УДК 512.552.12

В. П. Щедрик (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КОМУТАТИВНІ ОБЛАСТІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ ТА ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ЇХ ЕЛЕМЕНТІВ

We study commutative domains of elementary divisors from the viewpoint of investigation of the structure of invertible matrices that reduce a given matrix to the diagonal form. Some properties of elements of these domains are indicated. We establish conditions, close to the stable-rank conditions, under which a commutative Bézout domain is a domain of elementary divisors.

Исследуются коммутативные области элементарных делителей с точки зрения изучения структуры обратимых матриц, которые приводят заданную матрицу к диагональному виду. Указаны некоторые свойства элементов таких областей. Установлены условия, близкие к условиям стабильного ранга, при которых коммутативная область Безу является областью элементарных делителей.

1. Вступ. І. Капланський [1] увів поняття кільця елементарних дільників як такого кільця R, над яким кожна матриця має властивість діагональної редукції, тобто для кожної матриці A над таким кільцем існують оборотні матриці P, Q відповідних розмірів такі, що

$$PAQ = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$$

де

$$Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \cap Rd_i, \quad i = 1, \ldots, r-1. \tag{1}$$

Якщо R — комутативне кільце, то умова (1) рівносильна тому, що $d_i | d_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$. У цій же статті ним було введено поняття правого кільця Ерміта як такого кільця, над яким кожна (1×2)-матриця має властивість діагональної редукції, і показано, що праве кільце Ерміта є правим кільцем Безу, тобто кільцем скінченнопороджених правих головних ідеалів. У випадку комутативних областей ці кільця збігаються між собою [2].

Л. Гіллман та М. Хенріксен [3, 4], досліджуючи комутативні кільця Ерміта та кільця елементарних дільників із дільниками нуля, навели приклади комутативного кільця Безу, яке не є кільцем Ерміта, і кільця Ерміта, що не є кільцем елементарних дільників. Ними було поставлено питання збіжності цих кілець у випадку комутативних областей, яке тепер відоме як проблема кілець елементарних дільників. Без перебільшення можна сказати, що це є одна із найбільш актуальних проблем сучасної алгебри. Серед великої кількості робіт, присвячених цій тематиці, виділимо роботи П. Кона [5], М. Ларсена, У. Левіса, Т. Шореса [6], У. Мак Говерна [7], які розв'язували цю проблему як методами класичної теорії кілець, так і методами теорії модулів.

Багатообіцяючими є дослідження проблеми кілець елементарних дільників, які ґрунтуються на понятті стабільного рангу кільця — одного із важливих інваріантів К-теорії [7 – 11]. Такий підхід дозволив Б. Забавському [8 – 10] отримати низку структурних теорем, які достатньо глибоко характеризують кільця Безу скінченного стабільного рангу. Зокрема, ним було показано, що комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не більше 2 [8].

У пропонованій роботі проблема кілець елементарних дільників досліджується методами теорії матриць. Такий підхід дозволив вивчити структуру оборотних матриць, які приводять матрицю до діагонального вигляду (теореми 2, 3), вказати певні властивості елементів таких кілець (теорема 5), встановити умови, близькі до умов стабільного рангу (теорема 6), при яких комутативна область Безу є областю елементарних дільників.

2. Структура перетворювальних матриць. І. Капланський ([1], теорема 5.1) довів, що у випадку комутативних областей Безу для встановлення того факту, що кільце є областю елементарних дільників, достатньо переконатись у тому, що кожна матриця вигляду

$$\begin{Vmatrix} b & c \\ a & 0 \end{Vmatrix},$$

де $(a, b, c) = 1$, має властивість діагональної редукції. На підставі теореми 5.2 з цієї ж роботи це рівносильно існуванню таких m, n, α, β, що

$$a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1. \tag{2}$$

Нехай R — комутативна область елементарних дільників і $A = \begin{Vmatrix} b & c \\ a & 0 \end{Vmatrix}$ — матриця над R, до того ж $(a, b, c) = 1$. Тоді

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{Vmatrix}.$$

Тобто існують такі оборотні матриці P, Q, що

$$PAQ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{Vmatrix} = \Phi. \tag{3}$$

