^2(t)h_3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-2h_1^3(t)h_3(t)\mu_3^2(t)+$$

$$+3h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-9\mu_5^2(t)+12h_1(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+2h_1(t)h_3^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+4h_1^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-12h_1^2(t)\mu_4^2(t)-h_1^4(t)\mu_3^2(t)-4h_3^2(t)\mu_4^2(t)-h_1^2(t)h_3^2(t)\mu_3^2(t)-4h_3(t)\mu_3(t)\mu_6(t)-$$

$$-8h_1(t)\mu_3(t)\mu_6(t)+8\mu_4(t)\mu_6(t)+6h_1(t)h_3(t)\mu_3(t)\mu_5(t)+6h_1^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t).$$

Отже, задачу (5) – (11) зведено до системи інтегральних рівнянь (12), (13), (17) – (22) відносно невідомих $(h_3(t), h_1(t), v(y,t), w(y,t), b_1(t), b_2(t), p(t), r(t))$. Задача (5) – (11) і вказана система рівнянь еквівалентні в такому сенсі: якщо $(h_1, h_3, b_1, b_2, v) \in (C^1[0,T])^2 \times \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5) – (11), то $(h_3, h_1, v, w, b_1, b_2, p, r) \in (C[0,T])^2 \times \times (C(\overline{Q}_T))^2 \times (C[0,T])^4$ є розв'язком системи рівнянь (12), (13), (17) – (22), і навпаки.

Запишемо $\Delta(t)$ у вигляді

$$\Delta(t)=\frac{h_3^6(t)}{2}\Bigg[\int_0^1 y(1-y)w(y,t)dy\int_0^1 y^2(1-y)(2y-1)w(y,t)dy+$$

$$+\int_0^1 y^2(1-y)w(y,t)dy\int_0^1 y(1-y)(1-2y)w(y,t)dy\Bigg].$$

Згідно з припущеннями теореми з (18) можемо зробити висновок про існування такого числа $t_1,\ 0<t_1\le T$, що

$$w(y,t)\ge\frac{h_{03}}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_{03}+h_{01})>0, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_{t_1}.$$

Тоді

$$\int_0^1 y(1-y)w(y,t)dy>0, \quad \int_0^1 y^2(1-y)w(y,t)dy>0, \quad t\in[0,t_1].$$

Подамо вирази $\int_0^1 y(1-y)(1-2y)w(y,t)dy$, $\int_0^1 y^2(1-y)(2y-1)w(y,t)dy$ у вигляді

$$\int_0^1 y(1-y)(1-2y)w(y,t)dy=\int_0^{1/2} y(1-y)(1-2y)(w(y,t)-w(1-y,t))dy, \tag{23}$$

$$\int_0^1 y^2(1-y)(2y-1)w(y,t)dy=\int_0^{1/2} y(1-y)(1-2y)((1-y)w(1-y,t)-yw(y,t))dy. \tag{24}$$

Підставимо (18) у (23). Всі доданки, крім першого, при $t\to 0$ прямують до нуля. Тоді можемо вважати, що існує таке число $t_2,\ 0<t_2\le T$, що

$$\int_0^1 y(1-y)(1-2y)w(y,t)dy\ge\frac{h_{03}}{2}\int_0^{1/2} y(1-y)(1-2y)\times$$

$$\times(\varphi'(yh_{03}+h_{01})-\varphi'(h_{03}(1-y)+h_{01}))dy>0,\quad t\in[0,t_2].$$

Підставивши (18) у (24), можемо зробити висновок про існування такого числа t_3, $0<t_3\leq T$, що

$$\int\limits_0^1 y^2(1-y)(2y-1)w(y,t)dy\geq\frac{h_{03}}{2}\int\limits_0^{1/2}y(1-y)(1-2y)\times$$

$$\times((1-y)\varphi'(h_{03}(1-y)+h_{01})-y\varphi'(yh_{03}+h_{01}))dy>0,\quad t\in[0,t_3].$$

Таким чином,

$$\Delta(t)\geq C_0>0,\quad t\in[0,t_4],\quad t_4=\min\{t_1,t_2,t_3\}.\tag{25}$$

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (12), (13), (17)–(22). Позначимо $W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. З (19)–(22), враховуючи (14), (25), одержуємо

$$\begin{gathered}|b_1(t)|\leq C_1+C_2W(t),\quad |b_2(t)|\leq C_3+C_4W(t),\quad |p(t)|\leq C_5+C_6W(t),\\ |r(t)|\leq C_7+C_8W(t),\qquad t\in[0,t_4].\end{gathered}\tag{26}$$

