УДК 517.36

А. А. Мартынюк, Ю. А. Мартынюк-Черниенко (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕЧЕТКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ПАРАМЕТРОВ

We investigate the stability of a stationary solution of a fuzzy dynamical system by a generalized Lyapunov direct method.

Досліджується стійкість стаціонарного розв'язку неточної динамічної системи на основі узагальненого прямого методу Ляпунова.

Введение. Известно, что математическое моделирование реальных процессов в механических и другой природы системах сталкивается с двумя проблемами. Первая — это адекватность модели сложности рассматриваемой системы. Учет большого числа факторов, характеризующих систему, приводит к соответствующим уравнениям движения высокого порядка, исследование которых затруднительно. Игнорирование некоторых факторов упрощает модель, но возникает проблема корректности описания наблюдаемого явления или процесса.

Вторая проблема — это неполная информация о параметрах системы и различных факторах, влияющих на ее динамику. Эта проблема порождает некоторую неопределенность в выборе „математического инструмента" для анализа соответствующей системы. Классический математический анализ в этих ситуациях „не работает", и возникает необходимость в привлечении некоторых понятий, расширяющих классические основы анализа. В частности, теория нечетких уравнений призвана дать возможность исследователям явлений реального мира упростить решение двух задач: учесть сложность математической модели рассматриваемого явления и описать неопределенность факторов, формирующих и/или влияющих на протекаемый процесс.

В данной статье исследуется устойчивость неточных систем на основе матричнозначных функций Ляпунова (см. [1] и приведенную там библиографию).

1. Вспомогательные результаты. Основой теории нечетких дифференциальных уравнений является идея существования нечетких множеств, предложенная Zadeh (см. [2]) в 1965 году. Эта идея должна была облегчить математическое описание реальных процессов с неточными значениями параметров. К настоящему времени этот подход получил значительное развитие и применение. В данном пункте приведены краткие сведения из теории нечетких множеств и уравнений, которые необходимы для изложения результатов анализа устойчивости неточных систем на основе теории устойчивости нелинейных уравнений.

Нечеткие множества рассматриваются относительно некоторого непустого базового множества X, элементы которого имеют произвольную природу. Существенным моментом здесь является то, что каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие значение функции $u(x)$, которая принимает значения в интервале $[0, 1]$. Если $u(x) = 0$, то это соответствует непринадлежности $u(x)$ интервалу $[0, 1]$; если $0 < u(x) < 1$ — частичной принадлежности, а если $u(x) = 1$ — полной принадлежности.

Согласно Заде, нечеткое подмножество множества X является непустым подмножеством элементов $\{(x, u(x))\colon x \in X\}$ в произведении $X \times [0, 1]$ для некоторой функции $u\colon X \to [0, 1]$.

Для нечеткого множества u на X β-уровень множества $[u]^\beta$ определяется формулой

$$[u]^\beta = \{x \in X \colon u(x) \geq \beta\} \quad \text{для каждого} \quad \beta \in (0,1].$$

Носителем $[u]^0$ этого уровня является замыкание в топологии пространства X объединения всех уровней множества u, т. е.

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{\beta \in (0,1]} [u]^\beta}.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и A — некоторое непустое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Расстояние от элемента x до множества A определим формулой

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \colon a \in A\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Подмножество

$$S_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x, A) < \varepsilon\}$$

является ε-окрестностью множества A и

$$\overline{S}_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

— его замыканием.

В частности, $\overline{S}_1^n$ обозначает замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$, $\overline{S}_1^n = \overline{S}_1(\{0\})$ — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$.

Пусть A и B — некоторые непустые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Разделение Хаусдорфа множеств A и B определяется формулой

$$d_H^*(B, A) = \sup\{d(b, A) \colon b \in B\},$$

или эквивалентной формулой

$$d_H^*(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon B \subseteq A + \varepsilon \overline{S}_1^n\}.$$

Расстояние Хаусдорфа между непустыми подмножествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$d_H(A, B) = \max\{d_H^*(A, B),\, d_H^*(B, A)\}.$$

Это расстояние является симметричным относительно подмножеств A и B.

Для любых непустых подмножеств A, B, C из $\mathbb{R}^n$ выполняются соотношения:

а) $d_H(A, B) \geq 0$ и $d_H(A, B) = 0$, если и только если $\overline{A} = \overline{B}$;

б) $d_H(A, B) = d_H(B, A)$;

в) $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

Заметим, что в общем случае $d_H^*(A,B) \neq d_H^*(B,A)$.

Хаусдорфово расстояние $d_H(A,B)$ является метрикой для любых непустых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Поэтому пара (C^n, d_H) является метрическим пространством, где C^n состоит из всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Для любого непустого подмножества A из $\mathbb{R}^n$ опорная функция определяется формулой

$$s(p,A) = \sup\{\langle p,a\rangle \colon a \in A\}.$$

Эта функция может принимать значение $+\infty$ для неограниченного подмножества A.

Опорная функция $s(p,A)$ является положительно однородной, если $s(tp,A) = ts(p,A)$ для любого $t \geq 0$ и при всех $p \in \mathbb{R}^n$, где $A \in K_c^n$, K_c^n состоит из всех непустых компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Функция $s(p,A)$ является субаддитивной, если

$$s(p_1 + p_2,\, A) \leq s(p_1, A) + s(p_2, A)$$

при любых $p_1,\, p_2 \in \mathbb{R}^n$ и $A \in K_c^n$.

Ясно, что опорная функция $s(p,A)$ является выпуклой.

Далее понадобится пространство $\mathbb{E}^n$, состоящее из отображений $u\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) u полунепрерывно сверху по Бэру;

2) существует $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такое, что $u(x_0) = 1$;

3) u является нечетко выпуклым, т. е.

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)]$$

при любом значении $\lambda \in [0,1]$;

4) замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^n \colon u(x) > 0\}$ является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^n$.

Известно, что если u — нечетко выпуклое подмножество, то $[u]^\beta$ является выпуклым в $\mathbb{R}^n$ для любого $\beta \in [0,1]$.

Поскольку $\mathbb{E}^n$ является пространством некоторых функций $u\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, на $\mathbb{E}^n$ можно ввести метрику

$$d(u,v) = \sup\{|u(x) - v(x)| \colon x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Эта метрика характеризует расстояние между двумя нечеткими множествами $u,\, v \in \mathbb{E}^n$ для любой точки пространства $\mathbb{R}^n$.

Точная верхняя грань метрики d на пространстве $\mathbb{E}^n$ определяется формулой

$$d(u,v) = \sup\{d_H([u]^\beta, [v]^\beta) \colon \beta \in [0,1]\}$$

при всех $u,\, v \in \mathbb{E}^n$ и является метрикой на $\mathbb{E}^n$.

Заметим, что так как супремум в этом выражении не может быть достигнут, то его нельзя заменить операцией максимума.

Доказано (см. [3]), что пара $(\mathbb{E}^n, d)$ является полным метрическим пространством.

Пусть $\{u_n\}$ — некоторая последовательность в $\mathbb{E}^n$. Эта последовательность является сходящейся по уровням к $u \in \mathbb{E}^n$, если при всех $\beta \in (0,1]$ верно предельное соотношение $d_H(u_n^\beta, u^\beta) \to 0$, как только $n \to \infty$.