Матриці P, Q будемо називати **перетворювальними матрицями матриці** A. Дослідимо структуру цих матриць. Для цього запишемо матрицю A у вигляді добутку:

$$A = \begin{Vmatrix} b & c \\ a & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{Vmatrix}.$$

Розглянемо мультиплікативні групи $\mathbf{G}_a^T$ та $\mathbf{G}_c$, які складаються відповідно з усіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & ah_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} \\ cl_{21} & l_{22} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{Vmatrix},$$

то на підставі теореми із [12] це рівносильно тому, що

$$\begin{Vmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = MN,$$

де $M \in \mathbf{G}_a^T$, $N \in \mathbf{G}_c$. Із цих міркувань випливає наступне твердження.

Позначимо

$$S_{a,c} = \left\{ \begin{Vmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \,\middle|\, (a, b, c) = 1 \right\}.$$

Теорема 1. *Нехай a, c — елементи комутативної області елементарних дільників. Тоді*

$$S_{a,c} \subset \mathbf{G}_a^T \mathbf{G}_c.$$

Зваживши на (2), переконуємося у правильності рівності

$$\begin{Vmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \underbrace{\begin{Vmatrix} cn + \alpha b & -am \\ \alpha & \beta \end{Vmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{Vmatrix} \beta b + am & \beta \\ cn & -\alpha \end{Vmatrix}}_{N}.$$

З цієї рівності випливає наступний результат.

Теорема 2. *Перетворювальними матрицями P та Q матриці $\begin{Vmatrix} b & c \\ a & 0 \end{Vmatrix}$ є*

$$P = \begin{Vmatrix} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{Vmatrix}, \qquad Q = \begin{Vmatrix} \alpha & c\beta \\ n & -b\beta - am \end{Vmatrix},$$

де $a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1$.

Доведення. Виконуються рівності

$$\begin{Vmatrix} b & c \\ a & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix} MN \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{Vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{Vmatrix} cn + \alpha b & -m \\ \alpha a & \beta \end{Vmatrix}}_{M_1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{Vmatrix} \underbrace{\begin{Vmatrix} \beta b + am & \beta c \\ n & -\alpha \end{Vmatrix}}_{N_1}.$$

Для завершення доведення достатньо переконатись, що $M_1^{-1} = P$ та $N_1^{-1} = Q$.

Наслідок. *Якщо*

$$am + cn = 1,$$

то перетворювальними матрицями P та Q матриці $\begin{Vmatrix} 0 & c \\ a & 0 \end{Vmatrix}$ будуть матриці

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & m \\ -a & cn \end{Vmatrix}, \qquad Q = \begin{Vmatrix} 1 & c \\ n & -am \end{Vmatrix}.$$

З теореми 2 випливає, що елементи отриманих перетворювальних матриць P та Q тісно пов'язані між собою співвідношенням Капланського (2). Природно постає питання: чи існують перетворювальні матриці, які мають іншу структуру? Відповідь є негативною.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ множину всіх оборотних матриць P, які задовольняють рівність (3).

Теорема 3. *Всі матриці із множини* $\mathbf{P}_A$ *мають вигляд*

$$\left\| \begin{matrix} \beta_1 & m_1 \\ -\alpha_1 a & \alpha_1 b + c n_1 \end{matrix} \right\|,$$

де

$$a(m_1\alpha_1) + b(\alpha_1\beta_1) + c(\beta_1 n_1) = e, \quad e \in U(R).$$

Доведення. На підставі результатів роботи [13] $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_\Phi P$, де P — довільна матриця із рівності (3) і

$$\mathbf{G}_\Phi = \left\{ H \in GL_2(R) \middle| H\Phi = \Phi H_1,\ H_1 \in GL_2(R) \right\}.$$

Множина $\mathbf{G}_\Phi$ є мультиплікативною групою, яка складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} \\ ack_{21} & k_{22} \end{matrix} \right\|.$$

За матрицю P виберемо матрицю, отриману в теоремі 2, тобто

$$P = \left\| \begin{matrix} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{matrix} \right\|,$$

де $a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1$. Нехай P_1 належить $\mathbf{P}_A$. Тоді в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $H = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ach_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|$, що $P_1 = HP$. Отже,

$$P_1 = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ach_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \beta & m \\ -\alpha a & \alpha b + cn \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 & m_1 \\ -\alpha_1 a & \alpha_1 b + cn_1 \end{matrix} \right\|,$$

