УДК 517.951.2

Ю. П. Апаков (Наманган. инж.-пед. ин-т, Узбекистан)

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

We consider the first boundary-value problem for the third-order equation with multiple characteristics $u_{xxx}-u_{yy}=f(x,y)$ in the domain $D=\{(x,y)\colon 0<x<p,\ 0<y<l\}$. The uniqueness of a solution is proved by the energy-integral method, and the solution is constructed in explicit form with the use of the Green function.

Для рівняння третього порядку з кратними характеристиками $u_{xxx}-u_{yy}=f(x,y)$ в області $D=\big\{(x,y)\colon 0<x<p,\ 0<y<l\big\}$ досліджено першу крайову задачу. Єдиність розв'язку цієї задачі доведено методом інтегралів енергії, а розв'язок в явному вигляді отримано за допомогою функції Гріна.

1. Введение и формулировка основных результатов. Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$L\,(u)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y), \tag{1}$$

впервые было рассмотрено в работах [1 – 3]. Полученные в них результаты были обобщены для уравнения $(2n+1)$-го порядка в работе [4].

В работе [5] построены фундаментальные решения уравнения (1), выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, которые имеют вид

$$\begin{gathered} U\,(x,y;\xi,\eta)=|y-\eta|^{1/3}\,f\,(t)\,, \quad -\infty<t<+\infty, \\ V\,(x,y;\xi,\eta)=|y-\eta|^{1/3}\,\varphi\,(t)\,, \quad t<0, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$f(t)=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}t\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\tau\right), \qquad \varphi(t)=\frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}t\,\Phi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\tau\right),$$

$$\tau=\frac{4}{27}t^3, \quad t=(x-\xi)\,|y-\eta|^{\,-2/3}\,,$$

$\Psi(a,b;x)$, $\Phi(a,b;x)$ — вырожденные гипергеометрические функции (см. [6, 7]).

Отметим, что уравнение (1) является сопряженным к уравнению

$$u_{xxx}+u_{yy}=F(x,y),$$

которое, в свою очередь, является линейной частью (при $\nu=0$) так называемого ВТ-уравнения (вязкого трансзвукового уравнения)

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_xu_{xx}.$$

При $\nu = 1$ ВТ-уравнение описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ — плоскопараллельный [8, 9].

Данная работа является продолжением работы [10]. В ней на основании результатов работ [5, 10] с помощью функции Грина в прямоугольной области построено явное решение первой краевой задачи.

Рассмотрим уравнение (1) в области $D = \{(x, y) \colon 0 < x < p,\ 0 < y < l\}$, где $p > 0,\ l > 0$ — постоянные числа.

Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (1) и принадлежит классу $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{1,0}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$.

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \qquad u(x, l) = \varphi_2(x), \tag{3}$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \qquad u(p, y) = \psi_2(y), \qquad u_x(p, y) = \psi_3(y), \tag{4}$$

где

$$\varphi_i(x) \in C[0, p], \quad i = 1, 2,$$

$$\psi_j(y) \in C[0, l], \quad j = \overline{1, 3}, \qquad g(x, y) \in C^{0,2}_{x,y}\left(\overline{D}\right),$$

кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{gathered} \varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(p) = \psi_2(0), \quad \varphi_1'(p) = \psi_3(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(l), \\ \varphi_2(p) = \psi_2(l), \quad \varphi_2'(p) = \psi_3(l), \quad g(x, 0) = g(x, l) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача* A *не может иметь более одного решения.*

Теорема 2. *Если функции* $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i = 1, 2$, $\psi_j(y) \in C[0, l]$, $j = \overline{1, 3}$, $g(x, y) \in C^{0,2}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$, *а также выполняются условия согласования* (5), *то существует решение задачи* A.

2. Вспомогательные результаты. В работе [10] доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *При* $|t| \to \infty$ *для фундаментального решения* $U(x, y; \xi, \eta)$ *выполняются оценки*

$$\left| \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} U(x, y; \xi, \eta) \right| \leqslant C_{hk} |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{-\frac{1}{2}\left\{2h+3k-1+\frac{3}{2}\left[1-(-1)^k\right]\right\}}, \tag{6}$$

где $h, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 4. *Для любой функции* $\varphi(x) \in C[a, b]$ *при любых* $x \neq \xi$, $y \neq \eta$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \eta \to y}} \int_a^b U^*(x, y; \xi, \eta)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \varphi(x_0), \tag{7}$$

