УДК 517.512

Ю. Х. Хасанов (Рос.-Тадж. славян. ун-т, Душанбе, Таджикистан)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We establish new sufficient conditions of the absolute $|C,\alpha|$-summability of fourier series of functions almost periodic in a sense of Besicovitch whose spectrum has limiting points at infinity and at zero for $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$.

Встановлено нові достатні умови абсолютної $|C,\alpha|$-сумовності рядів Фур'є майже періодичних в сенсі Безиковича функцій, спектр яких має межові точки в нескінченності і в нулі при $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$.

Говорят, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно суммируем методом Чезаро или $|C(\alpha)|$-суммируем, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}| < \infty,$$

где

$$\sigma_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (A_n^{\alpha})^{-1} A_{n-k}^{\alpha} a_k, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}.$$

Исследованию вопросов абсолютной суммируемости методом Чезаро ортогональных рядов, в частности тригонометрических рядов Фурье, посвящены работы [1 – 7]. С более подробной информацией о результатах исследований в этих направлениях можно ознакомиться, например, в работе [7].

Известно [8], что пространство B_p, $1 \leq p \leq \infty$, почти периодических по Безиковичу функций является замыкание множества тригонометрических полиномов $t(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$, $a_k \in \mathbf{C}$, λ_k, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, по норме

$$\|f\|_{B_p} = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = \left\{ \overline{M} \ [\ |f(x)|^p] \ \right\}^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{B_\infty} = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|, \qquad p = \infty.$$

Пространство B_∞ равномерных почти периодических функций обозначают через B.

Для каждой $f \in B_1$ определена функция

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Она может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений λ: $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n, \ldots$. Числа $\{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, называются показателями (спектром) Фурье, а числа $a_n = a(\lambda_n)$ — коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Итак, для каждой $f \in B_p$ можно записать ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}.$$

Определения и свойства функций из пространств B_p можно найти в [8] или [9].

В работе [7] установлены некоторые достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье функций $f \in B_2$ для различных значений α $(-1 < \alpha < 1/2)$.

В настоящей статье найдены новые достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp{(i\lambda_n x)} \tag{1}$$

для различных значений $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим два случая.

1. Показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}$ имеют единственную предельную точку в бесконечности:

$$\lambda_0 = 0; \quad \lambda_{-n} = -\lambda_n; \quad |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty. \tag{2}$$

В этом случае в класс функций $f \in B_p$ попадают и все периодические функции и свойства рядов таких функций во многом аналогичны свойствам рядов Фурье периодических функций. При этом в качестве структурной характеристики используется модуль гладкости порядка k с шагом h функции $f \in B_p$

$$\omega_k(f; h)_{B_p} = \sup_{|t|\leq h} \left\| \Delta_t^k f(x) \right\|_{B_p},$$

где

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \tbinom{k}{r} f(x - (2r-k)t/2), \qquad h > 0, \quad k \in N.$$

2. Показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}$, $n \to \infty$, имеют единственную предельную точку $\Lambda \neq \infty$. Не нарушая общности рассуждений можно принять, что $\Lambda = 0$, т. е.

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \quad |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0. \tag{3}$$

В качестве структурной характеристики применяется модуль усреднения порядка k функции $f \in B_p, \ p \geq 1$,

$$W_k(f; H)_{B_p} = \sup_{T\geq H} \|f_{T^k}(x)\|_{B_p}, \tag{4}$$

где $H > 0, \ k \in \mathbf{N}$,

$$f_{T^k}(x) = (2T)^{-k} \int\limits_{x-T}^{x+T} dt_1 \int\limits_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int\limits_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) dt_k.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Если последовательности функций* $\{\varphi_n(x)\}$ *принадлежат* $B_1,\ n=1,2,\ldots,$ *и почти всюду* $\varphi_n(x)\geq 0,\ n=1,2,\ldots,$ *то из условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{M}\{\varphi_n(x)\}<\infty$$

следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ *почти всюду сходится. Здесь*

$$\overline{M}\{f(x)\}=\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|f(x)|dx\right\}.$$

Лемма 1 доказана автором в работе [7].

Лемма 2. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ *сходится, то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_n^{\alpha})^{-1}u_n$$

суммируем методом $|C,\alpha|,\ 0<\alpha<1.$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$ *функции* $f\in B_2$ *удовлетворяет условиям* (2). *Тогда условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu}\left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^{\nu}}}\right)^k\omega_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2}<\infty \tag{5}$$

влечет $\left|C,\dfrac{1}{2}\right|$*-суммируемость ряда* (1).