де

$$\alpha_1 = c\beta h_{21} + \alpha h_{22}, \qquad \beta_1 = \beta h_{11} - \alpha\beta a h_{22},$$

$$m_1 = m h_{11} + h_{22}(\alpha b + cn), \qquad n_1 = n h_{22} + h_{21}(\beta b + am).$$

Оскільки $\det H = e \in U(R)$, то і $\det P_1 = e$. Тому $a(m_1\alpha_1) + b(\alpha_1\beta_1) + c(\beta_1 n_1) = e$.

3. Доповнення примітивного рядка до оборотної матриці. Будемо говорити, що матриця є **примітивною**, якщо найбільший спільний дільник її мінорів максимального порядку дорівнює 1. В роботі [1] показано, що над R кожний примітивний рядок $\left\| \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \right\|$ доповнюється до оборотної матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{Vmatrix}.$$

Виявляється, що це твердження можна посилити.

Теорема 4. *Для того щоб комутативна область Безу R була комутативною областю елементарних дільників, необхідно та достатньо, щоб кожний примітивний рядок $\begin{Vmatrix} a & b & c \end{Vmatrix}$ доповнювався до оборотної матриці вигляду*

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & * & * \\ * & * & 0 \end{Vmatrix}.$$

Доведення. Оскільки $(a, b, c) = 1$, то існують такі m, n, α, β, що

$$a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n) = 1.$$

Тоді шуканою матрицею буде матриця

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & -n & \alpha \\ \beta & -m & 0 \end{Vmatrix}.$$

Зворотні міркування є очевидними.

Зауважимо, що згідно з результатами роботи [14] над комутативними областями головних ідеалів та над адекватними областями [15] кожний примітивний рядок $\begin{Vmatrix} a & b & c \end{Vmatrix}$, $c \neq 0$, доповнюється до оборотної матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & * \\ * & * & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Деякі властивості елементів комутативної області елементарних дільників. У роботі [11] показано, що для того щоб комутативна область Безу R була комутативною областю елементарних дільників, необхідно та достатньо, щоб для кожної трійки взаємно простих елементів a, b, c існувало таке λ, що $b + \lambda c = uv$, де

$$(u, v) = (u, \alpha) = (v, c) = 1.$$

Наступна теорема встановлює подібну оцінку елементів кільця R. Для доведення цього результату нам потрібне наступне твердження.

Лема 1. *Нехай* $A = \|a_{ij}\|_1^3$, $\det A = 1$ *і*

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Для того щоб $\det B = 1$, *необхідно та достатньо, щоб існували такі елементи* s_2, s_3, *що*

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \end{Vmatrix} A.$$

Доведення. *Необхідність.* Оскільки

$$\det B = b_{11} \det \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} - b_{12} \det \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{Vmatrix} + b_{13} \det \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix} = 1,$$

то

$$BA^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} A,$$

тобто

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \end{Vmatrix} A.$$

Достатність. Оскільки

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{Vmatrix} A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \end{Vmatrix} AA^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \end{Vmatrix} E = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \end{Vmatrix},$$

то

$$BA^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & s_2 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

З цієї рівності випливає, що $\det B = 1$.

Теорема 5. *Для того щоб комутативна область Безу* R *була комутативною областю елементарних дільників, необхідно та достатньо, щоб для кожної четвірки елементів* a_1, a_2, b_1, b_2 *таких, що*

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) = 1,$$

існував такий елемент r, *що*

$$b_1 + rb_2 = \alpha\beta,$$

де

$$(\alpha, \beta) = (a_1, \alpha) = (a_2, \beta) = 1.$$

Доведення. *Необхідність.* В кільці R існують такі v_1, v_2, u_1, u_2, що

$$a_1 v_1 - a_2 v_2 = 1,$$

$$b_1 u_1 - b_2 u_2 = 1.$$

Отже, матриця

$$\left\| \begin{matrix} u_2 v_2 & b_1 & u_2 v_1 \\ u_1 v_2 & b_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & 0 & a_2 \end{matrix} \right\| = A$$