Використовуючи (14), (26) та оцінки функції Гріна [11], з (18) отримуємо

$$W(t)\leq C_9+C_{10}\int\limits_0^t\frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,\quad t\in[0,t_4].$$

Метод розв'язування останньої нерівності наведено у [12]. Звідси отримуємо оцінку

$$W(t)\leq M_2<\infty,\quad t\in[0,t_5],$$

де $t_5,\ 0<t_5\leq t_4$, визначається сталими C_9, C_{10}. Тоді

$$|b_1(t)|\leq B_1<\infty,\quad |b_2(t)|\leq B_2<\infty,\quad |p(t)|\leq B_3<\infty,\quad |r(t)|\leq B_4<\infty,\quad t\in[0,t_5].$$

Запишемо систему рівнянь (12), (13), (17)–(22) у вигляді операторного рівняння

$$\omega=P\omega,$$

де $\omega=(h_3(t),h_1(t),v(y,t),w(y,t),b_1(t),b_2(t),p(t),r(t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (12), (13), (17)–(22).

Візьмемо довільні $(h_3,h_1,v,w,b_1,b_2,p,r)$, для яких справджуються встановлені вище оцінки. Оцінимо праву частину рівняння (18):

$$|P_4w|\leq C_{11}+C_{12}\sqrt{t}.$$

Вибираючи число $t_6, 0<t_6\leq T$, так, щоб виконувалась нерівність $C_{11}+C_{12}\sqrt{t_6}\leq M_2$, отримуємо

$$|P_4w|\leq M_2,\quad (y,t)\in[0,1]\times[0,t_6].$$

Позначимо $N = \{(h_3, h_1, v, w, b_1, b_2, p, r) \in (C[0, T_0])^2 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^4 \colon\ H_0 \leq \leq h_3(t) \leq H_1,\ \ |h_1(t)| \leq H_2,\ \ M_0 \leq v(y, t) \leq M_1,\ \ |w(y, t)| \leq M_2,\ \ |b_1(t)| \leq B_1,\ |b_2(t)| \leq B_2, |p(t)| \leq B_3,\ \ |r(t)| \leq B_4\}$, де $T_0 = \min\{t_5, t_6\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера, а оператор P переводить N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться, як у [8].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок системи рівнянь (12), (13), (17) – (22) і, відповідно, розв'язок задачі (5) – (11) при $(y, t) \in \overline{Q}_{T_0}$.

Теорему 1 доведено.

4. Єдиність розв'язку задачі (5) – (11).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*:

$$a \in C^{2,0}(\mathbb{R} \times [0, T]),\ c, f \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0, T]),\ a(x, t) > 0,\ (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T],\ \varphi(x) \geq \varphi_0 > 0,$$

$$x \in [h_{01}, \infty),\ \varphi'(x) > 0,\ x \in [h_{01}, h_{02}],\ (h_{02} - x)\varphi'(h_{02} + h_{01} - x) - (x - h_{01})\varphi'(x) > 0,$$

$$\varphi'(x) - \varphi'(h_{02} + h_{01} - x) > 0,\ x \in \left[h_{01}, \frac{h_{01} + h_{02}}{2}\right),\ \mu_i(t) > 0,\ i = \overline{1, 3},\ t \in [0, T].$$

Тоді можна вказати число t_4, $0 < t_4 \leq T$, *яке визначається вихідними даними, таке, що задача* $(5) - (11)$ *не може мати двох різних розв'язків* $(h_3, h_1, b_1, b_2, v) \in (C^1[0, t_4])^2 \times \times (C[0, t_4])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_4}),\quad h_3(t) > 0,\quad t \in [0, t_4]$.

Доведення. Припустимо, що $(h_{1i}(t), h_{3i}(t), b_{1i}(t), b_{2i}(t), v_i(y, t)),\quad i = 1, 2,$ — два розв'язки задачі (5) – (11). Позначимо

$$\frac{b_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = r_i(t),\ \frac{b_{2i}(t)}{h_{3i}(t)} = q_i(t),\ \frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = s_i(t),\ \frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = p_i(t),\ i = 1, 2,\quad r(t) = r_1(t) - r_2(t),$$

$$q(t) = q_1(t) - q_2(t),\quad s(t) = s_1(t) - s_2(t),\quad p(t) = p_1(t) - p_2(t),\quad v(y, t) = v_1(y, t) - v_2(y, t).$$

