УДК 517.9

**А. М. Самойленко** (Ін-т математики НАН України, Київ),
**І. О. Парасюк** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
**В. А. Лагода** (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

# ЛІПШИЦЕВІ ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ІНДЕФІНІТНО МОНОТОННИХ СИСТЕМ

We consider a nonlinear system in the direct product of a torus and a Euclidean space. For this system, under the conditions of indefinite coercivity and indefinite monotonicity, we establish the existence of a Lipschitzian invariant section.

Рассматривается нелинейная система на прямом произведении тора и евклидового пространства. При выполнении условий индефинитной коэрцитивности и индефинитной монотонности установлено существование у такой системы липшицевого инвариантного сечения.

**1. Вступ.** У цій роботі вивчається задача про існування інваріантного тороїдального многовиду (інваріантного перерізу) системи вигляду

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, x), \qquad \dot{x} = b(\varphi, x), \tag{1}$$

фазовим простором якої є прямий добуток $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, де $\mathbb{T}^m := \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ — $m$-вимірний тор, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)|\bmod 1$ — кутові координати на $\mathbb{T}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — координати в $\mathbb{R}^n$, $a(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ та $b(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ — локально ліпшицеві відображення. Ліпшицевим інваріантним тором (інваріантним перерізом) системи (1) називається многовид, заданий рівнянням $x = u(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, де $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ — ліпшицеве відображення з такою властивістю: якщо для довільного $\varphi \in \mathbb{T}^m$ через $\phi_t(\varphi)$ позначити розв'язок системи $\dot{\varphi} = a(\varphi, u(\varphi))$ такий, що $\phi_0(\varphi) = \varphi$, а через $x_t(\varphi)$ — розв'язок системи $\dot{x} = b(\phi_t(\varphi), x)$ такий, що $x_0(\varphi) = u(\varphi)$, то справджуватиметься рівність

$$x_t(\varphi) = u(\phi_t(\varphi)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ця задача вивчалася багатьма авторами в рамках теорії збурень, коли на норму функції $b(\varphi, 0)$ накладалися умови достатньої мализни, а система у варіаціях

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, 0), \qquad \dot{x} = b'_x(\varphi, 0)x \tag{2}$$

відносно тривіального перерізу $x = 0$ мала властивість експоненціальної дихотомії, що, в свою чергу, забезпечувало існування для системи (2) функції Гріна задачі про інваріантні тори. Відповідні результати та посилання див. у [1 – 6]. У цьому випадку було розвинуто локальну теорію: інваріантний тор шукався в околі тривіального перерізу (тобто шукався тор, породжений відображенням $u(\cdot)$ з малою нормою). Серед робіт останнього часу в цьому напрямку відмітимо [7 – 9]. В [2, 10] із застосуванням функції Гріна та принципу Банаха знайдено кількісні оцінки мализни збурення, які забезпечували існування стійкого ліпшицевого інваріантного тора. В [2] розвинуто конструктивну теорію інваріантних торів нелінійних систем, уперше запропоновано і обґрунтовано низку ітераційних та проекційно-ітераційних методів побудови цих многовидів, зокрема модифікований метод Гальоркіна. Нелокальному варіанту теорії присвячено роботу [11], у якій встановлено існування експоненціально стійкого ліпшицевого інваріантного тора із застосуванням теореми Шаудера.

Зауважимо, що в роботах [2, 12] важливим моментом є припущення про існування квадратичної за змінними $x$ функції Ляпунова, яка гарантує експоненціальну дихотомію тривіального інваріантного тора системи у варіаціях (2), а відтак і можливість застосування апарату функцій Гріна. Водночас існування функції Ляпунова можна трактувати як наявність властивості індефінітної монотонності системи у варіаціях. Важливо зазначити, що ця властивість може бути притаманною не лише лінійним, але й нелінійним системам. Так, у [13 – 18] доведено низку нелокальних теорем існування для різних типів обмежених розв'язків нелінійних неавтономних індефінітно монотонних систем.

У цій роботі з метою встановлення нових достатніх умов існування інваріантних торів за межами теорії збурень ми розглянемо клас систем вигляду (1), які мають певні властивості індефінітної коерцитивності та індефінітної монотонності (точні формулювання наведено в п. 2). Основні теореми існування для таких систем одержано шляхом поєднання теореми Шаудера про нерухому точку з топологічним принципом Важевського. Саме завдяки принципу Важевського результати роботи [11] вдалося розповсюдити на клас індефінітно монотонних систем.

Статтю побудовано таким чином. У п. 2 сформульовано умови, які накладаються на систему (1), а також основну теорему існування ліпшицевого інваріантного тора. Після цього наведено модельний приклад, який демонструє ефективність застосування основної теореми. У п. 3 викладено математичний апарат, який використовується для доведення існування інваріантного перерізу нелінійного розширення динамічної системи на торі. При цьому використовуються допоміжні леми з п. 5. Нарешті, п. 4 містить доведення основної теореми.