є унімодулярною, тобто

$$a_2 b_2 (u_2 v_2) - \begin{vmatrix} u_1 v_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} b_1 - a_1 b_2 (u_2 v_1) = 1.$$

Позначимо

$$a = u_2 v_2, \qquad b = \begin{vmatrix} u_1 v_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad c = v_1 u_2.$$

Очевидно, що

$$(a, b, c) = 1.$$

Тоді існують такі елементи α, β, m, n, що

$$a(m\alpha) - b(\alpha\beta) - c(\beta n) = 1.$$

Звідси випливає, що

$$(\alpha, \beta) = 1.$$

Таким чином, матриця

$$\left\| \begin{matrix} \alpha m & \alpha\beta & \beta n \\ u_1 v_2 & b_2 & u_1 v_1 \\ a_1 & 0 & a_2 \end{matrix} \right\| = B$$

знову є унімодулярною. На підставі леми 1 існують такі елементи s_2, s_3, що

$$\left\| \begin{matrix} \alpha m & \alpha\beta & \beta n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\| A,$$

тобто

$$b_1 + s_2 b_2 = \alpha\beta.$$

Оскільки

$$1 = \det B = a_1(-\beta n b_2) + a_1(\alpha\beta u_1 v_1) + \alpha \left(\begin{vmatrix} m & \beta \\ u_1 v_2 & b_2 \end{vmatrix} a_2 \right),$$

то

$$(\alpha, a_1) = 1.$$

Аналогічно показуємо, що

$$(\beta, a_2) = 1.$$

Поклавши $r = s_2$, завершуємо доведення необхідності.

Достатність. Нехай a, b, c — взаємно прості елементи кільця R, до того ж $(a,c) \neq 0$. Розглянемо матрицю

$$\begin{Vmatrix} bu & (a,c) & bv \\ -\dfrac{c}{(a,c)} & 0 & \dfrac{a}{(a,c)} \end{Vmatrix},$$

де

$$\frac{a}{(a,c)}u + \frac{c}{(a,c)}v = -1.$$

Для елементів a, b, c існують такі m_1, m_2, m_3, що

$$am_1 + bm_2 + cm_3 = 1.$$

Отже,

$$\det \underbrace{\begin{Vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ bu & (a,c) & bv \\ -\dfrac{c}{(a,c)} & 0 & \dfrac{a}{(a,c)} \end{Vmatrix}}_{A} = \det A = 1.$$

Позначимо

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, що

$$(a_{12}, a_{22}) = (a_{31}, a_{33}) = 1.$$

Згідно з припущенням існує такий елемент r, що

$$a_{12} + ra_{22} = \alpha\beta,$$

де

$$(\alpha, \beta) = (a_{31}, \alpha) = (a_{33}, \beta) = 1. \tag{4}$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11} + ra_{21} & \alpha\beta & a_{13} + ra_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a'_{11} & \alpha\beta & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Розглянемо систему конгруенцій

$$a_{31}x \equiv a'_{11} (\operatorname{mod} \alpha),$$

$$a_{33}x \equiv a'_{13} (\operatorname{mod} \beta).$$

На підставі рівностей (4) ця система має розв'язок $x = s$, тобто

$$a_{31}s - a'_{11} = -\alpha m,$$

$$a_{33}s - a'_{13} = -\beta n,$$

а отже,

$$a'_{11} + a_{31}(-s) = \alpha m,$$

$$a'_{13} + a_{33}(-s) = \beta n.$$

Таким чином,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a'_{11} & \alpha\beta & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m\alpha & \alpha\beta & \beta n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{Vmatrix} = B.$$

Зважаючи на те, що

$$1 = \det B = a(m\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\beta n),$$

та використовуючи теорему 5.2 із [1], завершуємо розгляд цього випадку.

Якщо $a = c = 0$, то $b \in U(R)$. Тоді достатньо покласти

$$\alpha = b^{-1}, \qquad \beta = m = n = 1.$$

Теорему 5 доведено.

Очевидно, що теорема 5 є малоінформативною у випадку областей головних ідеалів. Інша справа, коли в кільці існують елементи з нескінченною кількістю дільників, а такими можуть бути і всі елементи кільця (див. приклад у [16]).