Функції $r(t)$, $q(t)$, $s(t)$, $p(t)$, $v(y, t)$ задовольняють рівняння

$$\begin{gathered} v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (r_1(t)(yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + q_1(t) + s_1(t) + yp_1(t))v_y + \\ + c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v + \left(\frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)}{h_{31}^2(t)} - \frac{a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)}{h_{32}^2(t)}\right) v_{2yy} + \\ + (r_2(t)(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)) + r(t)(yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + q(t) + s(t) + \\ + yp(t))v_{2y} + (c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) + c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))v_2 + \\ + f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t), \qquad (y, t) \in Q_T, \end{gathered} \tag{27}$$

та умови

$$v(y, 0) = 0, \quad y \in [0, 1], \tag{28}$$

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{29}$$

$$\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right),$$

$$\int_0^1 yv(y,t)dy = (\mu_4(t) - h_{11}(t)\mu_3(t))\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}\right) - (h_{11}(t) - h_{12}(t))\frac{\mu_3(t)}{h_{32}^2(t)},$$

$$\int_0^1 y^2 v(y,t)dy = (\mu_5(t) - 2h_{11}(t)\mu_4(t) + h_{11}^2(t)\mu_3(t))\left(\frac{1}{h_{31}^3(t)} - \frac{1}{h_{32}^3(t)}\right) +$$

$$+(\mu_3(t)(h_{11}^2(t) - h_{12}^2(t)) - 2\mu_4(t)(h_{11}(t) - h_{12}(t)))\frac{1}{h_{32}^3(t)}, \qquad (30)$$

$$\int_0^1 y^3 v(y,t)dy = (\mu_6(t) - 3h_{11}(t)\mu_5(t) + 3h_{11}^2(t)\mu_4(t) - h_{11}^3(t)\mu_3(t))\left(\frac{1}{h_{31}^4(t)} - \frac{1}{h_{32}^4(t)}\right) -$$

$$-(\mu_3(t)(h_{11}^3(t) - h_{12}^3(t)) - 3\mu_4(t)(h_{11}^2(t) - h_{12}^2(t)) + 3\mu_5(t)(h_{11}(t) - h_{12}(t)))\frac{1}{h_{32}^4(t)},$$

$$t \in [0,T].$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)}{h_{31}^2(t)} v_{yy} + (r_1(t)(yh_{31}(t) + h_{11}(t)) + q_1(t) + s_1(t) +$$

$$+yp_1(t))v_y + c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)v$$

з урахуванням умов (28), (29) функцію $v(y,t)$ запишемо у вигляді

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}^2(\tau)}\right) +$$

$$+\big(r(\tau)(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau)) + r_2(\tau)(\eta(h_{31}(\tau) - h_{32}(\tau)) + h_{11}(\tau) - h_{12}(\tau)) + q(\tau) +$$

$$+s(\tau) + \eta p(\tau)\big)v_{2\eta}(\eta,\tau) + v_2(\eta,\tau)\big(c(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - c(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)\big) +$$

$$+f(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - f(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T. \qquad (31)$$

Здиференціювавши (31) за змінною y, одержимо

$$v_y(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg[v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)\left(\frac{a(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau)}{h_{31}^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}^2(\tau)}\right) +$$

$$+\big(r(\tau)(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau))+r_2(\tau)\big(\eta(h_{31}(\tau)-h_{32}(\tau))+h_{11}(\tau)-h_{12}(\tau)\big)+q(\tau)+$$

$$+s(\tau)+\eta p(\tau)\big)v_{2\eta}(\eta,\tau)+v_2(\eta,\tau)\big(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\big)+$$

$$+f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\Bigg]d\eta d\tau,\qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{32}$$

Оскільки для $h'_{1i},\ h'_{3i},\ b_{1i}(t),\ b_{2i}(t),\ i=1,2,$ справджуються рівності, аналогічні (19) – (22), то звідси отримуємо

$$p(t)\mu_2(t)+(q(t)+s(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))+r(t)(h_{31}(t)\mu_2(t)-\mu_3(t)+h_{11}(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))=$$

$$=\frac{v_y(0,t)a(h_{11}(t),t)-v_y(1,t)a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t)}{h_{31}^2(t)}+(h_{31}^{-2}(t)-h_{32}^{-2}(t))(v_{2y}(0,t)a(h_{11}(t),t)-$$

$$-v_{2y}(1,t)a(h_{11}(t)+h_{31}(t),t))+\frac{1}{h_{32}^2(t)}(v_{2y}(0,t)(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))-(a(h_{11}(t)+$$