**2. Формулювання основної теореми про існування ліпшицевого інваріантного тора.** Припускатимемо, що виконуються такі умови:

**(A)** існує сім'я симетричних операторів $S(\cdot) \in \mathrm{C}^1\big(\mathbb{T}^m \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)$, для якої при кожному $\varphi \in \mathbb{T}^m$ можна вказати проектори $P_+(\varphi)$, $P_-(\varphi)$ на інваріантні підпростори $\mathbb{L}_+(\varphi)$, $\mathbb{L}_-(\varphi)$ оператора $S(\varphi)$ такі, що його звуження на $\mathbb{L}_+(\varphi)$ та на $\mathbb{L}_-(\varphi)$ є відповідно додатно та від'ємно визначеними операторами;

**(B)** існують функції $\beta(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^m \mapsto (0,\infty))$, $q(\cdot) \in \mathrm{C}((0,\infty) \mapsto \mathbb{R})$, $p(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+)$, $Q(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+)$ такі, що $p(\cdot)$ неспадна і для всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ та $u \in \mathbb{R}^n$ справджуються нерівності

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \langle S(\varphi)x, x\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi,u) + \langle S(\varphi)b(\varphi,x), x\rangle \geq \beta(\varphi)\left[q\left(\|x\|^2\right) - p\left(\|u\|^2\right)\right]\|x\|^2,$$

$$|\langle b(\varphi,x), x\rangle| \leq \beta(\varphi)Q(\|x\|^2);$$

**(C)** існують числа $z_0 > 0$ і $z^* > z_0$ такі, що $q(z) > p(z^*)$ для всіх $z \in (z_0, z^*]$ і

$$\int\limits_{z_0}^{z^*} \frac{[q(z) - p(z^*)]z}{Q(z)} dz \geq \frac{z_0}{2}\left(\lambda_+ - \lambda_-\right),$$

де $\lambda_+ := \max_{\varphi\in\mathbb{T}^m} \lambda_+(\varphi)$, $\quad \lambda_- := \min_{\varphi\in\mathbb{T}^m} \lambda_-(\varphi)$, а $\lambda_+(\varphi)$, $\lambda_-(\varphi)$ — відповідно найбільше та найменше власні значення оператора $S(\varphi)$;

**(D)** існує стала $\gamma > 0$ така, що

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \langle S(\varphi)(x-y), x-y\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi,u) + \langle S(\varphi)\left[b(\varphi,x)-b(\varphi,y)\right], x-y\rangle \geq \gamma \left\|x-y\right\|^2$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$ і всіх $u, x, y \in \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\left\|u\right\|^2, \left\|x\right\|^2, \left\|y\right\|^2 \leq z^*, \qquad \lambda_- z_0 \leq \langle S(\varphi)x, x\rangle, \langle S(\varphi)y, y\rangle \leq \lambda_+ z_0.$$

Без обмеження загальності міркувань далі припускатимемо, що

$$\max_{\varphi\in\mathbb{T}^m} \left\|S(\varphi)\right\| := \max\left\{\lambda_+, |\lambda_-|\right\} = 1.$$

Умову (**B**) природно назвати умовою індефінітної $S$-коерцитивності системи (1) в $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, а умову (**D**) — умовою індефінітної $S$-монотонності цієї системи на компактній множині $\mathbb{T}^m \times \times \left\{x \colon \left\|x\right\|^2 \leq z^*\right\}$. Достатні умови виконання умови (**C**), яка виражає певні взаємозалежності швидкостей зростання функцій $q(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $p(\cdot)$, буде наведено після формулювання основної теореми.

З огляду на припущення локальної ліпшицевості правих частин системи (1) визначимо такі чотири константи:

$$l_a := \sup\left\{\left\|a(\varphi,x)-a(\psi,x)\right\|\left\|\varphi-\psi\right\|^{-1} :\ \varphi,\psi\in\mathbb{T}^m,\ \left\|x\right\|^2 \leq z^*\right\},$$

$$L_a := \sup\left\{\left\|a(\varphi,x)-a(\varphi,y)\right\|\left\|x-y\right\|^{-1} :\ \varphi\in\mathbb{T}^m,\ \left\|x\right\|^2, \left\|y\right\|^2 \leq z^*\right\},$$

$$l_b := \sup\left\{\left\|b(\varphi,x)-b(\psi,x)\right\|\left\|\varphi-\psi\right\|^{-1} :\ \varphi,\psi\in\mathbb{T}^m,\ \left\|x\right\|^2 \leq z^*\right\},$$

$$L_b := \sup\left\{\left\|b(\varphi,x)-b(\varphi,y)\right\|\left\|x-y\right\|^{-1} :\ \varphi\in\mathbb{T}^m,\ \left\|x\right\|^2, \left\|y\right\|^2 \leq z^*\right\}.$$

Тепер сформулюємо основну теорему, доведення якої буде наведено в п. 4.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* (**A**) – (**D**) *і нерівність*

$$\max_{l\in[l_-,l_+]} \int\limits_1^{A(l)} \frac{\sqrt{s}-1}{B(l)\sqrt{s}+1} ds \geq \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}, \tag{3}$$

*де*

$$A(l) := \frac{\left[\gamma - \lambda_+(l_a + lL_a)\right]^2 l^2}{l_b^2}, \qquad B(l) := \frac{L_b + l_a + lL_a}{\gamma - \lambda_+(l_a + lL_a)},$$

*а $l_-$ та $l_+$ — відповідно менший та більший корені рівняння $A(l) = 1$. Тоді система* (1) *має інваріантний тор, заданий рівнянням $x = u(\varphi)$, де відображення $u(\cdot) \colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ ліпшицеве з константою Ліпшиця, яка реалізує максимум лівої частини нерівності* (3), *а норма цього відображення не перевищує $\sqrt{z^*}$.*

***Зауваження 1.*** Умова (3) може виявитися незручною для перевірки. Дещо пожертвувавши точністю, можна вивести простішу за формою достатню умову (див. п. 4). А саме, виконавши заміну змінної інтегрування $\sqrt{s} = 1 + u$ і оцінивши підінтегральний вираз знизу функцією $2u/(B(l)+1)$, дістанемо достатню умову вигляду

$$\max_{l \in [l_-, l_+]} \frac{\left[\sqrt{A(l)} - 1\right]^2}{B(l) + 1} \geq \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}.$$

Якщо тут покласти $l = \dfrac{l_+ + l_-}{2} = \dfrac{\gamma - \lambda_+ l_a}{2\lambda_+ L_a}$, то отримаємо достатню умову, яка допускає безпосередню перевірку

$$\frac{(\gamma - \lambda_+ l_a)\left[(\gamma - \lambda_+ l_a)^2 - 4\lambda_+ L_a l_b\right]^2}{8\lambda_+ L_a^2 l_b^2 \left[(\gamma - \lambda_+ l_a)(1 + \lambda_+) + 2\lambda_+(l_a + L_b)\right]} \geq \lambda_+ - \lambda_-. \tag{4}$$

Звідси видно, що умова (3) охоплює клас систем з достатньо великими сталими $\gamma$ та $L_b$ у порівнянні з іншими сталими, що входять до зазначеної умови.