5. Стабільний ранг кільця. Нагадаємо, що кільце має стабільний ранг 2, якщо для кожної трійки взаємно простих елементів a, b, c цього кільця існують такі m, n, що $(am+b, an+c) = 1$. З наступного результату легко отримати аналог цього означення для випадку модулів.

Позначимо через R^2 модуль рядків довжини 2 над R, а через $R^2_{\alpha,\beta}$ підмодуль модуля R^2 всіх рядків вигляду $\overline{a} = \left\| \alpha u \quad \beta v \right\|$.

Теорема 6. *Для того щоб комутативна область Безу R була комутативною областю елементарних дільників, необхідно та достатньо, щоб для кожної трійки $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ твірних модуля R^2 існували такі $s_2, s_3 \in R$, що $\overline{a}_1 s_2 + \overline{a}_2$, $\overline{a}_1 s_3 + \overline{a}_3$ — твірні деякого модуля $R^2_{\alpha,\beta}$.*

Доведенню цієї теореми передує наступне твердження.

Лема 2. *Для того щоб для неособливої матриці $B = \|b_{ij}\|_1^2$ існувала така оборотна матриця U, що*

$$U \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{Vmatrix},$$

необхідно та достатньо, щоб

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{b_{11}}{(b_{11}, b_{21})} & \dfrac{b_{12}}{(b_{12}, b_{22})} \\ \dfrac{b_{21}}{(b_{11}, b_{21})} & \dfrac{b_{22}}{(b_{12}, b_{22})} \end{Vmatrix}$$

була оборотною матрицею.

Доведення випливає з того факту, що

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \beta v_{12} & \alpha v_{11} \\ \beta v_{22} & \alpha v_{21} \end{Vmatrix},$$

де $\begin{Vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{Vmatrix} = U^{-1}$.

Доведення теореми 6. *Необхідність.* Запишемо твірні $\overline{a}_i = \left\| a_{i1} \quad a_{i2} \right\|$, $i = 1, 2, 3$, у вигляді матриці

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\left\|\alpha u_1 \quad \beta v_1\right\|$, $\left\|\alpha u_2 \quad \beta v_2\right\|$ є твірними модуля $R^2_{\alpha,\beta}$ тоді і тільки тоді, коли $\left\|\begin{matrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{matrix}\right\|$ є оборотною матрицею, для доведення необхідності достатньо показати, що існують такі $s_2, s_3 \in \in R$, що

$$\left\|\begin{matrix} s_2 & 1 & 0 \\ s_3 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| A = \left\|\begin{matrix} \alpha d_{11} & \beta d_{12} \\ \alpha d_{21} & \beta d_{22} \end{matrix}\right\|,$$

де

$$\left\|\begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix}\right\| \in GL_2(R).$$

З примітивності матриці A випливає, що існують такі c_1, c_2, c_3, що матриця

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & c_1 & a_{12} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{matrix}\right\|$$

є оборотною. Отже, рядок $\left\|a_{11} \quad c_1 \quad a_{12}\right\|$ є примітивним. На підставі теореми 4 його можна доповнити до оборотної матриці вигляду

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & c_1 & a_{12} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Тоді існує така оборотна матриця P вигляду

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix}\right\| = P,$$

що

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_{11} & c_1 & a_{12} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & c_1 & a_{12} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Звідси випливає, що

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & u_{23} \\ u_{31} & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{5}$$

Розіб'ємо матрицю P на блоки таким чином:

$$P = \left\| \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ M & N \end{matrix} \right\|.$$

Матриця P є оборотною, а тому оборотною буде і матриця N. Запишемо матрицю P у вигляді

$$P = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ M & N \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ N^{-1}M & E \end{matrix} \right\|.$$

Позначимо

$$N^{-1}M = \left\| \begin{matrix} r_2 \\ r_3 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді рівність (5) набере вигляду

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 1 & 0 \\ r_3 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & u_{23} \\ u_{31} & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{6}$$

Розглянемо матрицю

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 1 & 0 \\ r_3 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| A = \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ \hline b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix} \right\|.$$

Із (6) випливає, що

$$NB_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & u_{23} \\ u_{31} & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Якщо

$$\det B_2 = \det \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\| \neq 0,$$

то, використовуючи лему 3, завершуємо розгляд цього випадку.