где

$$U^*(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{|y-\eta|^{2/3}}f^*(t), \quad -\infty<t<+\infty,$$

$$f^*(t)=\frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}}t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\tau\right), \qquad \tau=\frac{4}{27}t^3, \quad t=(x-\xi)\,|y-\eta|^{-2/3}.$$

Отметим, что

$$U_y(x,y;\xi,\eta)=U^*(x,y;\xi,\eta)\,\mathrm{sgn}\,(y-\eta).$$

Теорема 5. *При $\omega\,(y)\in C\,[0,l]$ имеют место равенства*

$$\lim_{x\to\xi}\int\limits_0^l U_{xx}\,(x,y;\xi,\eta)\,\omega\,(\eta)\,d\eta=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}\omega\,(y)\,, & x>\xi,\\ \dfrac{4}{3}\omega\,(y)\,, & x<\xi,\\ 0, & x=\xi.\end{cases} \tag{8}$$

$$\lim_{x\to\xi}\int\limits_0^l V_{xx}\,(x,y;\xi,\eta)\;\omega\,(\eta)\,d\eta=\begin{cases}2\,\omega\,(y)\,, & x<\xi,\\ 0, & x=\xi.\end{cases} \tag{9}$$

Здесь $U(x,y;\xi,\eta)$, $V(x,y;\xi,\eta)$ — фундаментальные решения (2).

3. Доказательства. Докажем, что задача А имеет единственное решение.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть задача А имеет два решения: $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в D.

Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\,(uu_y)+u_y^2=0. \tag{10}$$

Интегрируя тождество (10) по области D и учитывая однородные краевые условия, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l u_x^2\,(0,y)\,dy+\iint\limits_D u_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Отсюда $u_y(x,y)=0$, т. е. $u\,(x,y)=\phi\,(x)$. Из $u\,(x,0)=0$ имеем $\phi\,(x)=0$, тогда $u\,(x,y)\equiv 0$.

Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству существования решения задачи А.

***Доказательство теоремы* 2.** Рассмотрим сопряженные дифференциальные операторы

$$L\equiv\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}, \qquad L^*\equiv-\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}.$$

Имеет место тождество

$$\varphi L\,[\psi]-\psi L^*\,[\varphi]\equiv\frac{\partial}{\partial\xi}\,(\varphi\psi_{\xi\xi}-\varphi_\xi\psi_\xi+\varphi_{\xi\xi}\psi)-\frac{\partial}{\partial\eta}\,(\varphi\psi_\eta-\varphi_\eta\psi)\,,$$

где φ, ψ — достаточно гладкие функции.

Интегрируя тождество по области D, получаем

$$\iint\limits_D \Big[\varphi L\,[\psi] - \psi L^*\,[\varphi]\Big]\,d\xi d\eta =$$

$$= \iint\limits_D \frac{\partial}{\partial\xi}\,(\varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\xi\psi_\xi + \varphi_{\xi\xi}\psi)\,d\xi d\eta - \iint\limits_D \frac{\partial}{\partial\eta}\,(\varphi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi)d\xi d\eta. \qquad (11)$$

В качестве функции φ возьмем фундаментальное решение $U(x,y;\xi,\eta)$ уравнения (1), которое, как функция (ξ,η), при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$L^*\,[U] \equiv -U_{\xi\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0,$$

а в качестве ψ — любое регулярное решение $u(\xi,\eta)$ уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$. При этом, учитывая, что $U_\eta(x,y;\xi,\eta)$ имеет особенность в $y=\eta$, область D разделим на две области так, что $D = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(D_1^\varepsilon \cup D_2^\varepsilon\right)$, где

$$D_1^\varepsilon = \big\{(\xi,\eta) : 0<\xi<p,\ 0<\eta<y-\varepsilon\big\},$$

$$D_2^\varepsilon = \big\{(\xi,\eta) : 0<\xi<p,\ y+\varepsilon<\eta<l\big\}.$$

Тогда тождество (11) принимает вид

$$\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^p\int\limits_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\,(Uu_{\xi\xi} - U_\xi u_\xi + U_{\xi\xi}u)d\xi d\eta +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^p\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\frac{\partial}{\partial\xi}\,(Uu_{\xi\xi} - U_\xi u_\xi + U_{\xi\xi}u)d\xi d\eta -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^p\int\limits_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}\,(Uu_\eta - U_\eta u)\,d\xi d\eta -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^p\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\frac{\partial}{\partial\eta}\,(Uu_\eta - U_\eta u)\,d\xi d\eta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^{y-\varepsilon}(Uu_{\xi\xi} - U_\xi u_\xi + U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=p}d\eta +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=p}d\eta-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{p}\left(Uu_\eta-U_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=y-\varepsilon}d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{p}\left(Uu_\eta-U_\eta u\right)\Big|_{\eta=y+\varepsilon}^{\eta=l}d\xi=$$