Доведення теореми базується на простій ідеї. Для довільного ліпшицевого відображення $u(\cdot)$ з тора $\mathbb{T}^m$ в кулю радіуса $\sqrt{z^*}$ утворимо систему

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, u(\varphi)), \qquad \dot{x} = b(\varphi, x), \tag{5}$$

яка при виконанні умов **(A)**–**(D)** має інваріантний тор $x = \hat{u}(\varphi)$. Цей факт випливатиме з низки тверджень п. 3, де викладено теорію систем в $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, які мають так звану V-W-пару. Інваріантний тор системи (1) шукається як нерухома точка відображення, яке функції $u(\cdot)$ ставить у відповідність функцію $\hat{u}(\cdot)$. Додаткова умова теореми (1) дає змогу застосувати в цій ситуації принцип Шаудера в класі ліпшицевих відображень зі сталою Ліпшиця $l$, яка забезпечує виконання нерівності (3).

Тепер повернемося до умови **(C)** і покажемо, що її виконання можна забезпечити в термінах асимптотичної поведінки функцій $p(z)$, $q(z)$ та $Q(z)$ при $z \to \infty$. При цьому без обмеження загальності вважатимемо, що $Q(z) = O(\sqrt{z})$ і $zq(z) \to 0$ при $z \to 0$.

**Лема 1.** *Нехай функції* $p(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+)$, $Q(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto (0, \infty))$ *неспадні, функція* $q(\cdot) \in \mathrm{C}((0,\infty) \mapsto \mathbb{R})$ *строго монотонно зростає і*

$$\lim_{z \to +0} q(z) \leq p(0), \qquad \limsup_{z \to \infty} \frac{p(z)}{q(z)} < 1, \tag{6}$$

$$\limsup_{z \to \infty} \frac{p(z) \displaystyle\int_0^z \frac{s ds}{Q(s)} + (\lambda_+ - \lambda_-)\, q^{-1}\big(p(z)\big)/2}{\displaystyle\int_0^z \frac{sq(s)ds}{Q(s)}} < 1. \tag{7}$$

*Тоді умова* **(C)** *виконується, причому числа* $z_0$ *та* $z^*$ *задовольняють рівності*

$$q(z_0) = p(z^*), \qquad \int\limits_{z_0}^{z^*} \frac{[q(s) - q(z_0)]s}{Q(s)} ds = \frac{z_0}{2}\left(\lambda_+ - \lambda_-\right). \tag{8}$$

***Доведення.*** Умови (6) гарантують, що $p(z)$ при будь-якому фіксованому $z > 0$ належить області значень функції $q(\cdot)$, причому знайдеться таке $\bar{z} > 0$, що $q(z) > p(z)$ для всіх $z > \bar{z}$. Якщо покласти $z_0(z) := q^{-1}(p(z))$, то при всіх $z > \bar{z}$ будуть виконуватися нерівності

$$z_0(z) < z, \qquad q(s) > p(z) \quad \forall s > z_0(z).$$

Покажемо, що для всіх достатньо великих $z > \bar{z}$ виконується й нерівність

$$\int\limits_{z_0(z)}^{z} \frac{[q(s) - p(z)]s}{Q(s)} ds > \frac{z_0(z)}{2} \left(\lambda_+ - \lambda_-\right). \tag{9}$$

Запишемо її у вигляді

$$\int\limits_0^z \frac{q(s)s}{Q(s)} ds + p(z) \int\limits_0^{z_0(z)} \frac{s}{Q(s)} ds >$$

$$> \int\limits_0^{z_0(z)} \frac{q(s)s}{Q(s)} ds + p(z) \int\limits_0^z \frac{s}{Q(s)} ds + \frac{z_0(z)}{2} \left(\lambda_+ - \lambda_-\right).$$

Оскільки $q(s) < q(z_0(z)) = p(z)$ при $s \in (0, z_0(z))$, то для її виконання достатньо, щоб

$$\int\limits_0^z \frac{q(s)s}{Q(s)} ds > p(z) \int\limits_0^z \frac{s}{Q(s)} ds + \frac{z_0(z)}{2} \left(\lambda_+ - \lambda_-\right).$$

Ця нерівність виконується внаслідок умови (7).

Водночас зауважимо, що з першої умови в (6) випливає, що знайдеться таке $\underline{z} > 0$, що $q(z) < p(z)$ при $z < \underline{z}$. На цій підставі легко дійти висновку, що в процесі прямування $z$ до нуля ліва частина нерівності (9) досягне нульового значення при деякому додатному значенні $z$. А тоді існує $z^*$, яке задовольняє рівності (8) при $z_0 = z_0(z^*)$.

Лему 1 доведено.

У нелінійному аналізі, як правило, на функції $q(\cdot), Q(\cdot), p(\cdot)$ накладають умови степеневого зростання.

