УДК 517.986.7+517.911

В. М. Статкевич (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ’ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИМ ЕЛІПТИЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

We consider Dirichlet problems for the Poisson equation and linear and nonlinear equations with essentially infinite-dimensional elliptic operator (of the Laplace – Lévy type). The continuous dependence of solutions on boundary values and sufficient conditions for increasing the smoothness of solutions are investigated.

Рассматриваются задачи Дирихле для уравнения Пуассона, линейного и нелинейного уравнений с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором (типа Лапласа – Леви). Исследуется непрерывная зависимость решений от краевых условий и достаточные условия повышения гладкости решений.

У нескінченновимірному просторі існують оператори, які не мають скінченновимірних аналогів. Таким, зокрема, є оператор Лапласа – Леві, введений П. Леві [1], — диференціальний оператор другого порядку, який задовольняє лейбніцевську властивість $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ та набуває нульового значення на циліндричних функціях. Сучасний стан теорії оператора Лапласа – Леві викладено у роботі М. Н. Феллера [2]. Суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор, запропонований Ю. В. Богданським [3] (див. також [4, 5]), є узагальненням оператора Лапласа – Леві та успадковує його властивості.

1. Нехай H — нескінченновимірний сепарабельний дійсний гільбертів простір, $B_C(H)$ — банахів простір самоспряжених обмежених лінійних операторів на H, J — конус невід’ємних лінійних функціоналів на $B_C(H)$. Множину $D \subset B_C(H)$ будемо називати майже компактною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subset B_C(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$, $d > 0$ такі, що $K + Q_{n,d}$ є ε-сіткою для D (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ — множина операторів, ранг яких не перевищує n, а норма не перевищує d).

Виберемо $R > 0$. Нехай Z — множина дійсних функцій класу $C^2(H)$, носії яких належать кулі $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant R\}$, u'' рівномірно неперервна на H, а множина $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ є майже компактною. X — замикання Z за нормою $\sup_{x\in H} |u(x)|$ — є дійсною комутативною банаховою алгеброю без одиниці відносно поточкових операцій. Суттєво нескінченновимірний функціонал $j \in J$ — це такий ненульовий функціонал, ядру якого належать усі оператори скінченного рангу з $B_C(H)$ [3]. Суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор задається формулою $L\colon Z \ni u(x) \mapsto \dfrac{1}{2} j(u''(x)) \in X$ [3]. Він є лейбніцевським та допускає замикання $\bar{L}$, визначене на $D(\bar{L})$. Для функцій $f_1 \in C^2(\mathbb{R})$, $f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ таких, що $f_1(0) = f_2(0) = 0$, мають місце властивості $(u \in Z) \Rightarrow (f_1 \circ u \in Z,\ L(f_1 \circ u) = (f_1' \circ u) \cdot Lu)$, $(u \in X) \Rightarrow$ $\Rightarrow (f_2 \circ u \in X, \bar{L}(f_2 \circ u) = (f_2' \circ u) \cdot \bar{L}u)$. $\bar{L}$ генерує (C_0)-півгрупу стиску $T(t)$ в X, нільпотентну ($\exists t_0 > 0\colon T(t_0) = 0$) та мультиплікативну ($\forall u, v \in X: T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v$) [4]. При цьому $T(t)u$ належить Z для $u \in Z$, а для функції $f \in C(\mathbb{R})$ такої, що $f(0) = 0$, виконується рівність $T(t)(f \circ u) = f \circ T(t)u$, зокрема $T(t)(|u|) = |T(t)u|$.

2. Згідно з роботою [5] вважаємо, що поверхня S в H належить класу Y, якщо її можна записати у вигляді $S = \{x \in H \mid g(x) = 1\}$, де $g \in Z$, $\inf_{x\in S} \|g'(x)\| > 0$, та належить класу Y_1, якщо виконуються додаткові умови: g''' існує і рівномірно неперервна на H, а множина $\{(g'(\cdot), h)''(y) \mid h \in H,\ \|h\| \leqslant 1,\ y \in S\}$ є майже компактною (у подальшому записуємо коротко

© В. М. СТАТКЕВИЧ, 2012

$S \in Y$ або $S \in Y_1$). Через S_ε позначимо ε-окіл поверхні S. При необхідності накладатимемо на поверхню S ще й умову $Lg \in Z$. Згідно з роботою [5] відкриту обмежену область $G = \{x \in H \mid g(x) > 1,\ g \in Z\} \subset H$ з межею $S \in Y$ будемо називати L-опуклою, якщо $(Lg)(x) < -\alpha < 0$ для всіх $x \in S$ та деякого $\alpha > 0$; $\bar{G}$ — замикання області G. З наведених означень випливає, що $\bar{G} \subset \{x \in H \mid \|x\| < R\}$, тому R виберемо достатньо великим.