$$=\int\limits_{0}^{l}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=p}d\eta-$$

$$-\int\limits_{0}^{p}\left[U\left(x,y;\xi,l\right)u_\eta\left(\xi,l\right)-U\left(x,y;\xi,0\right)u_\eta\left(\xi,0\right)\right]d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{p}\left[U_\eta\left(x,y;\xi,l\right)u\left(\xi,l\right)-U_\eta\left(x,y;\xi,0\right)u\left(\xi,0\right)\right]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{p}U_\eta\left(x,y;\xi,y-\varepsilon\right)u\left(\xi,y-\varepsilon\right)d\xi-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{p}U_\eta\left(x,y;\xi,y+\varepsilon\right)u\left(\xi,y+\varepsilon\right)d\xi.$$

Упрощая это выражение, имеем

$$\iint\limits_{D}U\left(x,y;\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta=\int\limits_{0}^{l}\left[Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right]\Big|_{\xi=0}^{\xi=p}d\eta-$$

$$-\int\limits_{0}^{p}U\left(x,y;\xi,\eta\right)u_\eta\left(\xi,\eta\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi+\int\limits_{0}^{p}U_\eta\left(x,y;\xi,\eta\right)u\left(\xi,\eta\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{p}U_\eta\left(x,y;\xi,y-\varepsilon\right)u\left(\xi,y-\varepsilon\right)d\xi-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{p}U_\eta\left(x,y;\xi,y+\varepsilon\right)u\left(\xi,y+\varepsilon\right)d\xi. \tag{12}$$

Учитывая теорему 4 из работы [10], из (12) окончательно получаем

$$2u(x,y)=\int\limits_0^l \left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=p}d\eta-$$

$$-\int\limits_0^p \left(Uu_\eta-U_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi-\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{13}$$

Пусть теперь $W(x,y,\xi,\eta)$ — любое регулярное решение сопряженного уравнения $L^*[u]=0$, $u(x,y)$ — любое регулярное решение уравнения $u_{xxx}-u_{yy}=0$. Тогда, полагая в (11) $\varphi = W(x,y;\xi,\eta)$, $\psi=u(\xi,\eta)$, имеем

$$0=\int\limits_0^l \left(Wu_{\xi\xi}-W_\xi u_\xi+W_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=p}d\eta-$$

$$-\int\limits_0^p \left(Wu_\eta-W_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi-\iint\limits_D W(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{14}$$

Из (13) и (14) находим

$$2u(x,y)=\int\limits_0^l \left(Gu_{\xi\xi}-G_\xi u_\xi+G_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=p}d\eta-$$

$$-\int\limits_0^p \left(Gu_\eta-G_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi-\iint\limits_D G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{15}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-W(x,y;\xi,\eta).$$

Построим теперь функцию $G(x,y;\xi,\eta)$, которая должна иметь следующие свойства при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$:

по переменным (x,y)

$$\begin{gathered}L[G]=0,\qquad G(x,0;\xi,\eta)=G(x,l;\xi,\eta)=0,\\ G(0,y;\xi,\eta)=G(p,y;\xi,\eta)=G_x(p,y;\xi,\eta)=0,\end{gathered} \tag{16}$$

по переменным (ξ,η)

$$\begin{gathered}L^*[G]=0,\qquad G(x,y;\xi,0)=G(x,y;\xi,l)=0,\\ G(x,y;0,\eta)=G(x,y;p,\eta)=G_\xi(x,y;0,\eta)=0.\end{gathered} \tag{17}$$

Для этого исследуем следующую вспомогательную задачу.

Задача $\mathbf{A_1}$. Найти регулярное решение в области D уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,(x,0)=0,\quad u\,(x,l)=0,\quad 0<x<p, \tag{18}$$

$$u\,(0,y)=u\,(p,y)=u'_x\,(p,y)=0,\quad 0<y<l. \tag{19}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде (см. [11, с. 95, 211])

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\sin\frac{k\pi}{l}y. \tag{20}$$

Функцию $g(x,y)$ можно разложить по системе $\left\{\sin\dfrac{k\pi}{l}y\right\}$ собственных функций:

$$g(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x)\sin\frac{k\pi}{l}y, \tag{21}$$

где

$$g_k(x)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l g(x,y)\sin\frac{k\pi}{l}y dy\,.$$