***Приклад* 1.** Нехай $q(z) \sim c_1 z^{\gamma_1}$, $p(z) \sim c_2 z^{\gamma_2}$, $Q(z) \sim c_3 z^{\gamma_3}$ при $z \to \infty$, де $c_i > 0$, $\gamma_i$ — деякі сталі, $i = 1, 2, 3$, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 \geq \gamma_1 + 1$, до того ж $c_1 > c_2$, якщо $\gamma_1 = \gamma_2$. Тоді на підставі леми 1 для виконання умови (**C**) достатньо, щоб додатково виконувалися такі умови:

якщо $0 < \gamma_3 < 2$, то $\gamma_3 < 2 + \gamma_1 - \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}$ і або $\gamma_2 < \gamma_1$, або $\gamma_2 = \gamma_1$ і $\dfrac{c_2(2 + \gamma_1 - \gamma_3)}{c_1(2 - \gamma_3)}$<1;

якщо $\gamma_3 = 2$, то або $\gamma_2 < \min\left\{\gamma_1, \gamma_1^2\right\}$, або $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$;

якщо $2 < \gamma_3 < 2 + \gamma_1$, то або $\gamma_3 < 2 + \gamma_1 - \gamma_2 \max\left\{1, \dfrac{1}{\gamma_1}\right\}$, або $\gamma_3 = 2 + \gamma_1 - \gamma_2$, $\gamma_1 > 1$ і $\dfrac{c_2 c_3 \gamma_2}{c_1} \displaystyle\int_0^\infty \frac{z dz}{Q(z)} < 1$;

якщо $\gamma_3 = 2 + \gamma_1$, то $\gamma_2 = 0$.

При цьому слід взяти до уваги, що першу умову в (6) завжди можна вважати виконаною: достатньо відповідним чином перевизначити функцію $q(\cdot)$ поблизу нуля.

***Приклад* 2.** Умова (**C**) виконується, якщо $q(z) \sim C_1 e^{\varkappa z}$, $Q(s) \sim C_2 z e^{\varkappa z}$, $p(z) = o(z)$ при $z \to \infty$, де $\varkappa > 0$.

Розглянемо тепер застосування теореми 1 на модельному прикладі системи індефінітно градієнтного типу.

***Приклад* 3.** Нехай $F(\cdot) \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R})$ — опукла функція, яка задовольняє нерівності

$$\|x\| \le \max_{\|\xi\|=1} \left\langle F''(x)\xi, \xi \right\rangle \le \|x\| + 1,$$

а $S(\cdot)$ — сім'я симетричних операторів, яка задовольняє умову (**A**). Розглянемо модельний приклад умовно градієнтної системи з параметром

$$\dot\varphi = a(\varphi, x), \qquad \dot x = S(\varphi)\left[F'(x + \lambda e) - F'(\lambda e)\right] + f(\varphi) =: b(\varphi, x), \tag{10}$$

де $a(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m)$, $f(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^m)$, $\lambda$ — додатний параметр, $e \in \mathbb{R}^n$ — фіксований вектор, $\|e\| = 1$. Поставимо таку задачу: при яких значеннях $\lambda$ система (10) має ліпшиців інваріантний тор $x = u(\varphi)$, для якого $\|\lambda e - u(\varphi)\| \le 1$ при всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$?

Щоб уникнути громіздких викладок, додатково припустимо, що при всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi, \psi \in \mathbb{T}^m$ виконано умови

$$S^2(\varphi) = E, \qquad \max_{\|\xi\|=1} \left\| \frac{\partial}{\partial\varphi} S(\varphi)\xi \right\| \le 1, \qquad \|f(\varphi)\| \le 1, \qquad \|f(\varphi) - f(\psi)\| \le \|\varphi - \psi\|,$$

$$\|a(\varphi, x)\| \le 1 + \|x\|, \qquad \|a(\varphi, x) - a(\psi, x)\| \le \|\varphi - \psi\|, \qquad \|a(\varphi, x) - a(\varphi, y)\| \le \|x - y\|.$$

Таким чином, $L_a = l_a = \lambda_+ = 1$, $\lambda_- = -1$, а першу умову, наприклад, задовольняє кожен оператор вигляду $S(\varphi) = O^T(\varphi) I O(\varphi)$, де $O(\varphi) \in \mathrm{SO}(n)$, $I$ — сталий оператор з власними числами $\pm 1$. Легко перевірити, що

$$\|b(\varphi, x) - b(\varphi, y)\| \le \left\|F'(\lambda e + x) - F'(\lambda e + y)\right\| \le \left[\lambda + 1 + (\|x\| + \|y\|)/2\right] \|x - y\|,$$

$$\|b(\varphi, x) - b(\psi, x)\| \le \left[(\lambda + 1)\|x\| + \|x\|^2/2 + 1\right] \|\varphi - \psi\|,$$

$$\langle S(\varphi) b(\varphi, x), x\rangle = \left\langle F'(\lambda e + x) - F'(\lambda e), x\right\rangle + \langle S(\varphi) f(\varphi), x\rangle \ge \left[\lambda - \frac{\|x\|}{2} - \frac{1}{\|x\|}\right] \|x\|^2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle S(\varphi)x, x\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi, u) + \langle S(\varphi) b(\varphi, x), x\rangle \ge \left[\lambda - \frac{\|x\|}{2} - \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{2} - \frac{\|u\|}{2}\right] \|x\|^2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle S(\varphi)(x - y), x - y\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi, u) + \langle S(\varphi)\left[b(\varphi, x) - b(\varphi, y)\right], x - y\rangle \ge$$

$$\ge \left[\lambda - \frac{\|x\|}{2} - \frac{\|y\|}{2} - \frac{\|u\|}{2} - \frac{1}{2}\right] \|x - y\|^2.$$