Якщо

$$\det B_2 = \det \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\| = 0,$$

то з примітивності матриці

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\|$$

випливає, що

$$\left(\det\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ b_{11} & b_{12}\end{Vmatrix},\ \det\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{Vmatrix}\right)=1.$$

Тому існують такі t_2, t_3, що

$$t_3\det\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ b_{11} & b_{12}\end{Vmatrix}+t_2\det\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{Vmatrix}=1. \tag{7}$$

Розглянемо матрицю

$$\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ t_2 & 1 & 0\\ -t_3 & 0 & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{Vmatrix}.$$

Використовуючи формулу Біне – Коші та зважаючи на рівність (7), переконуємося, що матриця $\begin{Vmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{Vmatrix}$ є оборотною. З огляду на те, що

$$\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ t_2 & 1 & 0\\ -t_3 & 0 & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ r_2 & 1 & 0\\ r_3 & 0 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ r_2+t_2 & 1 & 0\\ r_3-t_3 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

отримуємо, що шуканою парою s_2, s_3 є

$$s_2=r_2+t_2,\qquad s_3=r_3-t_3.$$

Достатність. Нехай $\begin{Vmatrix}a & b & c\end{Vmatrix}$ — примітивний рядок. Доповнимо його до оборотної матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix}a & b & c\\ u_{21} & u_{22} & u_{23}\\ u_{31} & u_{32} & u_{33}\end{Vmatrix}.$$

Розглянемо її примітивну підматрицю

$$\begin{Vmatrix}a & c\\ u_{21} & u_{23}\\ u_{31} & u_{33}\end{Vmatrix}.$$

Згідно з умовою існують такі елементи s_2, s_3, що

$$\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ s_2 & 1 & 0\\ s_3 & 0 & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a & c\\ u_{21} & u_{23}\\ u_{31} & u_{33}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}a & c\\ q_{21}\sigma_1 & q_{23}\sigma_2\\ q_{31}\sigma_1 & q_{33}\sigma_2\end{Vmatrix},$$

де $\begin{Vmatrix} q_{21} & q_{23} \\ q_{31} & q_{33} \end{Vmatrix}$ є оборотною матрицею. Для цієї матриці існує така оборотна матриця $T = \|t_{ij}\|_1^2$, що

$$T \begin{Vmatrix} q_{21} & q_{23} \\ q_{31} & q_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{21} & t_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 1 & 0 \\ s_3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b & c \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & u'_{22} & \sigma_2 \\ \sigma_1 & u'_{32} & 0 \end{Vmatrix}.$$

На підставі теореми 4 R є комутативною областю елементарних дільників.

Теорему 6 доведено.

1. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
2. *Amitsur S. A.* Remarks of principal ideal rings // Osaka Math. J. – 1963. – **15**. – P. 59 – 69.
3. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 362 – 365.
4. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Mich. Math. J. – 1955/56. – **3**. – P. 159 – 163.
5. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1976.
6. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231 – 248.
7. *McGowern W.* Bezout rings with almost stable range 1 // J. Pure and Appl. Algebra. – 2008. – **212**. – P. 340 – 348.
8. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 550 – 554.
9. *Zabavsky B. V.* Diagonazibility theorem for matrices over rings with finite stable range // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 151 – 165.
10. *Zabavsky B. V.* Fractionaly zegular Bezout rings // Mat. Stud. – 2009. – **32**. – P. 70 – 80.
11. *Roitman M.* The Kaplansky condition and ring of almost stable range 1 // arXiv: 110/. 3000v1 [math. AC] 15Jul 2011.
12. *Щедрик В. П.* Про мультиплікативність канонічної діагональної форми матриць // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 77 – 85.
13. *Shchedryk V. P.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 79 – 99.
14. *Shchedryk V. P.* Some determinant properties of primitive matrices over Bezout B-domain // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 2. – P. 46 – 57.
15. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, № 2. – P. 225 – 236.
16. *Anderson D., Coykendall J., Hill L., Zafrullah M.* Monoid domain constructions of antimatter domains // Communs Algebra. – 2007. – **35**, № 10. – P. 32 – 36.

Одержано 16.11.11