Известно, что из сходимости в метрическом пространстве $(\mathbb{E}^n, d)$ следует сходимость по уровням.

Пусть $P_k(\mathbb{R}^n)$ обозначает семейство всех непустых компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ и $T = [a,b]$, $b > a > 0$, — компактный интервал.

Отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ является строго измеримым, если для любого $\beta \in [0,1]$ множественнозначное отображение $F_\beta\colon T \to P_k(\mathbb{R}^n)$, определяемое формулой $F_\beta(t) = [F(t)]^\beta$, является измеримым по Лебегу при условии, что $P_k(\mathbb{R}^n)$ является вложением с топологией, генерируемой метрикой Хаусдорфа (см. [4, 5] и приведенную там библиографию).

Если отображение F строго измеримое, то оно измеримо в топологии, генерируемой метрикой d.

Отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ называется интегрально ограниченным, если существует интегрируемая функция $\omega(t)$ такая, что $\|x\| \le \omega(t)$ при всех $x \in F_0(t)$.

Интеграл отображения F на компактном интервале T обозначается $\int_a^b F(t)\,dt$ и определяется формулой

$$\int\limits_T F(t)\,dt = \left\{ \int\limits_T f(t)\,dt \mid f\colon T \to \mathbb{R}^n \text{ является измеримой для } F_\beta \right\}$$

при всех $0 < \beta \le 1$.

Строго измеримое и интегрально ограниченное отображение $F\colon T \to \mathbb{R}^n$ называется интегрируемым на T, если $\int_T F(t)\,dt \in \mathbb{E}^n$.

Известно, что:

1) если отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ строго измеримо и ограничено, то оно интегрируемо;

2) если отображение F непрерывно, то оно интегрируемо;

3) если отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ интегрируемо и существует $c \in T$, то

$$\int\limits_a^b F(t)dt = \int\limits_a^c F(t)dt + \int\limits_c^b F(t)dt;$$

4) если отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ интегрируемо, то вещественная функция

$$(t,\beta) \to \operatorname{diam} \left[\int\limits_a^t F(t)\,dt \right]^\beta, \qquad t \in T, \quad \beta \in [0,1],$$

является не убывающей по t на T и не возрастающей относительно β на $[0,1]$.

Пусть x, y принадлежат $\mathbb{E}^n$ и существует некоторое $z \in \mathbb{E}^n$ такое, что $x = y + z$. Тогда z называется разностью Хукухары подмножеств x и y и обозначается $x - y$.

Отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ является дифференцируемым в точке $t_0 \in T$, если существует $F'(t_0) \in \mathbb{E}^n$ такое, что пределы

$$\lim\{[F(t_0 + h) - F(t_0)]h^{-1}\colon h \to 0^+\} \qquad \text{и} \qquad \lim\{[F(t_0) - F(t_0 - h)]h^{-1}\colon h \to 0^+\}$$

существуют и равны $F'(t_0)$. При этом пределы рассматриваются в метрическом пространстве $(\mathbb{E}^n, d)$.

Семейство $\{D_H F_\beta(t)\colon \beta \in [0,1]\}$ определяет некоторый элемент $F'(t) \in \mathbb{E}^n$. Если отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ дифференцируемо в точке $t \in T$, то элемент $F'(t)$ называют нечеткой производной $F(t)$ в точке t. Отсюда следует, что если отображение F_β дифференцируемо, то многозначное отображение F_β дифференцируемо в смысле Хукухары для всех $\beta \in [0,1]$ и

$$D_H F_\beta(t) = [F'(t)]^\beta,$$

где $D_H F_\beta$ — производная Хукухары отображения F_β.

Заметим, что обратное утверждение не имеет места, т. е. из того, что существует разность $[x]^\beta - [y]^\beta$, $\beta \in [0,1]$, не следует, что существует разность $x - y$ (в смысле Хукухары).

Некоторые свойства дифференцируемых отображений приведены ниже.

Пусть отображение $F\colon T \to \mathbb{E}^n$ дифференцируемо на T. Тогда:

1) если $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \le t_2$, то существует $c \in \mathbb{E}^n$ такое, что $F(t_2) = F(t_1) + c$;

2) отображение F непрерывно на T;

3) если производная F' интегрируема на T, то

$$F(s) = F(a) + \int\limits_a^s F'(t)dt;$$

4) справедлива оценка

$$d(F(b), F(a)) \le (b - a)\sup_{t\in T} d(F'(t), \hat{0}),$$

где $\hat{0} \in \mathbb{E}^n$.

Более подробные сведения о нечетких множествах и нечетких функциях приведены в монографиях [3, 4], где имеется обширная библиография.

2. Постановка задачи. Рассматривается система уравнений возмущенного движения в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \alpha), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{E}^n$ и $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \times \mathcal{S}, \mathbb{E}^n)$. Будем рассматривать систему (1) при следующих предположениях о параметре неточности α, а именно, параметр α:

а) может представлять неточное значение какого-либо физического параметра системы или оценку внешнего возмущения;

б) может быть функцией, отображающей $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^d$ и представляющей неточно измеряемое значение входных воздействий одной из подсистем на другую;

в) может быть функцией, отображающей $R_+ \times R^n$ в R^d и представляющей нелинейные элементы рассматриваемой механической системы, которые труднодоступны для точного измерения;

г) может быть просто индексом, указывающим на существование каких-то неточностей в системе;

д) может быть комбинацией характеристик а) – в).

Пусть

$$f_m(t,x) = \overline{\text{co}} \bigcap_{\alpha \in \mathcal{S}} f(t,x,\alpha), \quad \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

$$f_M(t,x) = \overline{\text{co}} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} f(t,x,\alpha), \quad \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Здесь и далее предполагается, что $f_m(t,x)$ и $f_M(t,x) \in \mathbb{E}^n$. Очевидно, что

$$f_m(t,x) \subseteq f(t,x,\alpha) \subseteq f_M(t,x) \tag{4}$$

при всех $(t,x,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \times \mathcal{S}$.

Введем семейство отображений $f_\kappa(t,x)$ по формуле

$$f_\kappa(t,x) = f_M(t,x)\kappa + (1-\kappa) f_m(t,x), \quad 0 \le \kappa \le 1. \tag{5}$$

Наряду с системой (1) будем рассматривать дифференциальные уравнения

$$\frac{du}{dt} = f_\kappa(t,u), \quad u(t_0) = u_0, \tag{6}$$

где $f_\kappa \in C(I \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$, $I = [t_0,\ t_0 + a]$, $t_0 \ge 0$, $a > 0$, $\kappa \in [0,1]$.

Заметим, что отображения $u\colon I \to \mathbb{E}^n$ являются решениями начальной задачи (6), если они слабо непрерывны и удовлетворяют интегральному уравнению

$$u_\kappa(t) = u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\kappa(s, u_\kappa(s))\, ds$$

при всех $t \in I$ для каждого значения $\kappa \in [0,1]$.

Известно, что при всех $t \in I$ $\operatorname{diam}[u(t)]^\beta \ge \operatorname{diam}[u_0]^\beta$ для любого значения $\beta \in [0,1]$, где diam означает диаметр множества любого уровня.

Для семейства дифференциальных уравнений (6) приведем некоторые утверждения о существовании решений на I и $[t_0, \infty)$.