Звідси випливає, що при $z \in (0, 1]$, $\|x\|, \|y\|, \|u\| \le 1$ можна покласти

$$q(z) = \lambda - 1 - \frac{1}{\sqrt{z}}, \qquad p(z) = \frac{\sqrt{z}}{2}, \qquad Q(z) = \frac{1}{2} z^{3/2} + (\lambda+1)z + \sqrt{z},$$

$$L_b = \lambda + 2, \qquad l_b = \lambda + \frac{5}{2}, \qquad \gamma = \lambda - 2.$$

Тепер знаходимо $z_0(\lambda) = \dfrac{4}{(2\lambda-3)^2}$, і числові розрахунки показують, що умова (**C**) виконується при всіх $\lambda \geq 4,5$. Далі,

$$A(l) = \frac{4\,(\lambda - 3 - l)^2\, l^2}{(2\lambda+5)^2}, \qquad B(l) = \frac{\lambda + 3 + l}{\lambda - 3 - l}.$$

Спрощена умова (4) при $l = (\lambda - 3)/2$ для нижньої межі $\lambda$ набирає вигляду

$$\frac{(\lambda^2 - 10\lambda - 1)^2(\lambda - 3)}{16\lambda(2\lambda+5)^2} \geq 1.$$

Вона виконується при $\lambda \geq 19{,}83$. Числовий розрахунок відповідно до умови (3) покращує нижню межу до значення $\lambda = 18{,}93$ яке досягається при $l = 6{,}75$.

**3. Системи з V-W-парою.** Поряд із системою (1) будемо розглядати систему, залежну від параметра $u \in \mathbb{R}^n$ :

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, u), \qquad \dot{x} = b(\varphi, x). \tag{11}$$

Для довільної функції $U(\cdot) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R})$ позначимо

$$\dot{U}(\varphi, x, u) := \frac{\partial U(\varphi, x)}{\partial \varphi} a(\varphi, u) + \frac{\partial U(\varphi, x)}{\partial x} b(\varphi, x).$$

Мета цього пункту полягає в тому, щоб виділити такий клас систем вигляду (11), який би мав властивість: для довільного відображення $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ з певного класу ліпшицевих відображень тора $\mathbb{T}^m$ в $\mathbb{R}^n$ система, одержана з (11) покладанням $u = u(\varphi)$ (таку систему називають нелінійним розширенням системи на торі $\dot{\varphi} = a(\varphi, u(\varphi))$), має ізольовану сім'ю обмежених розв'язків, параметризовану точками тора $\mathbb{T}^m$ так, що кожній точці $\varphi \in \mathbb{T}^m$ відповідає єдиний розв'язок цієї сім'ї.

З цією метою введемо пару допоміжних функцій за аналогією з [18].

**Означення 1.** *Функцію $V(\varphi, x) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R})$ назвемо регулярною оцінювальною функцією, якщо при кожному $\varphi \in \mathbb{T}^m$ функція $V_\varphi(\cdot) := V(\varphi, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ має такі властивості*: 1) *при кожному $c \geq 0$ множина $V_\varphi^{-1}\big((-\infty, c]\big)$ непорожня і опукла*; 2) $\lim_{\|x\|\to\infty} V_\varphi(x) = \infty$ (*властивість x-коерцитивності*); 3) $\dfrac{\partial V_\varphi(x)}{\partial x} \neq 0$ *на множині* $V_\varphi^{-1}\big((0, \infty)\big)$.

Нехай $0 < V^* \leq \infty$. Введемо область

$$\Omega := V^{-1}\big((-\infty, V^*)\big).$$

Для функції $W(\cdot) \in \mathrm{C}^1(\Omega \mapsto \mathbb{R})$ покладемо

$$w_0 := \min_{(\varphi,x)\in V^{-1}(0)} W(\varphi, x), \qquad w^0 := \max_{(\varphi,x)\in V^{-1}(0)} W(\varphi, x).$$

Для трійки чисел $v^*,\ w_*,\ w^*$ таких, що $v^* \in \big(0, V^*\big),\ w_* < w_0,\ w^* > w^0$, визначимо множину

$$\mathcal{U} := \Big\{(\varphi, x, u) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{2n}\colon\ 0 < V(\varphi, x) < V^*,\ w_* \le W(\varphi, x) \le w^*,\ V(\varphi, u) \le v^*\Big\}.$$

**Означення 2.** *Функцію* $W(\varphi, x) \in \mathrm{C}^1(\Omega \mapsto \mathbb{R})$ *назвемо регулярною напрямною функцією системи* (11), *узгодженою з оцінювальною функцією* $V(\cdot)$ *на множині* $\mathcal{U}$, *якщо*: 1) $w^*$ *належить області значень функції* $W_\varphi(\cdot)$ *при кожному* $\varphi \in \mathbb{T}^m$; 2) $\dfrac{\partial W(\varphi, x)}{\partial x} \ne 0$ *на множині* $W^{-1}(w^*)$; 3) *знайдуться числа* $c^* > 0$, $c_* \in [0, \infty]$ *такі, що на множині* $\mathcal{U}$ *виконано умови*

$$\dot W(\varphi, x, u) > 0, \qquad -c_* \dot W(\varphi, x, u) \le \dot V(\varphi, x, u) \le c^* \dot W(\varphi, x, u).$$

*Таку узгоджену пару функцій* $V(\cdot)$ *та* $W(\cdot)$ *називатимемо* V-W-*парою.*

Далі без обмеження загальності міркувань вважатимемо, що множина

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(w_*, w^*) := W^{-1}\big((w_*, w^*)\big)$$

складається з однієї компоненти зв'язності, і оскільки тоді $V^{-1}(0) \subset \mathcal{W}$, то і $V^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$ належить $\mathcal{W}$ (достатньо, в разі потреби, на множині $V^{-1}\big((-\infty, 0)\big)$ функцію $W(\cdot)$ перевизначити так, щоб вона на цій множині набувала значень з інтервалу $(w_*, w^*)$).