Вкладення поверхні S в H індукує ріманову метрику на поверхні S, ∇ — відповідна їй зв'язність Леві-Чивіти, T_xS — дотичний простір, для кожного $x \in S$ простір H розкладається в ортогональну суму $H = T_xS \oplus (T_xS)^\perp$. Множину дійсних функцій на S, для яких $\nabla^2 u$ (тут і далі оператор $\nabla^2 u(x)\colon T_xS \to T_xS$ ототожнюється з оператором $\nabla^2 u(x) \oplus 0 \in B_C(H)$) існує і рівномірно неперервна на S, а множина $\{\nabla^2 u(x) \mid x \in S\}$ є майже компактною, позначимо через $Z(S)$. Нехай $X(S)$ — її замикання за нормою $\sup_{x\in S}|u(x)|$. Очевидно, що $u|_S \in X(S)$ для $u \in X$.

Множину $Z(G)$ дійсних функцій класу $C^2(G)$, для яких u'' рівномірно неперервна на G, а множина $\{u''(x) \mid x \in G\}$ є майже компактною, замкнемо за нормою $\sup_{x\in G}|u(x)|$; отримане замикання $X(G)$ є банаховою алгеброю з одиницею. Оператор $L_G\colon Z(G) \ni u(x) \mapsto \mapsto \dfrac{1}{2}j(u''(x)) \in X(G)$ коректно визначений, лейбніцевський та допускає замикання $\bar{L}_G$, визначене на $D(\bar{L}_G)$ [5]. При цьому $(u \in Z) \Rightarrow (u|_G \in Z(G))$, $(u \in X) \Rightarrow (u|_G \in X(G))$, $(u \in \in D(\bar{L})) \Rightarrow (u|_G \in D(\bar{L}_G),\ \bar{L}_G(u|_G) = (\bar{L}u)|_G)$. Окрім того, як і в п. 1, для функцій $f_1 \in C^2(\mathbb{R})$, $f_2 \in C^1(\mathbb{R})$ виконуються властивості $(u \in Z(G)) \Rightarrow (f_1 \circ u \in Z(G), L_G(f_1 \circ u) = (f_1' \circ u)\cdot L_G u)$, $(u \in X(G)) \Rightarrow (f_2 \circ u \in X(G), \bar{L}_G(f_2 \circ u) = (f_2' \circ u)\cdot \bar{L}_G u)$.

В роботі [5] доведено наступні факти. Якщо $S \in Y_1$, то функцію $u \in X(S)$ (відповідно, $u \in X(G)$) можна продовжити до функції $\bar{u} \in X$ такої, що $\bar{u}|_S = u$ (відповідно, $\bar{u}|_G = u$); відповідні оператори продовження є гомоморфізмами алгебр та зберігають норму. Якщо $S \in Y_1$, то для $u \in Z(G)$ і довільного $\varepsilon > 0$ існує $\bar{u}_\varepsilon \in Z$ така, що $\bar{u}_\varepsilon|_{G\setminus S_\varepsilon} = u|_{G\setminus S_\varepsilon}$ та $|\bar{u}_\varepsilon(x) - u(x)| < \varepsilon$ для $x \in G \cap S_\varepsilon$. Існує і до того ж єдина функція θ на $\bar{G}$ — фундаментальна функція області G, для якої $\theta(x) > 0$ на G, $\theta(x) = 0$ на S, θ диференційовна на $\bar{G}$, θ та θ' рівномірно неперервні на $\bar{G}$, $\theta|_G \in X(G)$, $\bar{L}_G(\theta|_G) \equiv -1$ скрізь в G; якщо додатково $Lg \in Z$, то $\theta|_G \in Z(G)$. З побудови функції θ випливає, що $\theta(x) < t_0$. Функцію $\varphi \in X(S)$ розуміємо або як обмеження на поверхню S функції $\bar{\varphi} \in X$, або визначеною лише на S, але при цьому вимагаємо щоб S належала класу Y_1 (тоді існування $\bar{\varphi} \in X$ доводиться, як вказано вище); для такої функції φ існує і до того ж єдина рівномірно неперервна на $\bar{G}$ функція $W(x) = (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)$, для якої $W|_G \in X(G)$, $\bar{L}_G(W|_G) = 0$, $W|_S = \varphi$; якщо додатково $Lg \in Z$, $\bar{\varphi} \in Z$, $L\bar{\varphi} \in Z$, то $W|_G \in Z(G)$.

