УДК 512.64

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, Львів)

ДІАГОНАЛІЗОВНІСТЬ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

A square matrix is said to be diagonalizable if it is similar to a diagonal matrix. We establish necessary and sufficient conditions for the diagonalizability of matrices over a principal ideal domain.

Квадратная матрица называется диагонализируемой, если она подобна диагональной матрице. В статье установлены необходимые и достаточные условия диагонализируемости матриц над областью главных идеалов.

Вступ. Нехай R — область головних ідеалів з одиницею $e \neq 0$, $U(\mathrm{R})$ — мультиплікативна група області R, F — поле часток області R. Позначимо через $M_{m,n}(\mathrm{R})$ множину $(m \times n)$-матриць над областю головних ідеалів R. Якщо $m = n$, то кільце $(n \times n)$-матриць над R позначатимемо через $M_n(\mathrm{R})$. Далі I_n — одинична $(n \times n)$-матриця, $0_{m,n}$ — нульова $(m \times n)$-матриця і O — нульова матриця, вимірність якої визначатиметься з контексту.

Нехай характеристичний многочлен $a(x)$ матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ допускає зображення у вигляді добутку

$$a(x) = \det(I_n x - A) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r},$$

де $\alpha_i \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2, \ldots, r$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Кажуть, що матриця $A \in M_n(\mathrm{R})$ діагоналізовна (простої структури), якщо вона перетворенням подібності зводиться до діагонального вигляду, тобто для A існує матриця $U \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$UAU^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \alpha_i I_{k_i}$$

— діагональна матриця. Зрозуміло, що якщо $A \in M_n(\mathrm{R})$ — матриця простої структури, то її мінімальний многочлен $m(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_r)$ не має кратних коренів. Якщо ж R — поле, то остання умова є необхідною та достатньою для діагоналізовності матриці A над полем за допомогою перетворення подібності. Проте ця умова не є достатньою для діагоналізовності матриць за допомогою перетворення подібності над комутативними кільцями з одиницею.

По аналогії з умовами діагоналізовності матриць над полем в [1] доведено, що $A \in M_n(\mathrm{R})$ — матриця простої структури тоді і тільки тоді, коли для неї існує n різних власних векторів $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n \in M_{1,n}(\mathrm{R})$, що відповідають власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (серед яких можуть бути й однакові), таких, що вони є базою **R**-модуля $M_{1,n}(\mathrm{R})$. Проте з практичної точки зору це є трудомісткою задачею, і на даний час не встановлено умов такого існування. В роботі [2] вказано необхідні та достатні умови діагоналізації матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ у випадку, коли її характеристичний многочлен $a(x)$ має n різних власних значень $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Там же доведено, що якщо $(\alpha_i - \alpha_j) \in U(\mathrm{R})$ для всіх $i \neq j$, то матриця A має просту структуру. Умови, за яких матриця $A \in M_n(\mathrm{R})$ з мінімальним многочленом $m(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha \neq \beta$, перетворенням подібності зводиться до діагонального вигляду, наведено в [3].

У даній роботі встановлено необхідні та достатні умови звідності матриць із $M_n(\mathrm{R})$ за допомогою перетворень подібності до діагонального вигляду. Зауважимо, що одержані результати справджуються для матриць над областями елементарних дільників. Крім цього, деякі з них можна поширити на матриці над ID-кільцями [4], тобто над комутативними кільцями з одиницею, над якими ідемпотентна матриця діагоналізується.

Основні результати. Нехай характеристичний многочлен $a(x)$ матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ допускає зображення у вигляді

$$a(x) = \det\left(I_n x - A\right) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r},$$

де $\alpha_j \in \mathrm{R}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Матриці A та її власним значенням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathrm{R}$ поставимо у відповідність матриці

$$W_A = \begin{bmatrix} I_n \\ A \\ \vdots \\ A^{r-1} \end{bmatrix} \in M_{nr,n}(\mathrm{R}), \quad W_\alpha = \begin{bmatrix} I_n & I_n & \ldots & I_n \\ \alpha_1 I_n & \alpha_2 I_n & \ldots & \alpha_r I_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{r-1} I_n & \alpha_2^{r-1} I_n & \ldots & \alpha_r^{r-1} I_n \end{bmatrix} \in M_{nr}(\mathrm{R}).$$

Нижче опишемо структуру матриць, які перетворенням подібності зводяться до діагонального вигляду.