Теорема 1. *Предположим, что* $f_\kappa \in C(I \times \mathbb{E}^n,\, \mathbb{E}^n)$, *и, кроме того, имеет место одно из условий*:

1) *существует постоянная* $M > 0$ *такая, что*

$$d\left[f_\kappa(t,u), \hat{0}\right] \le M \quad \textit{при всех} \quad t \in I \quad \textit{и} \quad u \in \mathbb{E}^n,$$

где $\hat{0} \in \mathbb{E}^n$ *определяется формулой* $\hat{0}(x) = 1,$ *если* $x = 0,$ *и* $\hat{0}(x) = 0,$ *если* $x \neq 0;$

2) *существует постоянная* $k > 0$ *и при любом* $\kappa \in [0,1]$ *выполняется условие Липшица*

$$d\big[f_\kappa(t,u), f_\kappa(t,v)\big] \le kd[u,v]$$

при всех $t \in I$ *и* $(u,v) \in \mathbb{E}^n$.

Тогда начальная задача (6) *имеет решение* $u_\kappa(t)$ *в случае* 1 *и единственное решение* $u(t)$ *в случае* 2.

Доказательство этих утверждений основано на теореме о неподвижной точке и принципе сжатых отображений соответственно.

Далее понадобится следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что* $f_\kappa \in C(I \times \mathbb{E}^n,\, \mathbb{E}^n)$ *и выполняется одно из условий*:

1) $d\left[f_\kappa(t,u), \hat{0}\right] \le g(t, d[u,\hat{0}])$

или

2) $\lim\Big\{\sup\Big[d[u + \theta f_\kappa(t,u), \hat{0}] - d[u,\hat{0}]\Big]\theta^{-1} : \theta \to 0^+\Big\} \le g\big(t, d[u,\hat{0}]\big)$, *где* $g \in C(I \times \mathbb{R}_+,\, \mathbb{R})$.

Тогда если $d[u_0, \hat{0}] \le \omega_0$, *то справедлива оценка*

$$d[u(t), \hat{0}] \le r(t; t_0, \omega_0) \quad \textit{при всех} \quad t \in T,$$

где $r(t; t_0, \omega_0)$ — *максимальное решение уравнения сравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g(t, \omega(t)), \quad \omega(t_0) = \omega_0 \ge 0, \tag{7}$$

на интервале I.

На основе теоремы 2 устанавливаются условия глобального существования решения начальной задачи (6) в следующем виде.

Теорема 3. *Предположим, что* $f_\kappa \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$ *и существует функция* $g(t,\omega)$, $g \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$, *не убывающая по* ω *при любом* $t \in \mathbb{R}_+$ *и гарантирующая существование на* $[t_0, \infty)$ *максимального решения* $r(t; t_0, \omega_0)$ *уравнения сравнения* (7), *такая, что*

$$d[f_\kappa(t,u), \hat{0}] \le g\big(t, d[u,\hat{0}]\big) \quad \textit{при всех} \quad (t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n.$$

Если при этом выполняется одно из условий теоремы 1 *при любых* $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n$, *то максимальным интервалом существования решений* $u_\kappa(t, t_0, u_0)$ *уравнений* (6) *с начальными условиями* $d[u_0, \hat{0}] \le \omega_0$ *является интервал* $[t_0, \infty)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.7.1 из монографии [3].

3. Основные утверждения принципа сравнения. Вместе с системой уравнений (6) будем рассматривать матричнозначную функцию

$$U(t,\cdot) = [u_{ij}(t,\cdot)], \quad i,j = 1,2, \tag{8}$$

элементы которой находятся по следующему правилу:

если $\kappa = 0$, то элемент $u_{11}(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ соотносится системе

$$\frac{du}{dt} = f_m(t,u); \tag{9}$$

если $\kappa = 1$, то элемент $u_{22}(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ соотносится системе

$$\frac{du}{dt} = f_M(t,u); \tag{10}$$

если $0 < \kappa < 1$, то элемент $u_{12}(t,u) = u_{21}(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n, \mathbb{R})$ соотносится семейству систем (6).

С помощью вектора $\theta \in \mathbb{R}^2_+$ построим скалярную функцию

$$V(t,u) = \theta^{\mathrm{T}} U(t,u)\theta, \tag{11}$$

для которой в процессе ее применения формулируются условия типа условий Ляпунова в теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наряду с функцией (11) ниже применяется векторная функция

$$L(t,u) = AU(t,u)\theta, \tag{12}$$

где A — постоянная (2×2)-матрица.

Скалярная функция (11) определяется на множестве элементов $u \in \mathbb{E}^n$ и принимает значения на $\mathbb{R}$, т. е. эта функция выполняет роль нелинейного преобразования фазового пространства системы (1) в одномерное пространство. Аналогично, векторная функция (12) отображает фазовое пространство системы (1) в пространство $\mathbb{R}^2$. При некоторых дополнительных предположениях о функциях (11) и (12) их применение при исследовании качественного поведения решений системы (1) или семейства систем (6) аналогично применению прямого метода Ляпунова в теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее семейство уравнений

$$\frac{du}{dt} = f_\kappa(t,u), \quad u(t_0) = u_0, \tag{13}$$

будем рассматривать в области значений $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$, где $D(\rho) = \{u \in \mathbb{E}^n \colon d[u,0] < \rho\}$. Пусть $f_\kappa \in C(\mathbb{R}_+ \times D(\rho), \mathbb{E}^n)$ при любом значении $\beta \in [0,1]$ и решения $u_\kappa(t)$ начальных задач (13) существуют на интервале $[t_0, \infty)$.

Для уравнений (13) приведем теорему принципа сравнения со скалярной функцией Ляпунова (11).

Теорема 4. *Предположим, что для уравнений* (13) *существуют матричнозначная функция* $U(t,\cdot)$ *и вектор* $\theta \in \mathbb{R}^2_+$ *такие, что функция* (11) *удовлетворяет условиям*:

1) $V(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ \times D(\rho), \mathbb{R}_+)$ *и существует постоянная* $L > 0$ *такая, что*

$$|V(t,u_1) - V(t,u_2)| \le Ld[u_1,u_2]$$

при всех $u_1, u_2 \in D(\rho)$;

2) *существует функция* $g(t,\omega)$, $g \in C(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, *такая, что при любом значении* $\kappa \in [0,1]$

$$D^+V(t,u)\Big|_{(13)} \le g(t, V(t,u))$$

при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$;

3) *максимальное решение* $r(t;t_0,\omega_0)$ *скалярного уравнения сравнения*

$$\frac{d\omega}{dt} = g(t,\omega), \quad \omega(t_0) = \omega_0, \tag{14}$$

существует на интервале $[t_0,\infty)$.

Тогда если $V(t_0,u_0) \le \omega_0$, *то справедлива оценка*

$$V(t,u(t)) \le r(t;t_0,\omega_0)$$

при всех $t \in [t_0,\infty)$.