3. Нехай функцію u визначено на $\bar{G}$. Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\bar{L}_G(u|_G) = f, \tag{1}$$

$$u|_S = \varphi. \tag{2}$$

Якщо поверхня S належить класу Y, то вважаємо $f = \bar{f}|_G$, $\varphi = \bar{\varphi}|_S$, де $\bar{f}, \bar{\varphi} \in X$. Якщо $S \in Y_1$, то $f \in X(G)$, $\varphi \in X(S)$, а існування продовжень гарантує п. 2. Така задача з оператором Лапласа – Леві розглядалась у роботах [1, 7 – 11], з оператором квазідиференціювання (одним з узагальнень оператора Лапласа – Леві) — у [12]. У роботах [1, 7 – 12] в інших функціональних класах із застосуванням техніки, що відрізняється від наведеної в роботі, отримано явні формули розв'язків. У вказаному функціональному класі з використанням методів теорії півгруп задачу (1), (2) досліджено в роботі [5]: доведено існування та єдиність розв'язку та дано схему розв'язання, а для задачі $\bar{L}_G(u|_G) = 0$, $u|_S = \varphi$ знайдено явну формулу $W(x) = (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)$. У роботі [6] (див. також [13]) для задачі (1), (2) у випадку області G з межею $S \in Y_1$ знайдено явну формулу розв'язку

$$u(x) = -\int\limits_0^{\theta(x)} (T(t)\bar{f})(x)dt + (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x), \quad x \in \bar{G}. \tag{3}$$

Доведемо, що й у випадку $S \in Y$ розв'язок задачі (1), (2) задається формулою (3).

Теорема 1. *За наведених умов задача* (1), (2) *має і до того ж єдиний розв'язок* (3).

Доведення. Як було доведено в [5] і нагадано в п. 2, для функції $W(x) = (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)$ виконуються співвідношення $\bar{L}_G(W|_G) = 0$, $W|_S = \varphi$. Оскільки $\theta|_S = 0$, то досить довести, що для функції $u_1(x) = -\int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar{f})(x)dt$ виконується $\bar{L}_G(u_1|_G) = f$.

Цей факт доводиться таким чином (див. також [6] (лему 1) та [13] (лему 2)). Виберемо послідовності $\{\bar{f}_n\} \subset Z$, збіжну до $\bar{f}$ при $n \to \infty$, та $\{v_n\} \subset Z(G)$, для якої $v_n \to \theta|_G$, $L_G v_n \to \bar{L}_G(\theta|_G) \equiv -1$ при $n \to \infty$. Нагадаємо, що $\theta(x) < t_0$ (див. п. 2), тому, починаючи з деякого n, $v_n(x) \leqslant t_0$. Нехай $F_n(x) = -\int_0^{v_n(x)} (T(t)\bar{f}_n)(x)dt$, тоді

$$\begin{gathered}(F_n''(x)h_1, h_2) = -\int\limits_0^{v_n(x)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(t)\bar{f}_n)(x)h_1, h_2\right) dt - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial x}(T(t)\bar{f}_n)(x)\Big|_{t=v_n(x)}, h_1\right) \cdot (v_n'(x), h_2) - \\ - \left(\frac{d}{dx}((T(v_n(\cdot))\bar{f}_n)(\cdot))(x), h_2\right) \cdot (v_n'(x), h_1) - (T(v_n(x))\bar{f}_n)(x) \cdot (v_n''(x)h_1, h_2),\end{gathered} \tag{4}$$