$$+h_{31}(t),t)-a(h_{12}(t)+h_{32}(t),t))v_{2y}(1,t))+h_{32}^{-1}(t)\int\limits_0^1(a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_y(y,t)+$$

$$+(a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_{2y}(y,t))dy+$$

$$+(h_{31}^{-1}(t)-h_{32}^{-1}(t))\Bigg(\int\limits_0^1 a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_{2y}(y,t)dy+\mu'_3(t)\Bigg)-$$

$$-\int\limits_0^1(v(y,t)c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_2(y,t)+$$

$$+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))dy-r_2(t)(\mu_2(t)(h_{31}(t)-h_{32}(t))+$$

$$+(\mu_2(t)-\mu_1(t))(h_{11}(t)-h_{12}(t))),\quad t\in[0,T], \tag{33}$$

$$h_{31}(t)s(t)\mu_1(t)+q(t)(h_{31}(t)\mu_1(t)-\mu_3(t))+r(t)(h_{31}(t)\mu_3(t)+h_{11}(t)h_{31}(t)\mu_1(t)+$$

$$+h_{11}(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))=$$

$$=-\frac{v_y(0,t)a(h_{11}(t),t)}{h_{31}(t)}-\frac{v_{2y}(0,t)}{h_{31}(t)}(a(h_{11}(t),t)-a(h_{12}(t),t))-\frac{1}{h_{31}(t)}\int\limits_0^1((h_{31}(t)(1-y)\times$$

$$\times a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))v_y(y,t)+$$

$$+(h_{31}(t)(1-y)(a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))+$$

$$+(1-y)(h_{31}(t)-h_{32}(t))a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+$$

$$+a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_{2y}(y,t))dy+(h_{31}^{-1}(t)-h_{32}^{-1}(t))\Big(\mu_4'(t)-h_{11}(t)\mu_3'(t)-$$

$$-a(h_{12}(t),t)v_{2y}(0,t)-\int_0^1(h_{32}(t)(1-y)a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-$$

$$-a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_{2y}(y,t)dy\Big)+h_{31}(t)\int_0^1(1-y)(v(y,t)c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+$$

$$+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)+(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-$$

$$-c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_2(y,t))dy+(h_{31}(t)-h_{32}(t))\Big(\int_0^1(1-y)(f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)+$$

$$+v_2(y,t)c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))dy-\mu_1(t)(s_2(t)+q_2(t))-r_2(t)(\mu_3(t)+h_{11}(t)\mu_1(t))\Big)-$$

$$-(h_{11}(t)-h_{12}(t))(r_2(t)(\mu_3(t)+h_{32}(t)\mu_1(t))+\mu_3'(t)h_{32}^{-1}(t)),\quad t\in[0,T], \tag{34}$$

$$q(t)\big(h_{31}(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t)+2h_{11}(t)\mu_3(t)\big)+r(t)\big(2h_{31}(t)\mu_4(t)-h_{11}(t)h_{31}(t)\mu_3(t)-$$

$$-3\mu_5(t)+4h_{11}(t)\mu_4(t)-h_{11}^2(t)\mu_3(t)\big)=$$

$$=\int_0^1\big((h_{31}(t)(y^2-y)a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+(2y-1)a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_y(y,t)+$$

$$+v_{2y}(y,t)\big((y^2-y)\big(h_{31}(t)\big(a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)\big)+(h_{31}(t)-$$

$$-h_{32}(t))a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))+(2y-1)\big(a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)\big)\big)\big)dy+$$

$$+(h_{31}^{-1}(t)-h_{32}^{-1}(t))(\mu_5'(t)-2h_{11}(t)\mu_4'(t)+h_{11}^2(t)\mu_3'(t))+h_{31}^2(t)\times$$

$$\times\int_0^1(y-y^2)\big(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v(y,t)+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)+$$

$$+v_2(y,t)(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))\big)dy+$$

$$+(h_{31}^2(t)-h_{32}^2(t))\int_0^1(y-y^2)\big(f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)+v_2(y,t)c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)\big)dy+$$

$$+(h_{31}(t)-h_{32}(t))\big(r_2(t)(h_{11}(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t))-q_2(t)\mu_3(t)\big)+(h_{11}(t)-$$

$$-h_{12}(t))\big(r_2(t)(h_{32}(t)\mu_3(t)-4\mu_4(t))-2q_2(t)\mu_3(t)-2\mu_4'(t)h_{32}^{-1}(t)+\mu_3'(t)\big)+$$