З означення 2, зокрема, випливає, що множина

$$\mathcal{W}^{se} := W^{-1}(w^*)$$

є гіперповерхнею в $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ і складається з точок строгого виходу з $\mathcal{W}$ відносно кожної системи вигляду (5), де $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ — довільне ліпшицеве відображення, графік якого належить множині $V^{-1}\big((-\infty, v^*]\big)$.

Покладемо

$$\bar{\mathcal{W}} := \mathcal{W} \cup \mathcal{W}^{se}.$$

Домовимось далі для будь-якої множини $\mathcal{A} \subset \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ через $\mathcal{A}_\varphi$ позначати множину $\{x \in \mathbb{R}^n\colon (\varphi, x) \in \mathcal{A}\}$, тобто $\mathcal{A}_\varphi$ — проекція на $\mathbb{R}^n$ перерізу множини $\mathcal{A}$ шаром $\{\varphi\} \times \mathbb{R}^n$. Зокрема, для кожної фіксованої точки $\varphi \in \mathbb{T}^m$ множина $\mathcal{W}^{se}_\varphi$ є гіперповерхнею в $\mathbb{R}^n$, заданою рівнянням $W_\varphi(x) = w^*$, і

$$\mathcal{W}_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ w_* < W(\varphi, x) < w^*\}, \qquad \bar{\mathcal{W}}_\varphi = \mathcal{W}_\varphi \cup \mathcal{W}^{se}_\varphi.$$

Для довільної точки $\varphi \in \mathbb{T}^m$ позначимо через $\mathfrak{P}_\varphi$ множину відображень $\psi_\varphi(\cdot) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{T}^m)$ таких, що $\psi_\varphi(0) = \varphi$, і якщо $\psi_\varphi(\cdot)$ не взаємно однозначне, то або $\psi_\varphi(t) \equiv \varphi$, або знайдеться таке найменше додатне $T$, що $\psi_\varphi(\cdot)\colon [0, T) \mapsto \mathbb{T}^m$ є взаємно однозначним і $\psi_\varphi(t + T) = \psi_\varphi(t)$ для всіх $t \ge 0$.

Для кожного $\psi_\varphi(\cdot) \in \mathfrak{P}_\varphi$ визначимо множини

$$\mathcal{A}[\psi_\varphi] := \Big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}\colon\ t \ge 0,\ w_* \le W(\psi_\varphi(t), x) \le w^*\Big\},$$

$$\mathcal{B}[\psi_\varphi] := \Big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}\colon\ t \ge 0,\ W(\psi_\varphi(t), x) = w^*\Big\}.$$

Очевидно, що

$$\mathcal{B}[\psi_\varphi] = \bigcup_{t\geq 0} \Big( \{t\} \times \mathcal{W}^{se}_{\psi_\varphi(t)} \Big) \subset \partial\mathcal{A}[\psi_\varphi].$$

**Означення 3.** *Скажемо, що множина $\mathcal{W}$ має властивість $\mathbf{W}$, якщо для будь-яких $\varphi \in \in \mathbb{T}^m$ і $\psi_\varphi(\cdot) \in \mathfrak{P}_\varphi$ знайдеться така компактна множина $\mathcal{M}_\varphi \subset \bar{\mathcal{W}}_\varphi$, що $\mathcal{M}_\varphi \cap \mathcal{W}^{se}_\varphi \neq \varnothing$ і множину $\{0\} \times \mathcal{M}_\varphi$ не можна ізотопією по множині $\mathcal{A}[\psi_\varphi]$ продеформувати у підмножину множини $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$, залишаючи при цьому нерухомою множину $\{0\} \times \big(\mathcal{M}_\varphi \cap \mathcal{W}^{se}_\varphi\big)$.*

Наведемо кілька достатніх умов, які забезпечують наявність у $\mathcal{W}$ властивості $\mathbf{W}$.

**Означення 4.** *Скажемо, що множина $\mathcal{M}_\varphi$ належить класу $\mathfrak{M}_\varphi$, якщо $\mathcal{M}_\varphi \subset \bar{\mathcal{W}}_\varphi$, множина $\dot{\mathcal{M}}_\varphi := \mathcal{M}_\varphi \cap \mathcal{W}^{se}_\varphi$ не порожня і не є ретрактом $\mathcal{M}_\varphi$.*

До $\mathfrak{M}_\varphi$ належать, наприклад, вкладені у $\bar{\mathcal{W}}_\varphi$ підмноговиди з краєм, внутрішність кожного з яких належить $\mathcal{W}_\varphi$, а край належить $\mathcal{W}^{se}_\varphi$ (компактний многовид з краєм не можна ретрагувати на його край). Ще один приклад. Нехай $\mathcal{K}$ — така компактна підмножина деякого евклідового простору вимірності меншої за $n$, що $\mathrm{int}\mathcal{K} \neq \varnothing$ й існує гомеоморфізм $i\colon \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R}^n$ такий, що $i(\mathrm{int}\mathcal{K}) \subset \mathcal{W}_\varphi$, $i(\partial\mathcal{K}) \subset \mathcal{W}^{se}_\varphi$. Тоді $\mathcal{M}_\varphi := i(\mathcal{K}_\varphi) \in \mathfrak{M}_\varphi$ [19].