де $h_1, h_2 \in H$, $x \in G$. Другий та третій доданки у формулі (4) є операторами рангу не вище за 1, а тому належать ядру j; безпосередня перевірка показує, що $F_n|_G \in Z(G)$. Тоді

$$(L_G F_n)(x) = -\int\limits_0^{v_n(x)} L_G((T(t)\bar{f}_n)(x)|_G)dt - (T(v_n(x))\bar{f}_n)(x)(L_G v_n)(x), \quad x \in G.$$

З рівності $L_G((T(t)\bar{f}_n)(x)|_G) = (LT(t)\bar{f}_n)(x)|_G = \dfrac{\partial}{\partial t}(T(t)\bar{f}_n)(x)|_G$ та формули інтегрування частинами отримуємо $(L_G F_n)(x) = -(T(v_n(x))\bar{f}_n)(x)((L_G v_n)(x)+1) + f_n(x)$, $x \in G$. Виконаємо граничний перехід при $n \to \infty$: $F_n(x) \rightrightarrows u_1(x)$, $(L_G F_n)(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in G$. Замкненість оператора $\bar{L}_G$ доводить шукану формулу $\bar{L}_G(u_1|_G) = f$.

Твердження 1. *Нехай* $u = u(x, f, \varphi)$ *та* $u_0 = u(x, f_0, \varphi_0)$ — *розв'язки задачі* (1), (2) *з умовами* f, φ *та* f_0, φ_0 *відповідно. Тоді*: а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1,\ \delta_2 > 0 : (\|\bar f - \bar f_0\| < \delta_1,\ \|\bar\varphi - \bar\varphi_0\| < < \delta_2) \Rightarrow (\|u - u_0\| < \varepsilon)$ (*у випадку* $S \in Y_1$ *вважаємо* $\|f - f_0\| < \delta_1$, $\|\varphi - \varphi_0\| < \delta_2$); б) *якщо додатково функції* Lg, $\bar f$, $\bar\varphi$, $L\bar\varphi$ *належать* Z, *то* $u|_G \in Z(G)$.

Доведення. а) Покладемо $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2t_0}$, $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $T(t)$ — півгрупа стиску, $\theta(x) < t_0$, то $\|u - u_0\| \leqslant t_0\|\bar f - \bar f_0\| + \|\bar\varphi - \bar\varphi_0\| < \varepsilon$. У випадку $S \in Y_1$ процедура продовження функцій (див. п. 2) зберігає норму. б) З огляду на п. 2 достатньо довести, що з $\theta|_G \in Z(G)$, $\bar f \in Z$ випливає $\left.\left(-\int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar f)(x)dt\right)\right|_G \in Z(G)$, а цей факт випливає з формули типу (4).

4. Розглянемо задачу Діріхле з крайовою умовою (2) для лінійного рівняння

$$(\bar L_G u)(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in G. \tag{5}$$

Як і в п. 3, вважаємо або $a = \bar a|_G$, $f = \bar f|_G$, $\varphi = \bar\varphi|_S$, де $\bar a$, $\bar f$, $\bar\varphi \in X$, або $a, f \in X(G)$, $\varphi \in X(S)$ та $S \in Y_1$. Така задача з оператором Лапласа–Леві досліджувалась у роботах [2, 14, 15] (у припущенні $f \equiv 0$), з оператором квазідиференціювання — у [12] (для $f \neq 0$). У роботах [12, 2, 14, 15] в інших функціональних класах отримано явні формули розв'язків.

Теорема 2. *Задача* (5), (2) *має і до того ж єдиний розв'язок, який можна записати у вигляді* $u = u_1 + u_2$, *де*

$$u_1(x) = -\int_0^{\theta(x)} \exp\left(\int_0^t (T(s)\bar a)(x)ds\right)(T(t)\bar f)(x)dt,$$

$$u_2(x) = \exp\left(\int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar a)(x)dt\right)(T(\theta(x))\bar\varphi)(x), \quad x \in \bar G.$$

Доведення. *Крок* 1. Як і при доведенні теореми 1, виберемо послідовності $\{\bar a_n\} \subset Z$, збіжну до $\bar a$ при $n \to \infty$; $\{\bar f_n\} \subset Z$, збіжну до $\bar f$ при $n \to \infty$, та $\{v_n\} \subset Z(G)$, для якої $v_n \to \theta|_G$, $L_G v_n \to \bar L_G(\theta|_G) \equiv -1$ при $n \to \infty$. Нехай

$$F_n(x) = -\int_0^{v_n(x)} \exp\left(\int_0^t (T(s)\bar a_n)(x)ds\right)(T(t)\bar f_n)(x)dt,$$