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно установить сходимость почти всюду ряда

$$G(f;\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{M}\{|\sigma_n^{\alpha}(x)-\sigma_{n-1}^{\alpha}(x)|\}, \tag{6}$$

где

$$\sigma_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}(A_n^{\alpha})^{-1}A_{n-k}^{\alpha}a_k,\ A_n^{\alpha}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}.$$

Известно [7, с. 1273], что

$$G(f;\alpha)\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu(\alpha+\frac{1}{2})}\left\{\left(\sum_{n=1}^{2^{\nu}-1}\sum_{k=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}+\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\sum_{k=n}^{2^{\nu+1}-1}\right)\frac{n^2a_n^2}{(n-k+1)^{2(1-\alpha)}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Пусть $\alpha=\dfrac{1}{2}$, тогда

$$G(f;\alpha)\leq\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{-\nu(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}\left\{\left(\sum_{n=1}^{2^{\nu}-1}\sum_{k=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}+\sum_{n=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\sum_{k=n}^{2^{\nu+1}-1}\right)\frac{n^2a_n^2}{n-k+1}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \left\{ \sum_{n=1}^{2^{\nu+1}-1} n^2 a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \left\{ \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} n^2 a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} 2^{k+1} \left\{ \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$G(f;\alpha) \le \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \cdot 2^{\nu} \left\{ \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя неравенство (см. [11, с. 308])

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{\beta} \le c_\beta \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} d_\nu \right)^{\beta},\ 0<\beta<1,\ d_n \ge 0,$$

получаем

$$G(f;\alpha) = O\left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \left(\sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{8}$$

Пусть $\lambda_n \ge \pi$ и

$$N_\nu = \left\{ n\colon 2^{\nu-1}\pi \le \lambda_n < 2^\nu \pi \right\}, \qquad \nu \ge 1,$$

$m(N_\nu)$ — количество элементов в N_ν. Коэффициентами Фурье функции $\Delta_h^k f(x)$ будут числа $a_n 2^k \sin^k \dfrac{h}{2}\lambda_n$. Тогда в силу равенства Парсеваля [9]

$$2^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|^2 \sin^{2k} \frac{h}{2}\lambda_n = \left\| \Delta_h^k f(x) \right\|_{B_2}. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что при любом $\nu = 1, 2, \ldots$ справедливо

$$\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} |a_n|^2 \sin^{2k} \frac{h}{2}\lambda_n \le \omega_k^2(f;h)_{B_2}. \tag{10}$$

Для $h = 1/\lambda_{2^\nu}$ и $n = 2^{\nu-1}, \ldots, 2^\nu - 1$ будет $h\lambda_n/2 \le 1/2$, поэтому

$$\sin\frac{h\lambda_n}{2} = \sin\frac{\lambda_n}{2\lambda_{2^\nu}} \ge \left(\sin\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_n}{\lambda_{2^\nu}}.$$

Отсюда с учетом (10) получаем

$$\omega_k^2\left(f, \frac{1}{\lambda_{2^\nu}}\right)_{B_2} \gg \frac{1}{\lambda_{2^\nu}^{2k}} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} |a_n|^2\, \lambda_n^{2k} \gg \left(\frac{\lambda_{2^{\nu-1}}}{\lambda_{2^\nu}}\right)^{2k} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} |a_n|^2.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^\nu}}\right)^k \omega_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2}. \tag{11}$$

После применения этой оценки в (8) будем иметь

$$G(f;\alpha) = O\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}\left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^\nu}}\right)^k \omega_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2}\right\}.$$

Из последнего в силу оценки (5) следует сходимость почти всюду ряда (6), откуда согласно лемме 2 вытекает $\left|C;\dfrac{1}{2}\right|$-суммируемость ряда (1).

Дальнейшие рассуждения опираются на следующее утверждение, доказательство которого можно найти в работе [4].

Лемма 3. *Для произвольной последовательности выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 4\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 2. *Если спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$ *функции* $f \in B_2$ *удовлетворяет условиям* (2) *и*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}(\ln 2^\nu)^{-1/2}\left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^\nu}}\right)^k \omega_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2} < \infty, \tag{12}$$

то ряд (1) *почти всюду* $|C;\alpha|$*-суммируем при любом* $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Тогда $2-2\alpha < 1$. Следовательно, после перестановки порядка суммирования в (7) и в силу того, что

$$\sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{(n-\nu+1)^{2(1-\alpha)}} = O\left(2^{m(\alpha+1/2)}\right),$$

получим

$$G(f;\alpha) \le \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(\alpha+1/2)}2^{n(\alpha+1/2)}\left(\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

После применения леммы 3 будем иметь

$$G(f;\alpha) \le \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}(\ln n)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, используя оценки (11), получаем

$$G(f;\alpha) \le \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu}(\ln 2^{\nu})^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^{\nu}}}\right)^{k} \omega_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2}.$$

Используя (6) и лемму 2, завершаем доказательство теоремы 2.