**Означення 5.** *Скажемо, що множина $\mathcal{W}$ має властивість Важевського, якщо для будь-яких $\varphi \in \mathbb{T}^m$ і $\psi_\varphi(\cdot) \in \mathfrak{P}_\varphi$ знайдеться множина $\mathcal{M}_\varphi \in \mathfrak{M}_\varphi$ така, що $\{0\} \times \dot{\mathcal{M}}_\varphi$ є ретрактом $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$.*

Очевидно, що коли для довільної точки $\varphi \in \mathbb{T}^m$ існує $\mathcal{M}_\varphi \in \mathfrak{M}_\varphi$ така, що $\{\varphi\} \times \dot{\mathcal{M}}_\varphi$ є ретрактом $\mathcal{W}^{se}$, то $\mathcal{W}$ має властивість Важевського.

**Твердження 1.** *Якщо множина $\mathcal{W}$ має властивість Важевського, то вона має властивість $\mathbf{W}$.*

***Доведення.*** Припустимо, що множина $\mathcal{W}$ має властивість Важевського, і $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $\psi_\varphi(\cdot) \in \in \mathfrak{P}_\varphi$ і $\mathcal{M}_\varphi \in \mathfrak{M}_\varphi$ — трійка, про яку йдеться в означенні цієї властивості, і, отже, $\dot{\mathcal{M}}_\varphi$ не є ретрактом $\mathcal{M}_\varphi$. Проте якщо б існувала ізотопія, яка деформує $\{0\} \times \mathcal{M}_\varphi$ у підмножину множини $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$, то суперпозиція кінцевого гомеоморфізму цієї ізотопії з ретракцією $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$ на $\{0\} \times \dot{\mathcal{M}}_\varphi$ утворювала б ретракцію $\{0\} \times \mathcal{M}_\varphi$ на $\{0\} \times \dot{\mathcal{M}}_\varphi$. Отримали суперечність.

Твердження 1 доведено.

**Твердження 2.** *Нехай $i_1\colon \mathcal{W}^{se}_\varphi \mapsto \bar{\mathcal{W}}_\varphi$ та $i_2\colon \mathcal{W}^{se}_\varphi \mapsto \mathcal{B}[\psi_\varphi]$ — природні вкладення. Припустимо, що для кожного $\varphi \in \mathbb{T}^m$ множина $\mathcal{W}^{se}_\varphi$ містить цикл $\mathcal{Z}_\varphi$ вимірності меншої за $n$, такий, що цикл $i_1(\mathcal{Z}_\varphi)$ гомологічний нулю, а цикл $i_2(\mathcal{Z}_\varphi)$ не гомологічний нулю. Тоді $\mathcal{W}$ має властивість $\mathbf{W}$.*

***Доведення.*** За умовою для кожної точки $\varphi \in \mathbb{T}^m$ існує сингулярний ланцюг $\mathcal{M}_\varphi \subset \bar{\mathcal{W}}_\varphi$ такий, що $\partial\mathcal{M}_\varphi = i_1(\mathcal{Z}_\varphi) \subset \mathcal{M}_\varphi \cap \mathcal{W}^{se}_\varphi$. Якщо б існувала ізотопія множини $\{0\} \times \mathcal{M}_\varphi$, яка переводить її у підмножину множини $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$, залишаючи нерухомою множину $\{0\} \times \big(\mathcal{M}_\varphi \cap \mathcal{W}^{se}_\varphi\big)$, то цикл $i_2(\mathcal{Z}_\varphi)$ виявився б межею образу кінцевої деформації множини $\{0\} \times \mathcal{M}_\varphi$. Отримали суперечність.

Твердження 2 доведено.

Зрозуміло, що умови твердження 2 виконуються, якщо для кожного $\varphi$ множина $\mathcal{W}^{se}_\varphi$ містить цикл, природне вкладення якого в $\mathcal{W}_\varphi$ гомологічне нулю, а природне вкладення у $\mathcal{W}^{se}$ не гомологічне нулю.

**Твердження 3.** *Нехай для системи* (11) *існує* V-W-*пара така, що множина* $\mathcal{W}$ *має властивість* **W**. *Покладемо*

$$\nu := \max\{V(\varphi,x) - c^*W(\varphi,x)\colon\ \varphi\in\mathbb{T}^m,\ x\in\mathcal{M}_\varphi,\ V(\varphi,x)\geq 0\}$$

*і припустимо, що*

$$V^* > c^*w^* + \max\{\nu, -c^*w_0\}.$$

*Тоді для кожного ліпшицевого відображення* $u(\cdot)\colon\mathbb{T}^m\mapsto\mathbb{R}^n$, *графік якого належить множині* $V^{-1}\big((-\infty,v^*]\big)$, *і для кожного* $\varphi\in\mathbb{T}^m$ *система* (5) *має розв'язок* $(\phi_t(\varphi),x_t(\varphi))$, *визначений на всій дійсній осі, такий, що* $\phi_0(\varphi)=\varphi$ *і*

$$V(\phi_t(\varphi),x_t(\varphi)) \leq \frac{c_*c^*}{c_*+c^*}[w^0-w_0], \qquad w_* < W(\phi_t(\varphi),x_t(\varphi)) < w^* \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