тоді з обчислення F_n'' випливає належність F_n'' до $Z(G)$, а врахування факту, що всі оператори скінченного рангу належать ядру j, приводить до формули

$$(L_G F_n)(x) = -\int_0^{v_n(x)} \exp\left(\int_0^t (T(s)\bar a_n)(x)ds\right)\int_0^t L_G((T(s)\bar a_n)(x)|_G)ds(T(t)\bar f_n)(x)dt -$$

$$-\int_0^{v_n(x)} \exp\left(\int_0^t (T(s)\bar a_n)(x)ds\right)L_G((T(t)\bar f_n)(x)|_G)dt -$$

$$-\exp\left(\int_0^{v_n(x)}(T(s)\bar{a}_n)(x)ds\right)(T(v_n(x))\bar{f}_n)(x)(L_Gv_n)(x), \quad x\in G.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами до другого доданка:

$$(L_GF_n)(x)=a_n(x)\int_0^{v_n(x)}\exp\left(\int_0^t(T(s)\bar{a}_n)(x)ds\right)(T(t)\bar{f}_n)(x)dt-$$

$$-\exp\left(\int_0^{v_n(x)}(T(s)\bar{a}_n)(x)ds\right)(T(v_n(x))\bar{f}_n)(x)((L_Gv_n)(x)+1)+f_n(x), \quad x\in G.$$

Граничний перехід при $n\to\infty$ та замкненість оператора $\bar{L}_G$ доводять, що $\bar{L}_G(u_1|_G)+a\cdot u_1|_G = f$. Оскільки $\theta|_S=0$ (див. п. 2), то u_1 є розв'язком задачі $\bar{L}_G(u|_G)+a\cdot u|_G=f$, $u|_S=0$.

Крок 2. За теоремою 1

$$\left.\left(\int_0^{\theta(x)}(T(t)\bar{a})(x)dt\right)\right|_G\in D(\bar{L}_G), \qquad \bar{L}_G\left(\int_0^{\theta(x)}(T(t)\bar{a})(x)dt\right)=-a(x), \quad x\in G.$$

Згідно з п. 2,

$$\left.\exp\left(\int_0^{\theta(x)}(T(t)\bar{a})(x)dt\right)\right|_G\in D(\bar{L}_G),$$

$$\bar{L}_G\left(\exp\left(\int_0^{\theta(x)}(T(t)\bar{a})(x)dt\right)\right)=\exp\left(\int_0^{\theta(x)}(T(t)\bar{a})(x)dt\right)(-a(x)), \quad x\in G;$$

для функції $W(x)=(T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)$ виконуються співвідношення $\bar{L}_G(W|_G)=0$, $W|_S=\varphi$. Оскільки оператор $\bar{L}_G$ лейбніцевський, то $(\bar{L}_Gu_2)(x)=-a(x)u_2(x)$, $x\in G$. Отже, функція u_2 є розв'язком задачі $\bar{L}_G(u|_G)+a\cdot u|_G=0$, $u|_S=\varphi$.

Крок 3. Залишилось довести єдиність розв'язку. Припустимо супротивне: нехай задача (5), (2) має два різні розв'язки u_1 та u_2. Тоді задача $\bar{L}_G(u|_G)+a\cdot u|_G=0$, $u|_S=0$ має ненульовий розв'язок. Але рівняння $\bar{L}v+\bar{a}v=0$ має єдиний нульовий розв'язок в H [16]. Отримана суперечність доводить теорему.

Зауважимо, що в [2] (теорема 5.12) для задачі $\bar{L}_G(u|_G)+a\cdot u|_G=0$, $u|_S=\varphi$ отримано явну формулу розв'язку $u(x)=e^{v_1(x)}v_2(x)$, де v_1 — розв'язок задачі $\bar{L}_G(v_1|_G)=-a$, $v_1|_S=0$, а v_2 — розв'язок задачі $\bar{L}_G(v_2|_G)=0$, $v_2|_S=\varphi$ (у позначеннях даної роботи). Незважаючи на різні функціональні класи між вказаною формулою та функцією $u_2(x)=e^{w(x)}W(x)$ із теореми 2 існує очевидна паралель: $w(x)=\int_0^{\theta(x)}(T(t)\bar{a})(x)dt$ — розв'язок задачі $\bar{L}_G(w|_G)=-a$, $w|_S=0$ (див. теорему 1), а $W(x)$ — розв'язок задачі $\bar{L}_G(W|_G)=0$, $W|_S=\varphi$ (див. п. 2).