Теорема 1. *Нехай характеристичний многочлен матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ допускає зображення у вигляді добутку*

$$a(x) = \det(I_n x - A) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r},$$

де $\alpha_i \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Якщо матриця A подібна до діагональної матриці, тобто

$$TAT^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \alpha_i I_{k_i},$$

де $T \in GL(n, \mathrm{R})$, то для матриці A існує єдиний набір попарно ортогональних ідемпотентних матриць $P_1, P_2, \ldots, P_r \in M_n(\mathrm{R})$ (тобто $P_i^2 = P_i$ і $P_i P_j = 0_{n,n}$, якщо $i \neq j$) таких, що

$$A = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_r P_r.$$

Доведення. Нехай матриця $A \in M_n(\mathrm{R})$ з характеристичним многочленом

$$\det(Ix - A) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}, \quad \alpha_i \in R,$$

подібна до діагональної матриці, тобто

$$TAT^{-1} = D_A = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_{k_1} & \mathrm{O} & \ldots & \ldots & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \alpha_2 I_{k_2} & \mathrm{O} & \ldots & \mathrm{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{O} & \ldots & \ldots & \mathrm{O} & \alpha_r I_{k_r} \end{bmatrix},$$

де $T \in GL(n, \mathrm{R})$. На підставі останньої рівності матрицю D_A запишемо у вигляді суми матриць

$$D_A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots + \alpha_r E_r, \tag{1}$$

де $E_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{e\ \ldots\ e}_{k_1}\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n-k_1}) \in M_n(\mathrm{R})$ і

$$E_i = \operatorname{diag}(\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}}\ \ \underbrace{e\ \ldots\ e}_{k_i}\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{k_{i+1}+\ldots+k_r}) \in M_n(\mathrm{R}), \quad i = 2, 3, \ldots, r.$$

Очевидно, що E_i — ідемпотентні матриці, тобто $E_i^2 = E_i$ всіх $i = 1, 2, \ldots, r$ і $E_iE_j = 0_{n,n}$ для всіх $i \neq j$. Крім цього, із рівності (1) отримуємо

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_r = I_n.$$

Враховуючи рівність (1), матрицю A записуємо у вигляді

$$A = T^{-1}D_AT = T^{-1}(\alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \ldots + \alpha_rE_r)T = \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \ldots + \alpha_rP_r,$$

де $P_i = T^{-1}E_iT, i = 1, 2, \ldots, r$. Оскільки E_i — ідемпотентні матриці, то $P_i \in M_n(\mathrm{R})$ теж ідемпотентні матриці, до того ж $P_iP_j = 0_{n,n}$ для всіх $i \neq j$.

Отже, $P_1 + P_2 + \ldots + P_r = I_n$, і для матриці A існує зображення у вигляді

$$A = \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \ldots + \alpha_rP_r. \tag{2}$$

З огляду на викладене вище та рівність (2) легко переконатись у тому, що

$$A^k = \big(\alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \ldots + \alpha_rP_r\big)^k = \alpha_1^kP_1 + \alpha_2^kP_2 + \ldots + \alpha_r^kP_r$$

для всіх $k = 1, 2, \ldots, r$.

Тепер одержуємо рівність

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n & \ldots & I_n \\ \alpha_1I_n & \alpha_2I_n & \ldots & \alpha_rI_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{r-1}I_n & \alpha_2^{r-1}I_n & \ldots & \alpha_r^{r-1}I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ A \\ \vdots \\ A^{r-1} \end{bmatrix},$$

тобто рівняння $W_\alpha Z = W_A$ є розв'язним. Очевидно, що

$$W_\alpha = I_n \otimes W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

де $W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \begin{bmatrix} e & e & \ldots & e \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \ldots & \alpha_r^{r-1} \end{bmatrix}$ — матриця Вандермонда. Оскільки W_α — неособлива матриця, то матричне рівняння $W_\alpha Z = W_A$ має єдиний розв'язок. Отже, матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix}$ є єдиним розв'язком цього рівняння. Таким чином, зображення матриці A у вигляді суми (2) є єдиним з точністю до перестановки доданків.

Теорему доведено.