Подставив (20), (21) в (1), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big(X_k'''(x)+\lambda_k^3X_k(x)-g_k(x)\big)\sin\frac{k\pi}{l}y=0,$$

а для нахождения функции $X_k(x)$ получим следующую задачу:

$$\begin{aligned}&L\,[X_k]\equiv X_k'''(x)+\lambda_k^3X_k(x)=g_k(x),\\&X_k(0)=X_k(p)=X_k'(p)=0,\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\lambda_k^3=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

Решение задачи (22) будем искать методом построения функции Грина [12] $G_k(x,\xi)$, которая имеет следующие свойства:

1) $G_k(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x при $0\leqslant x\leqslant p$;

2) ее вторая производная по x в точке $x=\xi$ имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен 1, т. е.

$$\left.\frac{\partial^2G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi+0}-\left.\frac{\partial^2G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi+0}=1;$$

3) в каждом из интервалов $0\leqslant x<\xi$ и $\xi<x\leqslant p$ функция $G_k(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением уравнения

$$L\left[G_k\right]=\frac{\partial^3 G_k}{\partial\, x^3}+\lambda_k^3 G_k=0;$$

4) $G_k(0,\xi)=G_k\left(p,\xi\right)=G_{kx}\left(p,\xi\right)=0.$

Построим функцию $G_k(x,\xi)$ в виде

$$G_k(x,\xi)=\frac{1}{\bar\Delta}\left\{2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p+x-\xi\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)-\right.$$

$$-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(2x+\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)-$$

$$-2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]+$$

$$+2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(\xi-x)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(\xi-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]+$$

$$\left.+4e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-\xi\right)\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x\right\},\quad 0\leqslant x\leqslant\xi,$$

$$G_k(x,\xi)=\frac{1}{\bar\Delta}\left\{-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(2x+\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)-\right.$$

$$-2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]+e^{-\lambda_k(x-\xi)}+$$

$$\left.+4e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right\},$$

$$\xi\leqslant x\leqslant p, \tag{23}$$

где

$$\bar\Delta=3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Легко можно убедиться, что функция, определенная формулой (23), имеет все свойства, сформулированные при определении функции Грина.

Итак, функция Грина построена, тогда решение задачи A_1 имеет вид

$$X_k\left(x\right)=\int\limits_0^p G_k\left(x,\xi\right)g_k\left(\xi\right)d\xi. \tag{24}$$

Далее, согласно формуле (20), с учетом (24) решение задачи A_1 принимает вид

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^p G_k(x,\xi)g_k\left(\xi\right)d\xi\sin\frac{\pi k}{l}y=\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}G_k(x,\xi)\sin\frac{\pi ky}{l}g_k\left(\xi\right)d\xi. \tag{25}$$

Если функция $u(x,y)$ и ее производные u_{xxx}, u_{yy} сходятся равномерно в области D, то функция $u(x,y)$ является решением задачи A_1.

Найдем оценки функции (25):

$$|u(x,y)|\leqslant\left|\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}G_k\left(x,\xi\right)\sin\frac{\pi ky}{l}g_k\left(\xi\right)d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}\left|G_k(x,\xi)\right|\left|\sin\frac{\pi k}{l}y\right|\left|g_k\left(\xi\right)\right|d\xi\leqslant\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}\left|G_k(x,\xi)\right|\left|g_k\left(\xi\right)\right|d\xi. \tag{26}$$

При сделанных предположениях относительно $g(x,y)$ имеет место неравенство [13]

$$|g_k(\xi)|\leqslant\frac{M_1}{k^2},$$

так как $g_k(\xi)$ являются коэффициентами Фурье в разложении $g(x,y)$ на отрезке $(0,l)$.

Учитывая это, (26) можно записать в виде

$$|u(x,y)|\leqslant\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}\left|G_k(x,\xi)\right|\left|g_k\left(\xi\right)\right|d\xi\leqslant M_1\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\ \left|G_k(x,\xi)\right|d\xi. \tag{27}$$

Из (23), вычисляя оценки функции $G_k(x,\xi)$, находим

$$|G_k(x,\xi)|\leqslant\frac{10}{3}\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}}{\lambda_k^2}+\frac{2}{3}\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\delta}}{\lambda_k^2}=M_2k^{-4/3}. \tag{28}$$

Тогда из (23) получаем

$$|u(x,y)|\leqslant\ M_3\sum_{k=1}^{\infty}k^{-10/3},$$

откуда следует, что ряд (25) сходится равномерно.