Твердження 2. *Нехай* $u = u(x, a, f, \varphi)$ *та* $u_0 = u(x, a_0, f_0, \varphi_0)$ — *розв'язки задачі* (5), (2) *з умовами* a, f, φ *та* a_0, f_0, φ_0 *відповідно. Тоді*: а) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3 > 0 : (\|\bar{a} - \bar{a}_0\| < \delta_1$, $\|\bar{f} - \bar{f}_0\| < \delta_2$, $\|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0\| < \delta_3) \Rightarrow (\|u - u_0\| < \varepsilon)$ (*у випадку* $S \in Y_1$ *вважаємо* $\|a - a_0\| < \delta_1$, $\|f - f_0\| < \delta_2$, $\|\varphi - \varphi_0\| < \delta_3$); б) *якщо додатково функції* Lg, $\bar{a}$, $\bar{f}$, $\bar{\varphi}$, $L\bar{\varphi}$ *належать* Z, *то* $u|_G \in Z(G)$.

Доведення. а) $T(t)$ є півгрупою стиску (див. п. 1), $\theta(x) < t_0$ (див. п. 2), тому для $x \in G$ стандартними міркуваннями отримуємо

$$\|u - u_0\| \leqslant \left\| \int\limits_0^{\theta(\cdot)} \left(\exp\left(\int\limits_0^t T(s)\bar{a}ds \right) T(t)\bar{f} - \exp\left(\int\limits_0^t T(s)\bar{a}_0 ds \right) T(t)\bar{f}_0 \right) dt \right\| +$$

$$+ \left\| \exp\left(\int\limits_0^{\theta(\cdot)} T(t)\bar{a}dt \right) T(\theta(\cdot))\bar{\varphi} - \exp\left(\int\limits_0^{\theta(\cdot)} T(t)\bar{a}_0 dt \right) T(\theta(\cdot))\bar{\varphi}_0 \right\| \leqslant$$

$$\leqslant t_0 e^{t_0\|\bar{a}\|}\|\bar{f} - \bar{f}_0\| + t_0 e^{t_0\|\bar{a}_0\|}(e^{t_0\|\bar{a}-\bar{a}_0\|} - 1)\|\bar{f}_0\| +$$

$$+ e^{t_0\|\bar{a}\|}\|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0\| + e^{t_0\|\bar{a}_0\|}(e^{t_0\|\bar{a}-\bar{a}_0\|} - 1)\|\bar{\varphi}_0\|.$$

У випадку $S \in Y_1$ процедура продовження функцій зберігає норму. б) $u_2|_G \in Z(G)$, оскільки з твердження 1 випливає належність $\left.\left(\int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar{a})(x)dt \right)\right|_G$ до $Z(G)$, з п. 2 — належності $\left.\exp\left(\int_0^{\theta(x)} (T(t)\bar{a})(x)dt \right)\right|_G$ до $Z(G)$ та $(T(\theta(x))\bar{f})(x)|_G$ до $Z(G)$, а $Z(G)$ є алгеброю. Належність $u_1|_G \in Z(G)$ випливає з міркувань, наведених у кроці 1 доведення теореми 2.

5. Розглянемо задачу Діріхле з крайовою умовою (2) для нелінійного рівняння

$$\bar{L}_G(u|_G) = F(u|_G), \tag{6}$$

де $F\colon X(G) \to X(G)$ — нелінійне відображення, а $S \in Y_1$. В інших функціональних класах така задача з оператором Лапласа–Леві досліджувалась у роботі [15], з оператором квазідиференціювання — у [12], а на поверхні спеціального типу з поверхневим лапласіаном Леві — у [17]. У вказаному функціональному класі задачу (6), (2) досліджено в роботі [13]: за умови типу Ліпшиця ($\exists C > 0\ \forall v_1,\ v_2 \in X(G)\colon |F(v_1) - F(v_2)| \leqslant C|v_1 - v_2|$) для нелінійного відображення F вона має і до того ж єдиний розв'язок. Доведення цього факту ґрунтується на тому, що деякий степінь відображення

$$X(G) \ni v(x) \mapsto - \int\limits_0^{\theta(x)} \Big(T(t)\Big(\overline{F(v)}\Big)\Big)(x)dt\Big|_G + (T(\theta(x))\bar{\varphi})(x)\Big|_G \in X(G) \tag{7}$$

є стиском, а сам розв'язок — нерухомою точкою відображення (7).