Нехай $P \in M_n(\mathrm{R})$ — ідемпотентна матриця рангу $\operatorname{rank}P = k$. Відомо [4], що ідемпотентна матриця P діагоналізовна, тобто для P існує матриця $U \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що $UPU^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$. Тепер доведемо лему, яка має і самостійний інтерес.

Лема. *Нехай* $P_1, P_2, \ldots, P_k \in M_n(\mathrm{R})$ — *ідемпотентні матриці. Нехай, далі,* $\operatorname{rank} P_i = r_i$. *Якщо* $P_iP_j = 0_{n,n}$ *для всіх* $i \neq j$, *то для матриць* $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *існує матриця* $T \in GL(n, \mathrm{R})$ *така, що*

$$TP_iT^{-1} = \operatorname{diag}\,(\,\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{r_1+\cdots+r_{i-1}}\ \underbrace{e\ \ldots\ e}_{r_i}\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n-(r_1+\cdots+r_i)}\,), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. Доведемо справедливість леми для $k = 2$. Нехай $T_1 \in GL(n, R)$ така, що

$$T_1P_1T_1^{-1} = \overline{P}_1 = \begin{bmatrix} I_{r_1} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}.$$

Матрицю $T_1P_2T_1^{-1}$ запишемо у вигляді

$$T_1P_2T_1^{-1} = \overline{P}_2 = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

де $P_{11} \in M_{r_1}(\mathrm{R})$, $P_{22} \in M_{n-r_1}(\mathrm{R})$. Очевидно, що $\overline{P}_1\overline{P}_2 = \overline{P}_2\overline{P}_1$. З останньої рівності випливає, що $\overline{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & P_{22} \end{bmatrix}$, де P_{22} — ідемпотентна матриця. Для матриці P_{22} існує матриця $T_2 \in$ $\in GL(n - r_1, \mathrm{R})$ така, що

$$T_2P_{22}T_2^{-1} = \begin{bmatrix} I_{r_2} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}.$$

Отже, для оборотної матриці $T = \begin{bmatrix} I_{r_1} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & T_2 \end{bmatrix} T_1$ справджуються рівності

$$TP_1T^{-1} = \operatorname{diag}\,(\underbrace{e\ \ldots\ e}_{r_1}\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n-r_1}),$$

$$TP_2T^{-1} = \operatorname{diag}\,(\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{r_1}\ \underbrace{e\ \ldots\ e}_{r_2}\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n-(r_1+r_2)}).$$

Припустимо, що лема справедлива при $k - 1$, тобто для ідемпотентних матриць $P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_{k-1} \in M_n(\mathrm{R})$ існує матриця $T_0 \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$T_0P_iT_0^{-1} = \overline{P}_i = \operatorname{diag}\,(\,\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{r_1+\ldots+r_{i-1}}\ \underbrace{e\ \ldots\ e}_{r_i}\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{n-(r_1+\ldots+r_i)}\,), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Матрицю $T_0P_kT_0^{-1}$ запишемо у вигляді

$$T_0P_kT_0^{-1} = \overline{P}_k = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1r} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{r1} & P_{r2} & \ldots & P_{rr} \end{bmatrix},$$

де $P_{ij} \in M_{r_i,r_j}(\mathrm{R})$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, r$.

Оскільки $P_iP_j = 0_{n,n}$ для всіх $i \neq j$, то очевидно, що

$$\overline{P}_i\overline{P}_k = \overline{P}_k\overline{P}_i = 0_{n,n}$$

для всіх $i \neq k$. З останньої рівності отримуємо, що $\overline{P}_k = \begin{bmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & P_{kk} \end{bmatrix}$, де $P_{kk} \in M_{r_k}(\mathrm{R})$ — ідемпотентна матриця. Нехай $T_{kk} \in GL(r_k, \mathrm{R})$ така, що

$$T_{kk}P_{kk}T_{kk}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{r_k} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}.$$

Неважко переконатись у тому, що для матриці $T = \begin{bmatrix} I_{n-r_k} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & T_{kk} \end{bmatrix} T_0$ справджуються рівності

$$TP_iT^{-1} = \mathrm{diag}\,(\underbrace{0\ \dots\ 0}_{r_1+\dots+r_{i-1}}\ \underbrace{e\ \dots\ e}_{r_i}\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n-(r_1+\dots+r_i)})$$

для всіх $i = 1, 2, \dots, k$, що і доводить лему.