Теперь перейдем к рассмотрению признаков $|C;\alpha|$-суммируемости почти всюду рядов Фурье функции $f(x) \in B_2$ для значений $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$, когда показатели Фурье имеют предельную точку в нуле. Как было отмечено, в качестве структурной характеристики используется величина (4) — модуль усреднения порядка k функции $f \in B_p,\ p \ge 1$.

Теорема 3. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям* (3). *Тогда условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}\mathbf{W}_k(f;\lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2} < \infty \qquad (13)$$

влечет $\left|C,\dfrac{1}{2}\right|$*-суммируемость почти всюду ряда* (1).

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ является рядом Фурье функции $f \in B_2$. Тогда рядом Фурье функции $f_{T^k}(x)$ будет ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \left\{\frac{\sin\lambda_n T}{i\lambda_n T}\right\}^{k}.$$

Это следует из тождества

$$\frac{1}{(2T)^k}\int\limits_{x-T}^{x+T} dt_1 \int\limits_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int\limits_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} e^{i\lambda_n t_k} dt_k = e^{i\lambda_n x}\left\{\frac{\sin\lambda_n T}{i\lambda_n T}\right\}^{k}.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\left\{\frac{\sin\lambda_n T}{i\lambda_n T}\right\}^{k}\right|^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \|f_{T^k}(x)\|_{B_2} \le W_k(f;T)_{B_2}.$$

Из этого равенства следует, что при любом $\nu = 1,\, 2,\, \ldots$

$$\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |a_n|^2 \left\{\frac{\sin\lambda_n T}{\lambda_n T}\right\}^{2k} \le W_k^2(f;T)_{B_2}. \qquad (14)$$

Для $T = \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1}$ и $n = 2^{\nu-1},\ldots,2^{\nu}-1$ будет $\lambda_n T \le 1$, поэтому $\sin\lambda_n T \ge (\sin 1)\lambda_n T$. Отсюда и из (14) следует оценка

$$\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |a_n|^2 \ll W_k^2(f;\lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2}. \qquad (15)$$

Подставляя эту оценку в (7), при $\alpha = \dfrac{1}{2}$ имеем

$$G(f;\alpha) \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}\mathbf{W}_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2}.$$

Из последнего, в силу оценки (13) следует сходимость почти всюду ряда (6), откуда согласно лемме 2 следует $\left|C,\dfrac{1}{2}\right|$-суммируемость ряда (1).

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям* (3) *и*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu}(\ln 2^\nu)^{-1/2}\mathbf{W}_k(f;\lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_2} < \infty, \tag{16}$$

то ряд (1) *почти всюду* $|C;\alpha|$*-суммируем при любом* $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, но здесь вместо оценки (11) используется соотношение (15).

1. *Tandori K.* Über die orthogonalen Funktionen IX. (Absolute Summation) // Acta Sci. Math. – 1960. – **21**. – S. 292 – 299.
2. *Leindler L.* Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen // Acta Sci. Math. – 1961. – **22**. – S. 243 – 268.
3. *Billard P.* Sur la sommabilitie absolute des series de fonctions orthogonales // Bull. Sci. Math. – 1961. – **85**. – S. 29 – 31.
4. *Грепачевская Л. В.* Абсолютная суммируемость ортогональных рядов // Мат. сб. – 1964. – **65 (107)**, № 3. – С. 370 – 389.
5. *Грепачевская Л. В.* Об абсолютной суммируемости методами Чезаро, Рисса и Зигмунда // Докл. АН СССР. – 1964. – **155**, № 3. – С. 370 – 389.
6. *Тиман М. Ф.* Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. – 1961. – **26**, № 6. – С. 641 – 646.
7. *Тиман М. Ф., Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти периодических функций Безиковича // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 9. – С. 1267 – 1276.
8. *Besicovitch.* Almost periodic functions. – Cambridge, 1932.
9. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1953.
10. *Sunouchi G.* On the absolute summability of Fourier series //J. Math. Soc. Jap. – 1949. – **1**, № 2. – P. 57 – 65.
11. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Получено 01.10.12,
после доработки — 09.10.13