Твердження 3. *Нехай* $u = u(x, F, \varphi)$ *та* $u_0 = u(x, F_0, \varphi_0)$ — *розв'язки задачі* (6), (2) *з умовами* F, φ *та* F_0, φ_0 *відповідно. Тоді* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ $\forall w \in X(G)$: $(\|\varphi - \varphi_0\| < \delta_1$, $|F(w) - F_0(w)| < \delta_2) \Rightarrow (\|u - u_0\| < \varepsilon)$.

Доведення. Точки u та u_0 є нерухомими точками відповідних відображень вигляду (7), тому для $v_1(x) = F(u_0) - F_0(u_0)$, $v_2(x) = (T(\theta(x))(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0))(x)$, $x \in G$, маємо

$$|u - u_0| \leqslant \left| \int\limits_0^{\theta(\cdot)} T(t)\Big(\overline{F(u)} - \overline{F_0(u_0)}\Big) dt \right| + |v_2| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{t_0} T(t) \left(\left| \overline{F(u) - F(u_0)} + \bar{v}_1 \right| \right) dt + |v_2| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^{t_0} T(t) \Big(\overline{|u - u_0|} \Big) dt + \int\limits_0^{t_0} T(t)(|\bar{v}_1|) dt + |v_2|.$$

Застосуємо дану формулу послідовно m разів для $x \in G$ і врахуємо оцінку

$$\left| \int\limits_0^{t_0} dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_0} dt_m T(t_1 + \ldots + t_m) w dt \right| \leqslant \frac{t_0^m}{m!} |w| (w \in X):$$

$$|u - u_0| \leqslant \frac{C^m t_0^m}{m!} |u - u_0| + |v_1| \sum_{k=1}^{m} \frac{C^{k-1} t_0^k}{k!} + |v_2| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C^k t_0^k}{k!}.$$

Граничним переходом при $m \to \infty$ отримуємо $\|u - u_0\| \leqslant \dfrac{1}{C}(e^{Ct_0} - 1)\|v_1\| + e^{Ct_0}\|v_2\|$, шукані $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon C}{2}(e^{Ct_0} - 1)^{-1}$, $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2} e^{-Ct_0}$.

6. Розглянемо приклад. Якщо область обмежено еліпсоїдом [5], то твердження 1 та 2 можна посилити. Нехай $C, C_0 \in B_C(H)$, $C \geqslant \alpha I > 0$, $C_0 \geqslant \alpha I > 0$, області $G = \{x \in H \mid (Cx, x) < 1\}$ та $G_0 = \{x \in H \mid (C_0 x, x) < 1\}$ мають фундаментальні функції $\theta(x) = \dfrac{1}{j(C)}(1 - (Cx, x))$ та $\theta_0(x) = \dfrac{1}{j(C_0)}(1 - (C_0 x, x))$ відповідно. Для $x \in \bar{G} \cap \bar{G}_0$

$$|\theta(x) - \theta_0(x)| \leqslant \frac{|j(C - C_0)|}{j(C) j(C_0)} + \frac{|j(C)(C_0 x, x) - j(C_0)(Cx, x)|}{j(C) j(C_0)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|C - C_0\|}{\alpha^2 \|j\|} + \frac{|((C - C_0)x, x)|}{\alpha \|j\|} + \frac{|j(C - C_0)||(C_0 x, x)|}{\alpha^2 \|j\|^2} < \frac{2 + |(\alpha x, x)|}{\alpha^2 \|j\|} \|C - C_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2 + |(Cx, x)|}{\alpha^2 \|j\|} \|C - C_0\| < \frac{3}{\alpha^2 \|j\|} \|C - C_0\|.$$

Тому мають місце наступні твердження (їх доведення аналогічні доведенню тверджень 1 та 2 відповідно).