$$+\big(h_{11}^2(t)-h_{12}^2(t)\big)\big(r_2(t)\mu_3(t)+\mu_3'(t)h_{32}^{-1}(t)\big),\quad t\in[0,T], \tag{35}$$

$$r(t)=\Bigg[\int\limits_0^1\Big(\big(6h_{11}(t)\mu_4(t)-3\mu_5(t)-3h_{11}^2(t)\mu_3(t)+2h_{31}(t)\mu_4(t)-2h_{11}(t)h_{31}(t)\mu_3(t)\big)\times$$

$$(v_{1y}(y,t)(h_{31}(t)ya_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))-h_{31}^2(t)y(f(yh_{31}(t)+$$

$$+h_{11}(t),t)+v_1(y,t)c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)))+y(3\mu_5(t)-h_{31}^2(t)\mu_3(t)-6h_{11}(t)\mu_4(t)+$$

$$+3h_{11}^2(t)\mu_3(t))(v_{1y}(y,t)(yh_{31}(t)a_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+2a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))-$$

$$-h_{31}^2(t)y(f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+v_1(y,t)c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)))+h_{31}(t)y^2(h_{31}(t)\mu_3(t)-$$

$$-2\mu_4(t)+2h_{11}(t)\mu_3(t))((3a(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+h_{31}(t)ya_x(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t))v_{1y}(y,t)-$$

$$-h_{31}^2(t)y(f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_1(y,t)))\Big)dy+\mu_6'(t)(\mu_3(t)+$$

$$+2(\mu_3(t)h_{11}(t)-\mu_4(t))h_{31}^{-1}(t))+\mu_5'(t)(3(\mu_5(t)-\mu_3(t)h_{11}^2(t))h_{31}^{-1}(t)-\mu_3(t)(h_{31}(t)+$$

$$+3h_{11}(t)))+\mu_4'(t)(6h_{11}(t)h_{31}^{-1}(t)(\mu_4(t)h_{11}(t)-\mu_5(t))-3\mu_5(t)+2\mu_4(t)(3h_{11}(t)+h_{31}(t)))+$$

$$+\mu_3'(t)h_{11}(t)h_{31}^{-1}(t)(3(h_{11}(t)+h_{31}(t))\mu_5(t)+h_{11}^2(t)\mu_3(t)(h_{11}(t)+2h_{31}(t))-$$

$$-2h_{11}(t)\mu_4(t)(2h_{11}(t)-3h_{31}(t))+h_{31}^2(t)(h_{11}(t)\mu_3(t)-2\mu_4(t)))\Bigg]\big(2(h_{31}(t)-$$

$$-h_{32}(t))(3\mu_4(t)\mu_5(t)-6h_{11}(t)\mu_4^2(t)+3h_{11}^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-h_{11}^3(t)\mu_3^2(t)-2\mu_3(t)\mu_6(t)+$$

$$+3h_{11}(t)\mu_3(t)\mu_5(t))+(h_{31}^2(t)-h_{32}^2(t))(3\mu_3(t)\mu_5(t)-4\mu_4^2(t)+2h_{11}(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-h_{11}^2(t)\mu_3^2(t))+2(h_{11}(t)-h_{12}(t))(6\mu_4(t)\mu_5(t)-6h_{32}(t)\mu_4^2(t)+h_{32}^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-4\mu_3(t)\mu_6(t)+3h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_5(t))+(h_{11}^2(t)-h_{12}^2(t))(6h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-12\mu_4^2(t)-$$

$$-h_{32}^2(t)\mu_3^2(t)+6\mu_3(t)\mu_5(t))+2\mu_3(t)(h_{11}^3(t)-h_{12}^3(t))(2\mu_4(t)-h_{32}(t)\mu_3(t))-$$

$$-\mu_3^2(t)(h_{11}^4(t)-h_{12}^4(t))\big)\big((6h_{31}(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-12h_{11}(t)h_{31}(t)\mu_4^2(t)+$$

$$+6h_{11}^2(t)h_{31}(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-2h_{11}^3(t)h_{31}(t)\mu_3^2(t)+3h_{31}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-9\mu_5^2(t)+$$

$$+12h_{11}(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+2h_{11}(t)h_{31}^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+4h_{11}^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-12h_{11}^2(t)\mu_4^2(t)-h_{11}^4(t)\mu_3^2(t)-4h_{31}^2(t)\mu_4^2(t)-h_{11}^2(t)h_{31}^2(t)\mu_3^2(t)-4h_{31}(t)\mu_3(t)\mu_6(t)-$$