Доказательство. Пусть решения $u_\kappa(t)$ начальных задач (13) существуют на интервале $[t_0,\infty)$. Для функции $m(t) = V(t,u_\kappa(t))$ с начальным значением $m(t_0) \le \omega_0$ вычислим разность $m(t+h) - m(t)$ для сколь угодно малого значения $h > 0$, а именно,

$$m(t+h) - m(t) = V(t+h, u_\kappa(t+h)) - V(t, u_\kappa(t)) = V(t+h, u_\kappa(t+h)) -$$

$$-V(t+h, u_\kappa(t) + hf_\kappa(t,u_\kappa(t))) + V(t+h, u_\kappa(t) + hf_\kappa(t,u_\kappa(t))) - V(t,u_\kappa(t)) \le$$

$$\le Ld[u_\kappa(t+h), u_\kappa(t) + hf_\kappa(t,u_\kappa(t))] + V(t+h, u_\kappa(t) + hf_\kappa(t,u_\kappa(t))) - V(t,u_\kappa(t))$$

при любом значении $\kappa \in [0,1]$ Отсюда следует, что

$$D^+m(t) = \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h}[m(t+h) - m(t)] \le$$

$$\le D^+V(t,u_\kappa(t)) + L \lim_{h\to 0^+} \sup \{d[u_\kappa(t+h), u_\kappa(t) + hf_\kappa(t,u_\kappa(t))]\}. \tag{15}$$

Пусть $u_\kappa(t+h) = u_\kappa(t) + z_\kappa(t)$, где $z_\kappa(t)$ — разность Хукухары для сколь угодно малого $h > 0$. Учитывая свойства метрики $d[u,v]$, получаем

$$d[u_\kappa(t+h), u_\kappa(t) + hf_\kappa(t,u_\kappa(t))] =$$

$$= d\,[u_\kappa(t) + z_\kappa(t), u_\kappa(t) + hf_\kappa(t,u_\kappa(t))] =$$

$$= d\,[z_\kappa(t), hf_\kappa(t, u_\kappa(t))] = d\big[u_\kappa(t+h) - u_\kappa(t), hf_\kappa(t, u_\kappa(t))\big],$$

откуда находим

$$\frac{1}{h}\,d\big[u_\kappa(t+h), u_\kappa(t) + hf_\kappa(t, u(t))\big] =$$

$$= d\left[\frac{u_\kappa(t+h) - u_\kappa(t)}{h},\ f_\kappa(t, u_\kappa(t))\right]. \tag{16}$$

Переходя к пределу в соотношении (16), имеем

$$\lim_{h\to 0^+}\sup \frac{1}{h}\big\{d\big[u_\kappa(t+h), u(t) + hf_\kappa(t, u_\kappa(t))\big]\big\} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\sup \frac{1}{h}\left\{d\left[\frac{u_\kappa(t+h) - u_\kappa(t)}{h},\ f_\kappa(t, u_\kappa(t))\right]\right\} =$$

$$= d\left[\frac{du_\kappa}{dt}(t),\ f_\kappa(t, u(t))\right] \tag{17}$$

вдоль любого решения $u\kappa(t)$ системы (13). С учетом соотношения (17) оценка (15) принимает вид

$$D^+m(t) \le g(t, m(t)), \quad m(t_0) \le \omega_0, \tag{18}$$

откуда следует, что

$$m(t) \le r(t; t_0, \omega_0)$$

при всех $t \ge t_0$.

Теорема 4 доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы 4.

***Следствие* 1.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 4, *за исключением условия* 2, *вместо которого выполняется неравенство*

2′) $D^+V(t, u_\kappa(t))|_{(13)} \le 0$.

Тогда $V(t, u_\kappa(t)) \le V(t_0, u_0)$ *при всех* $t \ge t_0$.

***Следствие* 2.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 4, *за исключением условия* 2, *вместо которого выполняется неравенство*

2″) $D^+V(t, u_\kappa(t))|_{(13)} \le -a[\omega(t, u_\kappa(t))] + g(t, V(t, u_\kappa(t)))$, *где* $\omega \in C(\mathbb{R}_+ \times D(\rho), \mathbb{R}_+)$, a *принадлежит* K*-классу Хана,* $g(t, \omega)$ *— не убывающая по* ω *при каждом* $t \in \mathbb{R}_+$.

Тогда если $V(t_0, u_0) \le \omega_0$, *то*

$$V(t, u_\kappa(t)) + \int\limits_{t_0}^{t} a[\omega(s, u_\kappa(s))]\,ds \le r(t; t_0, \omega_0)$$

при всех $t \ge t_0$ *и* $\kappa \in [0, 1]$.

Сформулируем теперь теорему принципа сравнения с векторной функцией (12) для семейства уравнений (13).

Напомним, что вектор-функция $G(t,\omega)$ имеет свойство квазимонотонности, если из того, что $\omega_1 \le \omega_2$ и $\omega_{i1} = \omega_{i2}$ при $1 \le i \le 2$, следует неравенство $G_i(t,\omega_1) \le G_i(t,\omega_2)$ при любых $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathbb{R}^2$. Если $G(t,\omega) = A\omega$, где A — постоянная (2×2)-матрица, то функция $G(t,\omega)$ является квазимонотонной, если $a_{ij} \ge 0$ при $i \ne j$.

Теорема 5. *Предположим, что для семейства уравнений* (13) *существуют матричнозначная функция* $U(t,x)$, *постоянная* (2×2)-*матрица* A *и вектор* $\theta \in \mathbb{R}^2_+$ *такие, что функция* (12) *удовлетворяет условиям*:

1) $L(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n,\ \mathbb{R}^2_+)$ *и существует постоянная* (2×2)-*матрица* B *с неотрицательными элементами такая, что*

$$|L(t,u_1) - L(t,u_2)| \le BD[u_1,u_2]$$

при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$, *где* $D[u_1,u_2] = (d[u_1,v_1],\, d[u_2,v_2])^{\mathrm{T}}$;

2) *существует вектор-функция* $G(t,\omega)$, *квазимонотонная по* ω *при всех* $t \in [t_0,\infty)$, *такая, что*

$$D^+L(t,u_\kappa(t))|_{(13)} \le G(t, L(t,u_\kappa(t))),$$

где $G \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2_+,\ \mathbb{R}^2)$;

3) *максимальное решение* $r(t) = r(t;t_0,\omega_0)$ *векторного дифференциального уравнения*

$$\frac{d\omega}{dt} = G(t,\omega), \quad \omega(t_0) = \omega_0 \ge 0,$$

существует при всех $t \in [t_0,\infty)$.

Тогда при начальных условиях $L(t_0,u_0) \le \omega_0$ *справедлива оценка*

$$L(t,u(t)) \le r(t;t_0,\omega_0) \tag{19}$$

при всех $t \ge t_0$, *для которых существуют решения* $u_\kappa(t)$ *семейства уравнений* (13).

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

***Следствие* 3.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 5 *с функцией* $G(t,u) = Au$, *где* A — *постоянная* (2×2)-*матрица с элементами* $a_{ij} \ge 0,\ i \ne j,\ i,\ j = 1,2$. *Тогда оценка* (19) *имеет вид*

$$L(t,u_\kappa(t)) \le L(t_0,u_0)e^{A(t-t_0)} \tag{20}$$

при всех $t \ge t_0$ *и* $\kappa \in [0,1]$.

4. Анализ устойчивости движения. Как было отмечено выше, функция diam $[u(t)]^\beta$ является неубывающей при $t \to \infty$. По этой причине непосредственное применение $\|u(t)\|$ при исследовании устойчивости решений уравнения (6) неадекватно динамическим свойствам решений этого уравнения. Учитывая это обстоятельство, относительно уравнения (6) сделаем некоторые предположения.