Твердження 4. *Нехай функції* $\bar f, \bar\varphi, \bar f_0, \bar\varphi_0 \in X$ *задано на всьому просторі* H; $u = u(x, \bar f, \bar\varphi, G)$ *та* $u_0 = u(x, \bar f_0, \bar\varphi_0, G_0)$ — *розв'язки задачі* (1), (2) *в областях* G *та* G_0 *з умовами* $\bar f$, $\bar\varphi$ *та* $\bar f_0$, $\bar\varphi_0$ *відповідно. Тоді* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3 > 0\ \forall x \in \bar G \cap \bar G_0 : (\|\bar f - \bar f_0\| < \delta_1,$ $\|\bar\varphi - \bar\varphi_0\| < \delta_2,\ \|C - C_0\| < \delta_3) \Rightarrow (|u(x) - u_0(x)| < \varepsilon)$.

Твердження 5. *Нехай функції* $\bar a,\ \bar f,\ \bar\varphi,\ \bar a_0,\ \bar f_0,\ \bar\varphi_0 \in X$ *задано на всьому просторі* H; $u = u(x, \bar a, \bar f, \bar\varphi, G)$ *та* $u_0 = u(x, \bar a_0, \bar f_0, \bar\varphi_0, G_0)$ — *розв'язки задачі* (5), (2) *в областях* G *та* G_0 *з умовами* $\bar a,\ \bar f,\ \bar\varphi$ *та* $\bar a_0,\ \bar f_0,\ \bar\varphi_0$ *відповідно. Тоді* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4 > 0\ \forall x \in \bar G \cap \bar G_0 :$ $(\|\bar a - \bar a_0\| < \delta_1, \|\bar f - \bar f_0\| < \delta_2, \|\bar\varphi - \bar\varphi_0\| < \delta_3, \|C - C_0\| < \delta_4) \Rightarrow (|u(x) - u_0(x)| < \varepsilon)$.

Автор дякує Ю. В. Богданському за критичні зауваження до даної роботи.

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Feller M. N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153 p.
3. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781 – 784.
4. *Богданский Ю. В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 584 – 590.
5. *Богданский Ю. В.* Задача Дирихле для уравнения Пуассона с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 803 – 808.
6. *Статкевич В. М.* Об одной краевой задаче с существенно бесконечномерным оператором // Spectral and Evolution Problems. – 2010. – **20**. – P. 189 – 192.
7. *Полищук Е. М.* О функциональном лапласиане и уравнениях параболического типа // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, вып. 2(116). – С. 155 – 162.
8. *Полищук Е. М.* Об уравнениях типа Лапласа и Пуассона в функциональном пространстве // Мат. сб. – 1967. – **72(114)**, № 2. – С. 261 – 292.
9. *Феллер М. Н.* Об уравнении Пуассона в пространстве $L_2(C)$ // Докл. АН УССР. – 1966. – № 4. – С. 426 – 429.
10. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. I // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1**, вып. 2. – С. 81 – 90.
11. *Дорфман И. Я.* О средних и лапласиане функций на гильбертовом пространстве // Мат. сб. – 1970. – **81**, № 2. – С. 192 – 208.
12. *Сикирявый В. Я.* Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи // Труды Моск. мат. о-ва. – 1972. – **27**. – С. 195 – 246.
13. *Богданський Ю. В., Статкевич В. М.* Нелінійні рівняння з суттєво нескінченновимірними диференціальними операторами // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 11. – С. 1571 – 1576.
14. *Феллер М. Н.* Об уравнении $\Delta U[x(t)] + P[x(t)]U[x(t)] = 0$ в функциональном пространстве // Докл. АН СССР. – 1967. – **172**, № 6. – С. 1282 – 1285.
15. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III // Мат. сб. – 1967. – **74(116)**, № 1. – С. 161 – 168.
16. *Богданський Ю. В., Статкевич В. М.* Лінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірними операторами // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 2. – С. 144 – 147.
17. *Соколовский В. Б.* Поверхностный лапласиан Леви L_s и бесконечномерная задача с косой производной // Вестн. Самар. гос. ун-та. – 1997. – №4(6). – С. 91 – 102.

Одержано 24.05.11,
після доопрацювання — 30.01.12