$$-8h_{11}(t)\mu_3(t)\mu_6(t)+8\mu_4(t)\mu_6(t)+6h_{11}(t)h_{31}(t)\mu_3(t)\mu_5(t)+$$

$$+6h_{11}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t))(6h_{32}(t)\mu_4(t)\mu_5(t) - 12h_{12}(t)h_{32}(t)\mu_4^2(t) + 6h_{12}^2(t)h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-2h_{12}^3(t)h_{32}(t)\mu_3^2(t) + 3h_{32}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t) - 9\mu_5^2(t) + 12h_{12}(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+$$

$$+2h_{12}(t)h_{32}^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t) + 4h_{12}^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t) - 12h_{12}^2(t)\mu_4^2(t) - h_{12}^4(t)\mu_3^2(t) - 4h_{32}^2(t)\times$$

$$\times\mu_4^2(t) - h_{12}^2(t)h_{32}^2(t)\mu_3^2(t) - 4h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_6(t) - 8h_{12}(t)\mu_3(t)\mu_6(t) + 8\mu_4(t)\mu_6(t)+$$

$$+6h_{12}(t)h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_5(t) + 6h_{12}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t))\Big)^{-1} + \Bigg[\int\limits_0^1 \big((6h_{11}(t)\mu_4(t) - 3\mu_5(t)-$$

$$-3h_{11}^2(t)\mu_3(t) + 2h_{31}(t)\mu_4(t) - 2h_{11}(t)h_{31}(t)\mu_3(t))((h_{31}(t)ya_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)+$$

$$+a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t))v_y(y, t) + v_{2y}(y, t)(a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)+$$

$$+y(a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))h_{31}(t) + ya_x(yh_{32}(t)+$$

$$+h_{12}(t), t)(h_{31}(t) - h_{32}(t))) - y(f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)+$$

$$+c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v(y, t) + v_2(y, t)(c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))h_{31}^2(t)-$$

$$-(h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t))y(c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)v_2(y, t) + f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))+$$

$$+y(3\mu_5(t) - h_{31}^2(t)\mu_3(t) - 6h_{11}(t)\mu_4(t) + 3h_{11}^2(t)\mu_3(t))((h_{31}(t)ya_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)+$$

$$+2a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t))v_y(y, t) + v_{2y}(y, t)(2(a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))+$$

$$+(a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))yh_{31}(t) + ya_x(yh_{32}(t)+$$

$$+h_{12}(t), t)(h_{31}(t) - h_{32}(t))) - y(f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)+$$

$$+c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)v(y, t) + v_2(y, t)(c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))h_{31}^2(t)-$$

$$-(h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t))y(c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)v_2(y, t) + f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))+$$

$$+h_{31}(t)y^2(h_{31}(t)\mu_3(t) - 2\mu_4(t) + 2h_{11}(t)\mu_3(t))((h_{31}(t)ya_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)+$$

$$+3a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t))v_y(y, t) + v_{2y}(y, t)(yh_{31}(t)(a_x(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t)-$$

$$-a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)) + 3(a(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - a(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t))+$$

$$+ya_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)(h_{31}(t) - h_{32}(t))) - y(f(yh_{31}(t)+h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t)+h_{12}(t), t)+$$

$$+v(y, t)c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) + v_2(y, t)(c(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))h_{31}^2(t)-$$

$$-y(h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t))(c(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)v_2(y, t) + f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)))+$$

$$+(h_{31}(t) - h_{32}(t))((1 - y^2)(yh_{32}(t)a_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t)v_{2y}(y, t)-$$

$$-h_{32}^2(t)y(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_2(y,t)+f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)))+$$

$$+(1-3y^2)a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_{2y}(y,t))-y\mu_3(t)(h_{31}^2(t)-h_{32}^2(t))((1-y)(ya_x(yh_{32}(t)+$$

$$+h_{12}(t),t)h_{32}(t)v_{2y}(y,t)-h_{32}^2(t)y(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_2(y,t)+f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)))+$$

$$+(2-3y)v_{2y}(y,t)a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))+2(h_{11}^2(t)-h_{12}^2(t))((3\mu_4(t)(1-y)-$$

$$-h_{32}(t)\mu_3(t)(1-y^2))(yh_{32}(t)v_{2y}(y,t)a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-h_{32}^2(t)y(c(yh_{32}(t)+$$

$$+h_{12}(t),t)v_2(y,t)+f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)))+(3\mu_4(t)(1-2y)-$$