Покажем, что ряд производных u_{xxx} сходится равномерно:

$$\frac{\partial^3u(x,y)}{\partial x^3}=\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,G_k(x,\xi)g_k\left(\xi\right)d\xi=\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3G_k(x,\xi)g_k\left(\xi\right)\,d\xi, \tag{29}$$

$$\left|\frac{\partial^3u(x,y)}{\partial x^3}\right|\leqslant\int_0^p\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,G_k(x,\xi)\right|\left|g_k\left(\xi\right)\right|d\xi\leqslant$$

$$\leqslant M_4 \int\limits_0^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left|\lambda_k^3 G_k(x,\xi)\right| d\xi. \tag{30}$$

Отсюда

$$\left|\lambda_k^3 G_k(x,\xi)\right| \leqslant \frac{10}{3}\lambda_k e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p} + \frac{2}{3}\lambda_k e^{-\frac{1}{2}\lambda_k \delta} \leqslant M_5 k^{2/3},$$

тогда из (30) имеем

$$\left|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}\right| \leqslant M_6 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3}, \qquad M_i = \mathrm{const} > 0, \quad i = \overline{1,6},$$

значит, ряд (29) сходится равномерно.

Поскольку

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3},$$

аналогичным образом доказывается равномерная сходимость ряда производных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (25), необходимого для выполнения уравнения (1). Изменение порядка суммирования и интегрирования всегда законно в силу того, что ряд под интегралом (25) равномерно сходится по ξ.

Заменяя в решении (25) $g_k(\xi)$ их значениями, получаем окончательное решение вспомогательной задачи A_1 в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^p \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \sin\frac{\pi k y}{l} g_k(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l}\int\limits_0^p \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \int\limits_0^l g(\xi,\eta) \sin\frac{\pi k}{l}\eta \sin\frac{\pi k}{l} y d\eta d\xi =$$

$$= \int\limits_0^p \int\limits_0^l g(\xi,\eta) \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \sin\frac{\pi k}{l}\eta \,\sin\frac{\pi k}{l} y\, d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_0^p \int\limits_0^l G(x,\xi,y,\eta)\, g(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$G(x,\xi,y,\eta) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\, \sin\frac{\pi k}{l}\eta\, \sin\frac{\pi k}{l} y. \tag{31}$$

Легко можно убедиться, что для функции $G(x, \xi, y, \eta)$ выполняются все условия задач (16), (17). Функция (31) является функцией Грина первой краевой задачи в области D. Сходимость ряда (31) следует из оценки (28) для функций $G_k(x, \xi)$ при $x \neq \xi$.

Учитывая выполнение для функции $G(x, \xi, y, \eta)$ краевых условий (16), (17), а для функции $u(x, y)$ краевых условий (3), (4), из (15) получаем решение задачи A в виде

$$2u(x,y) = \int_0^l G_{\xi\xi}(x,y,p,\eta)\,\psi_2(\eta)\,d\eta - \int_0^l G_{\xi\xi}(x,y,0,\eta)\,\psi_1(\eta)\,d\eta -$$

$$-\int_0^l G_{\xi}(x,y,p,\eta)\,\psi_3(\eta)\,d\eta + \int_0^p G_{\eta}(x,y,\xi,l)\,\varphi_2(\xi)\,d\xi -$$

$$-\int_0^p G_{\eta}(x,y,\xi,0)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi - \iint_D G(x,y,\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Итак, мы получили решение задачи A в явном виде.

Теорема 2 доказана.

1. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples // Ark. mat., astron., fys. Note 1. – 1912. – **7**, № 13. – P. 1 – 34; Note 2. – 1912. – **7**, № 21. – P. 1 – 30; Note 3. – 1912 – 1913. – **8**, № 23. – P. 1 – 51.
2. *Del Vecchio E.* Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_2(x,y) = 0$ // Mem. Real acad. cienc. Torino. Ser. 2. – 1915. – **66**. – P. 1 – 41.
3. *Del Vecchio E.* Sur deux problemes d'integration pour las equazions paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$ // Ark. mat., astron., fys. – 1916. – **11**. – P. 32 – 43.
4. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1961. – **31**. – P. 1 – 45.
5. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вест. Самар. гос. тех. ун-та. Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 18 – 26.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 296 с.
7. *Справочник* по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
8. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 6. – С. 1004 – 1014.
9. *Диесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1972. – **12**, № 5. – С. 1265 – 1279.
10. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 40 – 51.
11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
12. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 216 с.
13. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 3 т. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. – Т. 3. – 352 с.

Получено 08.04.10,
после доработки — 10.12.11