H_1. При любом значении $\alpha \in \mathcal{S}$ уравнение (1) имеет стационарное решение θ_0, т. е. $f(t, \theta_0, \alpha) = \theta_0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$.

H_2. Для начальных значений $u_0 \in D_0(\rho) \subset D(\rho)$ и любого $y_0 \in D_0(\rho)$ существует разность Хукухары $u_0 - y_0 = \omega_0$.

H_3. Решение $u(t, t_0, w_0)$ уравнения (1) существует при всех $t \geq t_0$ и единственно.

Таким образом, будем исследовать устойчивость стационарного решения θ_0 при выполнении предположений $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3$.

Определение 1. *Стационарное решение θ_0 уравнения* (1):

а) *устойчиво, если для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что при начальном условии $d[\omega_0, \theta_0] < \delta$ для любого решения $u(t; t_0, w_0)$ имеет место оценка $d[u(t; t_0, w_0), \theta_0] < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$*;

б) *равномерно устойчиво, если в определении* 1(а) *величина δ не зависит от t_0*;

в) *притягивающее, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta(t_0) > 0$ и для любого $\xi > 0$ существует $\tau(t_0, \omega_0, \xi) \in \mathbb{R}_+$ такое, что из условия $d[\omega_0, \theta_0] < \delta(t_0)$ следует, что $d[u(t; t_0, w_0), \theta_0] < \xi$ при всех $t \geq t_0 + \tau(t_0, \omega_0, \xi)$*;

г) *равномерно притягивающее, если величины δ и τ в определении* 1(в) *не зависят от t_0*;

д) *асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и притягивающее*;

е) *равномерно асимптотически устойчиво, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

***Пример* 1.** Рассмотрим в $\mathbb{E}^1$ уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{E}^1, \tag{21}$$

где $(\alpha \neq 0) \in [-1, 1]$, которое запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^\beta}{dt} &= \alpha x_2^\beta, \quad x_1^\beta = x_{10}^\beta, \\ \frac{dx_2^\beta}{dt} &= \alpha x_1^\beta, \quad x_2^\beta = x_{20}^\beta, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\beta \in [0, 1]$. При этом для начальных значений $x_0 \in \mathbb{E}^1$ по уровням $[x_0]^\beta = [x_{10}^\beta, x_{20}^\beta]$ при $\beta \in [0, 1]$ общее решение системы (22) имеет вид

$$\begin{aligned} [x_1(t)]^\beta &= \frac{1}{2}\left(x_{10}^\beta + x_{20}^\beta\right) e^{\alpha t} + \frac{1}{2}\left(x_{10}^\beta - x_{20}^\beta\right) e^{-\alpha t}, \\ [x_2(t)]^\beta &= \frac{1}{2}\left(x_{10}^\beta + x_{20}^\beta\right) e^{\alpha t} - \frac{1}{2}\left(x_{10}^\beta - x_{20}^\beta\right) e^{-\alpha t} \end{aligned} \tag{23}$$

при всех $0 \leq \beta \leq 1$ и $t \geq 0$.

Из выражений (23) следует, что ко всем β-уровням нулевое решение уравнения (21) неустойчиво при сколь угодно малых численных значениях x_{10}^{β}, x_{20}^{β} и при любом $\eta \in [0,1]$. В то же время эти решения имеют устойчивость при некоторых дополнительных условиях для начальных значений $[x_0]^{\beta} = [x_{10}^{\beta}, x_{20}^{\beta}]$. А именно, если $x_{10}^{\beta} + x_{20}^{\beta} = 0$ при $0 < \alpha < 1$ или $x_{10}^{\beta} - x_{20}^{\beta} = 0$ при $-1 < \alpha < 0$ и при всех $\beta \in [0,1]$, то из формул (23) следует, что $[x_1(t)]^{\beta}$ и $[x_2(t)]^{\beta}$ неограниченно убывают при $t \to \infty$. Эти условия эквивалентны существованию разности Хукухары $[w_0]^{\beta}$ для начальных значений $[x_{10}^{\beta}, x_{20}^{\beta}]$ при всех $\beta \in [0,1]$.

Заметим, что устойчивость стационарного решения θ_0 рассматривается при начальных возмущениях специального вида. А именно, эти возмущения связаны существованием разности Хукухары. Устойчивость такого рода в классической теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений называется условной устойчивостью, так как начальные возмущения связаны между собой некоторыми соотношениями.

Приведем теперь некоторые теоремы об устойчивости стационарного решения θ_0 нечеткого уравнения (1) на основе скалярной вспомогательной функции (11).

Теорема 6. *Предположим, что дифференциальное уравнение* (1) *удовлетворяет предположениям* $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3$ *и, кроме того*:

1) *существуют матричнозначная функция* (8) *и вектор* $\theta \in \mathbb{R}_+^2$ *такие, что функция* $V(t,u) \in C(\mathbb{R}_+ \times D(\rho), \mathbb{R}_+)$ *и* $|V(t,u_1) - V(t,u_2)| \le Ld[u_1,u_2]$, *где* $L > 0$ — *некоторая постоянная величина;*

2) *существуют векторные функции сравнения* a, b, *принадлежащие* K-*классу*, *и постоянные положительно определенные симметрические* (2×2)-*матрицы* A_1 *и* A_2 *такие*, *что*

$$a^{\mathrm{T}}(d[u,\theta_0])A_1 a(d[u,\theta_0]) \le V(t,u) \le b^{\mathrm{T}}(t,d[u,\theta_0])A_2 b(t,d[u,\theta_0]) \tag{24}$$

при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$;

3) *выполняется неравенство*

$$D^+V(t,u)|_{(1)} \le 0$$

при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$.

Тогда стационарное решение θ_0 *уравнения* (1) *устойчиво.*

Доказательство. При выполнении условия 2 теоремы 6 оценку (24) можно преобразовать к виду

$$\lambda_m(A_1)\overline{a}(d[u,\theta_0]) \le V(t,u) \le \lambda_M(A_2)\overline{b}(t,d[u,\theta_0]) \tag{25}$$

при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$, где $\lambda_m(A_1) > 0$ и $\lambda_M(A_2) > 0$ — минимальное и максимальное собственные значения матриц A_1 и A_2 соответственно, а функции сравнения $\overline{a}$, $\overline{b}$, принадлежащие K-классу, такие, что

$$\overline{a}(d[u,\theta_0]) \le a^{\mathrm{T}}(d[u,\theta_0])a(d[u,\theta_0])$$

и

$$\overline{b}(t,d[u,\theta_0]) \geq b^{\mathrm{T}}(t,d[u,\theta_0])b(t,d[u,\theta_0]).$$

Пусть заданы $0<\varepsilon<\rho$ и $t_0\in\mathbb{R}_+$. Выберем $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)$ так, что

$$\lambda_M(A_2)\overline{b}(t_0,\delta)<\lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon). \tag{26}$$

Покажем, что при таком выборе величины δ стационарное решение θ_0 уравнения (1) устойчиво. Если это не так, то должны существовать решение $u(t;t_0,w_0)$ и значение $t_1>t_0$ такие, что

$$d[u(t_1),\theta_0]=\varepsilon \qquad \text{и} \qquad d[u(t),\theta_0]\leq\varepsilon<\rho \tag{27}$$

при всех $t_0\leq t<t_1$.