Тепер доведемо основний результат даної статті.

Теорема 2. *Нехай характеристичний многочлен матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ допускає зображення у вигляді добутку*

$$\det(I_nx - A) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}, \quad \alpha_i \in \mathrm{R}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Матриця A діагоналізовна, тобто для A існує матриця $T \in GL(n, \mathrm{R})$ така, що

$$TAT^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \alpha_i I_{k_i}$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

a) $m(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)$ — *мінімальний многочлен матриці A*;

b) *відповідні інваріантні множники матриць W_α і $\begin{bmatrix} W_\alpha & W_A \end{bmatrix}$ збігаються з точністю до дільників одиниці.*

Доведення. *Необхідність* випливає з теореми 1.

Достатність. Нехай $A \in M_n(\mathrm{R})$ — матриця з характеристичним многочленом

$$a(x) = \det(I_nx - A) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r}, \quad \alpha_i \in R, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

та мінімальним многочленом $m(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)$. Нехай, далі, відповідні інваріантні множники матриць W_α і $\begin{bmatrix} W_\alpha & W_A \end{bmatrix}$ збігаються між собою з точністю до дільників одиниці. Отже, матричне рівняння

$$W_\alpha Z = W_A \tag{3}$$

є розв'язним. Нехай, далі, матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} \in M_{nr,n}(\mathrm{R})$, де $P_j \in M_n(\mathrm{R})$, $j = 1, 2, \dots, r$, — розв'язок цього рівняння. Із рівності (3) отримуємо, що для матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ існує зображення у вигляді

$$A = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_r P_r. \qquad (4)$$

Нехай F — поле часток області R. Оскільки мінімальний многочлен матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ не має кратних коренів, то матриця A над полем F перетворенням подібності зводиться до діагонального вигляду, тобто для матриці A існує матриця $T \in GL(n, \mathrm{F})$ така, що

$$TAT^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \alpha_i I_{k_i}.$$

На підставі теореми 1 для матриці A над полем F існує єдиний набір попарно ортогональних ідемпотентних матриць $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r \in M_n(\mathrm{F})$ ($Q_i^2 = Q_i, Q_i Q_j = 0_{n,n}, i \neq j$) таких, що

$$A = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \ldots + \alpha_r Q_r.$$

Отже, матриця $X_0 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_r \end{bmatrix} \in M_{nr,n}(\mathrm{F})$ є розв'язком рівняння (3). Оскільки рівняння (3) має єдиний розв'язок, то очевидно, що $X_0 = Z_0$. Отже, $P_i = Q_i$ — ідемпотентні матриці, до того ж $P_i P_j = 0_{n,n}$ для всіх $i \neq j$. На підставі леми матриці $P_1, P_2, \ldots, P_r$ одним і тим же перетворенням подібності зводяться до діагонального вигляду. Отже, враховуючи рівність (4), приходимо до висновку, що матриця діагоналізовна.

Теорему доведено.

Із теореми 2 отримуємо узагальнення твердження 2 роботи [2].

Наслідок. *Нехай характеристичний многочлен $a(x)$ матриці $A \in M_n(\mathrm{R})$ допускає зображення у вигляді добутку*

$$a(x) = \det(I_n x - A) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r},$$

де $\alpha_i \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Нехай, далі, мінімальний многочлен матриці A не має кратних коренів, тобто $m(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_r)$. Якщо $(\alpha_i - \alpha_j) \in U(\mathrm{R})$ для всіх $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, то матриця A діагоналізовна, тобто для A існує матриця $T \in GL(n, R)$ така, що

$$TAT^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{r} I_{k_i} \alpha_i.$$

1. *Richter R. B., Wardlaw W. P.* Diagonalization over commutative rings // Amer. Math. Monthly. – 1990. – **97**, № 3. – P. 223 – 227.
2. *Prokip V.* On similarity of matrices over commutative rings // Linear Algebra and Appl. – 2005. – **399**. – P. 225 – 233.
3. *Прокіп В. М.* Діагоналізація матриць над областю головних ідеалів з мінімальним многочленом $m(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \alpha \neq \beta$ // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 2. – С. 212 – 219.
4. *Steger A.* Diagonability of idempotent matrices // Pacif. J. Math. – 1969. – **19**, № 3. – P. 535 – 542.

Одержано 26.01.12