$$-h_{32}(t)\mu_3(t)(1-3y^2))v_{2y}(y,t)a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))-3\mu_3(t)(h_{11}^2(t)-h_{12}^2(t))\times$$

$$\times((1-y)(yh_{32}(t)a_x(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_{2y}(y,t)-y(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v_2(y,t)+$$

$$+f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))h_{32}^2(t))+(1-2y)v_{2y}(y,t)a(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))\big)dy+(h_{31}^{-1}(t)-$$

$$-h_{32}^{-1}(t))(2\mu_6'(t)(\mu_3(t)h_{11}(t)-\mu_4(t))+3\mu_5'(t)(\mu_5(t)-\mu_3(t)h_{11}^2(t))+$$

$$+6h_{11}(t)\mu_4'(t)(\mu_4(t)h_{11}(t)-\mu_5(t))+h_{11}^2(t)\mu_3'(t)(3\mu_5(t)-4\mu_4(t)h_{11}(t)+\mu_3(t)h_{11}^2(t)))+$$

$$+(h_{31}(t)-h_{32}(t))(2\mu_4(t)\mu_4'(t)-\mu_3(t)\mu_5'(t)+h_{11}(t)\mu_3'(t)(\mu_3(t)h_{11}(t)-$$

$$-2\mu_4(t)))+(h_{11}(t)-h_{12}(t))(2h_{32}^{-1}(t)(\mu_3(t)\mu_6'(t)-3\mu_5(t)\mu_4'(t))-3\mu_3(t)\mu_5'(t)+6\mu_4(t)\mu_4'(t)+$$

$$+\mu_3'(t)(3\mu_5(t)-2\mu_4(t)h_{32}(t)))+(h_{11}^2(t)-h_{12}^2(t))(3h_{32}^{-1}(t)(2\mu_4(t)\mu_4'(t)-\mu_3(t)\mu_5'(t)+$$

$$+\mu_5(t)\mu_3'(t))-\mu_3'(t)(6\mu_4(t)-\mu_3(t)h_{32}(t)))+2\mu_3'(t)(h_{11}^3(t)-h_{12}^3(t))(\mu_3(t)-4\mu_4(t)h_{32}^{-1}(t))+$$

$$+\mu_3(t)\mu_3'(t)h_{32}^{-1}(t)(h_{11}^4(t)-h_{12}^4(t))\big]\big(6h_{32}(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-12h_{12}(t)h_{32}(t)\mu_4^2(t)+$$

$$+6h_{12}^2(t)h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-2h_{12}^3(t)h_{32}(t)\mu_3^2(t)+3h_{32}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-9\mu_5^2(t)+$$

$$+12h_{12}(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+2h_{12}(t)h_{32}^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+4h_{12}^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-$$

$$-12h_{12}^2(t)\mu_4^2(t)-h_{12}^4(t)\mu_3^2(t)-4h_{32}^2(t)\mu_4^2(t)-h_{12}^2(t)h_{32}^2(t)\mu_3^2(t)-4h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_6(t)-$$

$$-8h_{12}(t)\mu_3(t)\mu_6(t)+8\mu_4(t)\mu_6(t)+6h_{12}(t)h_{32}(t)\mu_3(t)\mu_5(t)+6h_{12}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)\big)^{-1}, \qquad (36)$$

$$t\in[0,T].$$

Зауважимо, що

$$6h_{3i}(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-12h_{1i}(t)h_{3i}(t)\mu_4^2(t)+6h_{1i}^2(t)h_{3i}(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-2h_{1i}^3(t)h_{3i}(t)\mu_3^2(t)+$$

$$+3h_{3i}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t)-9\mu_5^2(t)+12h_{1i}(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+2h_{1i}(t)h_{3i}^2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)+$$

$$+4h_{1i}^3(t)\mu_3(t)\mu_4(t)-12h_{1i}^2(t)\mu_4^2(t)-h_{1i}^4(t)\mu_3^2(t)-4h_{3i}^2(t)\mu_4^2(t)-$$

$$-h_{1i}^2(t)h_{3i}^2(t)\mu_3^2(t) - 4h_{3i}(t)\mu_3(t)\mu_6(t) - 8h_{1i}(t)\mu_3(t)\mu_6(t) + 8\mu_4(t)\mu_6(t) +$$

$$+6h_{1i}(t)h_{3i}(t)\mu_3(t)\mu_5(t) + 6h_{1i}^2(t)\mu_3(t)\mu_5(t) \geq C_0 > 0, \qquad i = 1, 2, \quad t \in [0, t_4].$$