Согласно условию 3 теоремы 6 и следствию 1 имеем

$$V(t,u(t))\leq V(t_0,u_0) \quad \text{при всех} \quad t_0\leq t\leq t_1. \tag{28}$$

Отсюда, учитывая оценки (25) и (26), получаем неравенство

$$\lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon)=\lambda_m(A_1)\overline{a}(d[u(t_1),\theta_0])\leq V(t_1,u(t_1))\leq V(t_0,u_0)\leq$$

$$\leq\lambda_M(A_2)\overline{b}(t_0,d[u_0,\theta_0])<\lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon).$$

Полученное противоречие доказывает, что при $d[\omega_0,\theta_0]<\delta$ выполняется неравенство $d[u(t;t_0,w_0),\theta_0]<\varepsilon$ при всех $t\geq t_0$.

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Предположим, что выполняются условия* 1, 2 *теоремы* 6 *и вместо условия* 3 *выполняется условие*

$3')$ *существует постоянная* $\beta>0$ *такая, что*

$$D^+V(t,u)|_{(1)}\leq-\beta V(t,u)$$

при всех $(t,u)\in\mathbb{R}_+\times D(\rho)$ *и* $\alpha\in\mathcal{S}$.

Тогда стационарное решение θ_0 *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 7 выполняются все условия теоремы 6, и, следовательно, стационарное решение θ_0 уравнения (1) устойчиво. Пусть $\varepsilon=\rho$ и $\delta_0=\delta(t_0,\rho)$. При этом, согласно теореме 6, из условия $d[u_0,\theta_0]<\delta_0$ следует, что $d[u(t),\theta_0]<\rho$ при всех $t\geq t_0$.

Из условия $3'$ теоремы 7 получим

$$V(t,u(t))\leq V(t_0,u_0)\exp[-\beta(t-t_0)]$$

при всех $t\geq t_0$. Для заданного $\varepsilon>0$ выберем величину

$$\tau(t_0,\varepsilon)=\frac{1}{\beta}\ln\frac{\lambda_M(A_2)\overline{b}(t_0,\delta_0)}{\lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon)}+1.$$

Тогда

$$\lambda_m(A_1)\overline{a}(d[u(t),\theta_0]) \leq V(t,u(t)) \leq$$

$$\leq \lambda_M(A_2)\overline{b}(t_0,\delta)\exp[-\beta(t-t_0)] < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon)$$

при всех $t \geq t_0+\tau(t_0,\varepsilon)$. Отсюда следует, что при начальном условии $d[\omega_0,\theta_0] < \delta_0$ выполняется оценка

$$d[u(t;t_0,w_0),\theta_0] < \varepsilon$$

при всех $t \geq t_0+\tau(t_0,\varepsilon)$.

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. *Предположим, что уравнение* (1) *удовлетворяет условиям* $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3$ *и, кроме того*:

1) *существуют функция* (11), *при всех* $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times (D(\rho) \cap D^c(\eta))$ *для каждого* $0 < \eta < \rho$ *функция* $V \in C(\mathbb{R}_+ \times (D(\rho) \cap D^c(\eta)))$, *и постоянная* $L > 0$ *такие, что*

$$|V(t,u_1) - V(t,u_2)| \leq Ld[u_1,u_2];$$

2) *существуют векторные функции сравнения* a, b, *принадлежащие* K*-классу, и постоянные симметрические положительно определенные* (2×2)*-матрицы* A_1 *и* A_2 *такие, что*

$$a^{\mathrm{T}}(d[u,\theta_0])A_1 a(d[u,\theta_0]) \leq V(t,u) \leq b^{\mathrm{T}}(t,d[u,\theta_0])A_2 b(t,d[u,\theta_0]);$$

3) *при всех* $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times (D(\rho) \cap D^c(\eta))$ *и* $\alpha \in \mathcal{S}$ *выполняется условие*

$$D^+V(t,u)|_{(1)} \leq 0.$$

Тогда стационарное решение θ_0 *уравнения* (1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Из условия 2 теоремы 8 следует, что

$$\lambda_m(A_1)\overline{a}(d[u,0]) \leq V(t,u) \leq \lambda_M(A_2)\overline{b}(d[u,0])$$

при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times (D(\rho) \cap D^c(\eta))$.

Пусть заданы $0 < \varepsilon < \rho$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что

$$\lambda_M(A_2)\overline{b}(\delta) < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon). \tag{29}$$

Покажем, что при таком выборе величины δ стационарное решение θ_0 уравнения (1) равномерно устойчиво. Если это не так, то должны существовать решение $u(t)$ уравнения (1) и моменты времени $t_2 > t_1 > t_0$ такие, что $d[u(t_1),0] = \delta$, $d[u(t_2),0] = \varepsilon$ и $\delta \leq d[u(t),0] \leq \varepsilon < \rho$ при $t \in [t_1,t_2]$.

Положим $\eta = \delta$, тогда согласно условию 3 теоремы 8 получим оценку

$$V(t_2,u(t_2)) \leq V(t_1,u(t_1)).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon) = \lambda_m(A_1)\overline{a}(d[u(t_2),\theta_0]) \le V(t_2,u(t_2)) \le V(t_1,u(t_1)) \le$$

$$\le \lambda_M(A_2)\overline{b}(d[u(t_1),\theta_0]) = \lambda_M(A_2)\overline{b}(\delta) < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon).$$

Полученное противоречие доказывает теорему 8.

Теорема 9. *Предположим, что выполняются условия* 1, 2 *теоремы* 8 *и, кроме того,*

3$'$) *при всех* $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times (D(\rho) \cap D^c(\eta))$ *и* $\alpha \in \mathcal{S}$ *выполняется неравенство*

$$D^+V(t,u)|_{(1)} \le -c(d[u,\theta_0]),$$

где с принадлежит K-классу.

Тогда стационарное решение θ_0 уравнения (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 9 выполняются все условия теоремы 8 и, следовательно, стационарное решение θ_0 уравнения (1) равномерно устойчиво. Пусть $\varepsilon = \rho$ и $\delta_0 = \delta_0(\rho)$, тогда из условия $d[u_0,\theta_0] < \delta_0$ следует, что $d[u(t),\theta_0] < \rho$ при всех $t \ge t_0$. Теорема 9 будет доказана, если покажем, что решение θ_0 является притягивающим, т. е. существует $t^* \ge t_0$ такое, что

$$d[u(t^*),\theta_0] < \delta$$

при $t_0 \le t^* \le t_0 + \tau$, где $\tau = 1 + \dfrac{\lambda_M(A_2)\overline{b}(\delta_0)}{\lambda_m(A_1)\overline{a}(\delta)}$.

Пусть это не так, и $\delta \le d[u(t),\theta_0]$ при $t_0 \le t \le t_0 + \tau$. Тогда из условия 3$'$ следует, что

$$V(t,u(t)) \le V(t_0,u_0) - \int\limits_{t_0}^{t} c(d[u(s),\theta_0])\,ds$$

при всех $t_0 \le t \le t_0 + \tau$. Отсюда при указанном выше выборе величины τ имеем

$$0 \le V(t_0+\tau, u(t_0+\tau)) \le \lambda_M(A_2)\overline{b}(\delta_0) - c(\delta)\tau < 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что оценка (27) справедлива, и при $d[\omega_0,\theta_0] < \delta$ выполняется неравенство $d[u(t;t_0,w_0),\theta_0] < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0 + \tau$.

Далее применяются функция (12) и теорема 5 для анализа устойчивости стационарного решения θ_0 уравнения (13).

Теорема 10. *Предположим, что для уравнения* (1) *выполняются все условия теоремы* 5 *и, кроме того, функция*

$$V_0(t,u) = \sum_{i=1}^{2} L_i(t,u) \tag{30}$$

удовлетворяет оценкам

$$a^{\mathrm{T}}(d[u,\theta_0])A_1a(d[u,\theta_0]) \le V_0(t,u) \le b^{\mathrm{T}}(d[u,\theta_0])A_2b(d[u,\theta_0]), \tag{31}$$

где A_1, A_2 — постоянные симметрические положительно определенные (2×2)-матрицы, а векторные функции сравнения a, b принадлежат K-классу.

Тогда свойства устойчивости стационарного решения θ_0 уравнения (1) следуют из соответствующих свойств устойчивости нулевого решения системы сравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = G(t, \omega), \qquad \omega(t_0) = \omega_0 \geq 0, \tag{32}$$

где $G \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}^2)$, $G(t, 0) = 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$.

Доказательство. Заметим, что динамические свойства решений уравнения (1) и системы (32) посредством функции

$$L(t, u) = AU(t, u)\theta$$

(см. (12)) связаны с неравенством

$$D^+ L(t, u)|_{(1)} \leq G(t, L(t, u)) \tag{33}$$

и с динамическими свойствами нулевого решения системы сравнения (32) оценкой (19). При определенных ограничениях на функцию (30) и максимальное решение $r(t; t_0, \omega_0)$ системы (32) нетрудно получить заключение о динамических свойствах стационарного решения θ_0 уравнения (1).

Проиллюстрируем описанный подход на примере анализа асимптотической устойчивости стационарного решения θ_0 уравнения (1).

Пусть заданы $0 < \varepsilon < \rho$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что нулевое решение системы (32) асимптотически устойчиво. При этом оно устойчиво и для заданных $\lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon) > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что из условия

$$\sum_{i=1}^{2} \omega_{i0} < \delta_1 \tag{34}$$

следует, что

$$\sum_{i=1}^{2} \omega_i(t; t_0, \omega_0) < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon)$$

при всех $t \geq t_0$, где $\omega(t; t_0, \omega_0)$ — решение системы (29), $\lambda_m(A_1)$ — минимальное собственное значение матрицы A_1, $\overline{a}$ принадлежит K-классу и такая, что $a^{\mathrm{T}}(d[u, \theta_0])a(d[u, \theta_0]) \geq \overline{a}(d[u, \theta_0])$ в области $D(\rho)$.

Пусть $\omega_0 = V_0(t_0, u_0)$ и выберем $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ так, что

$$\lambda_M(A_2)\overline{b}(\delta) < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon). \tag{35}$$

Покажем, что если $d[\omega_0, \theta_0] < \delta$, то $d[u(t; t_0, w_0), \theta_0] < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, где $u(t; t_0, y_0)$ — любое решение уравнения (1). Если это не так, то должно существовать значение $t_1 > t_0$ такое, что

$$d[u(t_1; t_0, w_0), \theta_0] = \varepsilon \qquad \text{и} \qquad d[u(t; t_0, w_0), \theta_0] \le \varepsilon < \rho \tag{36}$$

при всех $t_0 \le t \le t_1$. Согласно теореме 5 из оценки (19) следует, что

$$L(t, u(t)) \le r(t; t_0, \omega_0) \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Из неравенства (28) находим

$$V_0(t_0, u_0) \le \lambda_M(A_2)\overline{b}(d[u_0, 0]) < \lambda_M(A_2)\overline{b}(\delta) < \delta_1$$

и далее

$$\lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon) \le V_0(t_1, u(t_1)) \le r_0(t_1; t_0, \omega_0) < \lambda_M(A_2)\overline{b}(\varepsilon) < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\varepsilon), \tag{37}$$

где

$$r_0(t_1; t_0, \omega_0) = \sum_{i=1}^{2} r_i(t; t_0, \omega_0).$$

Противоречие (37) доказывает, что стационарное решение θ_0 нечеткого уравнения (1) устойчиво.

Докажем, что оно притягивающее. Пусть $\varepsilon = \rho$ и $\hat{\delta}_0 = \delta(t_0, \rho) > 0$. Выберем $0 < \eta < \rho$ и для заданных $\lambda_m(A_1)\overline{a}(\eta)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ выберем $\delta_1^* = \delta_1(t_0) > 0$ и $\tau = \tau(t_0, \eta) > 0$ так, что из условия

$$\sum_{i=1}^{2} \omega_{i0} < \delta_0^* \tag{38}$$

следует, что

$$\sum_{i=1}^{2} \omega_i(t; t_0, \omega_0) < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\eta)$$

при всех $t \ge t_0 + \tau$.

Пусть $\omega_0 = V_0(t_0, u_0)$. Определим $\delta_0^* = \delta_0(t_0) > 0$ так, что $\lambda_M(A_2) \times \overline{b}(\delta_0^*) < \delta_1^*$. Выберем $\delta_0 = \min(\delta_1^*, \delta_0^*)$ и предположим, что $d[\omega_0, \theta_0] < \delta_0$. Отсюда следует, что $d[u(t; t_0, w_0), \theta_0] < \rho$ при всех $t \ge t_0$ и оценка (19) справедлива при всех $t \ge t_0$. Далее, предположим, что существует последовательность $\{t_k\},\ t_k \ge t_0 + \tau,\ t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и $\eta \le d[u(t_k), \theta_0]$, где $u(t)$ — любое решение уравнения (1) с начальными условиями $d[\omega_0, 0] < \delta_0$. Здесь ω_0 такое, что разность Хукухары $x_0 - y_0 = \omega_0$.

Из оценки (31) и условий (38) следует, что

$$\lambda_m(A_1)\overline{a}(\eta) \le V_0(t_k, u(t_k)) \le r_0(t_k, t_0, \omega_0) < \lambda_m(A_1)\overline{a}(\eta). \tag{39}$$

Противоречие (39) доказывает, что стационарное решение θ_0 уравнения (13) притягивающее и, следовательно, асимптотически устойчиво.

***Пример* 2.** Рассмотрим уравнение (1) на $\mathbb{E}^1$, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\alpha), \ x(t_0) = x_0, \tag{40}$$

где $x \in \mathbb{E}^1$ и $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^1 \times S, \mathbb{E}^1)$. Пусть существует функция $c(t)$ такая, что:

а) $d\,[f(t,x,\alpha),\theta_0] \leq c(t)d[x,\theta_0]$ при всех $\alpha \in S$;

б) $\displaystyle\int_0^\infty c(s)ds \leq +\infty$.