Згідно з припущеннями теореми правильною є наступна рівність:

$$f(yh_{31}(t) + h_{11}(t), t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t), t) = (h_{11}(t) - h_{12}(t) + y(h_{31}(t) - h_{32}(t)))\times$$

$$\times \int_0^1 f_x(yh_{32}(t) + h_{12}(t) + \sigma(y(h_{31}(t) - h_{32}(t)) + h_{11}(t) - h_{12}(t)), t)d\sigma, \tag{37}$$

яка справедлива і для функцій $c(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t), t)$, $a(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t), t)$ та $a_x(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t), t)$, $i = 1, 2$.

Виразимо $h_{3i}(t)$, $h_{1i}(t)$ через $p_i(t)$, $s_i(t)$:

$$h_{3i}(t) = h_{3i}(0)\exp\left(\int_0^t p_i(\tau)d\tau\right), \; h_{1i}(t) = h_{1i}(0) + h_{3i}(0)\int_0^t s_i(\tau)\exp\left(\int_0^\tau p_i(\sigma)d\sigma\right)d\tau,$$

$$i = 1, 2, \qquad h_{31}(0) = h_{32}(0) = h_{03}, \qquad h_{11}(0) = h_{12}(0) = h_{01}.$$

Враховуючи рівність

$$e^x - e^y = (x - y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

одержуємо

$$\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} = -\frac{1}{h_{03}}\int_0^t p(\tau)d\tau \int_0^1 \exp\biggl(-\int_0^t (\sigma p(\tau) + p_2(\tau))d\tau\biggr)d\sigma, \tag{38}$$

$$h_{11}(t) - h_{12}(t) = h_{03}\biggl(\int_0^t s(\tau)\exp\biggl(\int_0^\tau p_1(\sigma)d\sigma\biggr)d\tau +$$

$$+\int_0^t s_2(\tau)\int_0^\tau p(\eta)d\eta\exp\biggl(\int_0^\tau (p_2(\rho) + \sigma p(\rho))d\rho\biggr)d\sigma d\tau\biggr). \tag{39}$$

Аналогічно (38), (39) використаємо для зображення різниць $h_{31}(t) - h_{32}(t)$, $h_{31}^2(t) - h_{32}^2(t)$, $h_{31}^{-2}(t) - h_{32}^{-2}(t)$, $h_{11}^2(t) - h_{12}^2(t)$, $h_{11}^3(t) - h_{12}^3(t)$, $h_{11}^4(t) - h_{12}^4(t)$.

Використавши (37) – (39) і підставивши (31), (32) в (33) – (36), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $q(t)$, $s(t)$, $p(t)$, $r(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $q(t) = 0$, $s(t) = 0$, $p(t) = 0$, $r(t) = 0$, $t \in [0, t_4]$. Звідси отримаємо $q_1(t) = q_2(t)$, $s_1(t) = s_2(t)$, $p_1(t) = p_2(t)$, $r_1(t) = r_2(t)$, $t \in [0, t_4]$, а отже, $h_{31}(t) = h_{32}(t)$, $h_{11}(t) = h_{12}(t)$, $b_{11}(t) = b_{12}(t)$, $b_{21}(t) = b_{22}(t)$, $t \in [0, t_4]$. Використовуючи це в задачі (27) – (29), знаходимо $v_1(y, t) = v_2(y, t)$, $(y, t) \in \overline{Q}_{t_4}$.

Теорему 2 доведено.

1. *Hong-Ming Yin.* Global solvability for some parabolic inverse problems // J. Math. Anal. and Appl. – 1991. – P. 392 – 403.
2. *Trong D. D., Ang D. D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – **10**, № 3. – P. 733 – 752.
3. *Cannon J., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – **10**, № 3. – P. 521 – 531.
4. *Іванчов М. І., Пабирівська Н. В.* Однозначне визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні у випадку нелокальних та інтегральних умов // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 589 – 596.
5. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в обернених задачах для параболічних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142 – 149.
6. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901 – 910.
7. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20 – 38.
8. *Снітко Г. А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 7 – 18.
9. *Снітко Г. А.* Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболічному рівнянні в області з вільною межею // Вісн. нац. ун-ту „Львів. політехніка”. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С. 45 – 52.
10. *Снітко Г. А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 37 – 47.
11. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
12. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Stud.: Monogr. Ser. – Vol. 10.)

Одержано 01.10.12