Если правая часть уравнения (40) удовлетворяет условиям $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3$, то стационарное решение $\theta_0 \in \mathbb{E}^1$ равномерно устойчиво. Действительно, функция $V(x) = d[x,\theta_0]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6, так как для любых $0 < k_1 < k_2$ выполняется оценка

$$k_1 d[x,\theta_0] \leq V(x) \leq k_2 d[x,\theta_0]$$

и

$$|V(x) - V(y)| \leq d[x,y] \quad \text{при всех} \quad (x,y) \in D_0(\rho).$$

Кроме того, при любом $\alpha \in \mathcal{G}$ для сколь угодно малого $h > 0$

$$V\,(x + hf(t,x,\alpha)) = d\,[x + hf(t,x,\alpha),\theta_0] \leq$$

$$\leq d[x,\theta_0] + hd\,[f(t,x,\alpha),\theta_0] \leq d[x,\theta_0] + hc(t)d[x,\theta_0].$$

Из того, что

$$D^+V(x) = \limsup\left\{[d\,[x + hf(t,x,\alpha),\theta_0] - d[x,\theta_0]]\,h^{-1}\colon h \to 0^+\right\}$$

и оценки (27) следует, что

$$D^+V(x) \leq c(t)d[x,\theta_0] \quad \text{при всех} \quad \alpha \in \mathcal{G}.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\frac{dm(t)}{dt} = c(t)m(t), \quad m(t_0) = m_0 \geq 0, \tag{41}$$

является уравнением сравнения для уравнения (40) с функцией $V(x) = d\,[x,\theta_0]$. Известно, что при выполнении условия б) нулевое решение уравнения (41) равномерно устойчиво и в силу принципа сравнения такое же свойство имеет стационарное решение θ_0 уравнения (40).

5. Критерий устойчивости системы сравнения в одном случае. В условиях теоремы 9 важным является анализ устойчивости нулевого решения системы сравнения (32). В случае, когда $G(t,\omega)$ является автономной вектор-функцией, задача об устойчивости нулевого решения системы сравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = G(\omega), \qquad \omega(t_0) = \omega_0 \geq 0, \tag{42}$$

имеет эффективное решение в следующем виде.

Предположим, что система сравнения (42) удовлетворяет таким условиям:

а) вектор-функция G принадлежит $C(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}^2)$ и является квазимонотонной не убывающей по ω относительно конуса

$$K = \{\omega \in \mathbb{R}^2 \colon \omega_i \geq 0,\ i = 1, 2\};$$

б) существует локальное решение $\omega(t)$ начальной задачи (37), и оно единственное при заданных начальных условиях;

в) существует окрестность D^* точки $\omega = 0$ такая, что при всех $\omega \in \overline{D}^*$ и при $\omega \neq 0$ $G(\omega) \neq 0$ и $G(0) = 0$.

Приведем условия равномерной асимптотической устойчивости стационарного решения уравнения (1) в следующем виде.

Теорема 11. *Предположим, что для дифференциального уравнения* (1) *выполняются следующие условия*:

1) *существует матричнозначная функция* $U(t, x)$ *и выполняется условие* 1 *теоремы* 5;

2) *существует вектор-функция* $G(\omega)$, *удовлетворяющая условиям* а), в) *и такая, что*

$$D^+ L(t, u)|_{(1)} \leq G(L(t, u)) \tag{43}$$

при всех $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$ *и* $\alpha \in \mathcal{S}$;

3) *функция* (30) *удовлетворяет оценкам* (31) *в области значений* $(t, u) \in \mathbb{R}_+ \times D(\rho)$;

4) *для любого* $\delta > 0$ *система неравенств*

$$G_i(\omega_1, \omega_2) < 0, \quad i = 1, 2,$$

имеет решение $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ *такое, что* $0 < \overline{\omega}_i < \delta$ *при* $i = 1, 2$.

Тогда стационарное решение θ_0 *уравнения* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. При выполнении условия 4 теоремы 11 изолированное нулевое решение системы (42) равномерно асимптотически устойчиво (см. [6]). Далее, применяя рассуждения из доказательства теоремы 9, завершаем доказательство теоремы 11.

***Следствие* 4.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 11 *с функцией* $G(\omega) = P\omega$, *где* P — *постоянная* (2×2)-*матрица с неотрицательными внедиагональными элементами. Если система неравенств*

$$\sum_{j=1}^{2} p_{ij}\overline{\omega}_j < 0, \quad i = 1, 2,$$

имеет решение $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ *такое, что* $0 < \overline{\omega}_j$ *при всех* $j = 1, 2$, *то стационарное решение* θ_0 *уравнения* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Условие 4 теоремы 11 является необходимым и достаточным для устойчивости нулевого решения системы сравнения (42). Построение функции (30) на основе векторной функции (12) позволяет уточнить мажоранту $G(L)$ в неравенстве (43). В свою очередь от точности мажоранты зависят ограничения на параметры системы сравнения, при которых имеет место равномерная асимптотическая устойчивость стационарного решения θ_0 системы (1).

6. Заключительные замечания. Условия различных типов устойчивости стационарного решения θ_0 получены в работе в терминах существования функций (11), (12) со специальными свойствами. Поскольку непосредственное построение функции $V(t,u)$, удовлетворяющей оценкам вида (24), затруднительно, применение матричной функции $U(t,u)$ с элементами $u_{ij}(t,u)$, $i,\ j=1,2$, упрощает эту процедуру. А именно, элементы $u_{ii}(t,u)$ при $i=1,2$ строятся для систем (9), (10) и такие, что

$$\underline{\alpha}_{ii}a_i^2(d[u,\theta_0]) \le u_{ii}(t,u) \le \overline{\alpha}_{ii}b_i^2(t,d[u,\theta_0]),$$

где $\underline{\alpha}_{ii}>0$, $\overline{\alpha}_{ii}>0$, a_i принадлежат K-классу Хана, b_i — CK-классу Хана, $i=1,2$, при всех $(t,u)\in R_+\times D(\rho)$. Элемент $u_{12}(t,u)=u_{21}(t,u)$ сопоставляется с системой (13) и должен удовлетворять неравенствам

$$\underline{\alpha}_{12}a_i(d[w,\theta_0])a_j(d[z,\theta_0]) \le$$

$$\le u_{ij}(t,w,z) \le \overline{\alpha}_{12}b_i(t,d[w,\theta_0])b_j(t,d[z,\theta_0]),$$

где $\underline{\alpha}_{ij}\in R$ и $\overline{\alpha}_{ij}\in R$ при $i\ne j,\ i,j=1,2$, $(u=(w^{\mathrm{T}},z^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}})$ при $(t,u)\in R_+\times D(\rho)$. При этом условия определенной положительности и убывания функции $V(t,u)$ формулируются в терминах знакоопределенности двух (2×2)-матриц.

Таким образом, исследование динамических свойств решений системы (1) на основе функций Ляпунова (11) и (12) может оказаться более простой задачей.

1. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Неточные динамические системы: Устойчивость и управление движением. – Киев: Феникс, 2009. – 304 с.
2. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Int. Control. – 1965. – **8**. – P. 338 – 353.
3. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor and Francis, 2003. – 178 p.
4. *Плотников А. В., Скрипник Н. В.* Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
5. *Aubin J. P., Cellina A.* Differential inclusions. – New York: Springer, 1984.
6. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Устойчивость автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16.** – С. 1392 – 1407.

Получено 10.11.10,
после доработки — 18.01.12