***Доведення.*** Нехай $u(\cdot)\colon\mathbb{T}^m\mapsto\mathbb{R}^n$ — довільне ліпшицеве відображення, графік якого належить $V^{-1}\big((-\infty,v^*]\big)$. Розглянемо систему $\dot\varphi = a(\varphi,u(\varphi))$. Для кожного $\varphi\in\mathbb{T}^m$ вона має єдиний розв'язок $\phi_t(\varphi)$ такий, що $\phi_0(\varphi)=\varphi$. Очевидно, що відображення $\psi_\varphi(\cdot)$, визначене при при $t\geq 0$ рівністю $\psi_\varphi(t) := \phi_t(\varphi)$, належить множині $\mathfrak{P}_\varphi$. Далі, для довільного $x\in\mathbb{R}^n$ через $\xi_t(\varphi,x)$ позначимо розв'язок системи

$$\dot x = b(\phi_t(\varphi),x) \tag{12}$$

такий, що $\xi_0(\varphi,x)=x$. З огляду на те, що множина $\mathcal{W}$ має властивість **W**, знайдеться точка $x[\varphi]\in\mathcal{M}_\varphi\setminus\mathcal{W}^{se}$ така, що при $t\geq 0$ графік розв'язку $\xi_t(\varphi,x[\varphi])$ належатиме множині $\mathcal{A}[\psi_\varphi]\setminus\mathcal{B}[\psi_\varphi]$ на своєму правому максимальному інтервалі існування $I_+=I_+(\varphi)$, а отже, на цьому інтервалі справджуватимуться нерівності $w_* < W(\phi_t(\varphi),\xi_t(\varphi,x[\varphi])) < w^*$. Дійсно, якщо б це було не так, то для кожного $x\in\mathcal{M}_\varphi$ знайшовся б момент $\tau(\varphi,x)\geq 0$ такий, що $(\tau(\varphi,x),\xi_{\tau(\varphi,x)}(\varphi,x))\in\mathcal{B}[\psi_\varphi]$, і при цьому $\tau(\varphi,x)=0$ лише для $x\in\mathcal{M}_\varphi\cap\mathcal{W}_\varphi^{se}$. Оскільки $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=\tau(\varphi,x)} W(\varphi_t(\varphi),\xi_t(\varphi,x)) > 0$, то $\tau(\varphi,x)$ неперервно залежить від $x$ Однак тоді сім'я відображень

$$\Big\{\mathcal{G}_s\colon\{0\}\times\mathcal{M}_\varphi\mapsto\mathcal{B}[\psi_\varphi]\colon\ (0,x)\mapsto\big(s\tau(\varphi,x),\xi_{s\tau(\varphi,x)}(\varphi,x)\big)\Big\}_{s\in[0,1]}$$

визначає ізотопію, існування якої заперечує властивість **W**.

Покладемо $v(t) := V(\phi_t(\varphi),\xi_t(\varphi,x[\varphi]))$, $w(t) := W(\phi_t(\varphi),\xi_t(\varphi,x[\varphi]))$ і покажемо, що $v(t) < V^*$ при $t\in I_+$. Очевидно, що достатньо розглянути лише випадок, коли існує $t_0 := \inf\{t\colon v(t)>0,\ t\in I_+\}$. Тоді $v(t_0)\geq 0$ і згідно з лемою 2 (п. 5) дістанемо

$$v(t)\leq c^*\omega^* + \max\{v(t_0)-c^*w(t_0), -c^*\omega_0\} < c^*w^* + \max\{\nu,-c^*w_0\} < V^*,\ t\in I_+.$$

Зауважимо, що з останньої нерівності випливає обмеженість $\xi_t(\varphi,x[\varphi])$ на $I_+$, а тому $I_+ = [0;\infty)$.

Тепер покажемо, що для кожного $\varphi\in\mathbb{T}^m$ знайдеться така точка $x_*[\varphi]$, що пара $(\phi_t(\varphi),\xi_t(\varphi,x_*[\varphi]))$ представлятиме розв'язок $(\phi_t(\varphi),x_t(\varphi))$, існування якого потрібно довести. Очевидно, що пара $(\phi_t(\varphi),\xi_t(\varphi,x))$ визначає локальний потік автономної системи (1). Тому

$$(\phi_{t+s}(\varphi), \xi_{t+s}(\varphi, x)) = (\phi_t(\phi_s(\varphi)), \xi_t(\phi_s(\varphi), \xi_s(\varphi, x)))$$

для всіх $t$, $s$ таких, що хоча б одна, права або ліва, частини цієї рівності мають сенс. Для довільного натурального $k$ покладемо тут $s = k$, $\varphi = \phi_{-k}(\varphi)$, $x = x[\phi_{-k}(\varphi)]$. Отримаємо

$$\xi_{t+k}\left(\phi_{-k}(\varphi), x[\phi_{-k}(\varphi)]\right) = \xi_t\left(\varphi, \xi_k\left(\phi_{-k}(\varphi), x[\phi_{-k}(\varphi)]\right)\right).$$

Згідно з доведеним вище ліву частину визначено при всіх $t \geq -k$. Отже, таку ж властивість має й права частина. Для цих значень $t$ має місце включення

$$\left(\phi_t(\varphi), \xi_{t+k}\left(\phi_{-k}(\varphi), x[\phi_{-k}(\varphi)]\right)\right) \in \mathcal{W}.$$

Звідси при $t = 0$ дістанемо $\xi_k\left(\phi_{-k}(\varphi), x[\phi_{-k}(\varphi)]\right) \in \mathcal{W}_\varphi$. За побудовою послідовність

$$\left\{\xi_k\left(\phi_{-k}(\varphi), x[\phi_{-k}(\varphi)]\right)\right\}_{k=1,2,\ldots}$$

обмежена і належить множині $\mathcal{W}_\varphi$. Отже, існує послідовність $\{k_j\}_{j=1,2,\ldots}$ така, що існує границя

$$x_*[\varphi] = \lim_{j\to\infty} \xi_{k_j}\left(\phi_{-k_j}(\varphi), x[\phi_{-k_j}(\varphi)]\right) \in \bar{\mathcal{W}}_\varphi.$$

Для довільного скінченного відрізка $J \in \mathbb{R}$ знайдеться таке досить велике $N$, що послідовність розв'язків $\xi_t\left(\varphi, \xi_k\left(\phi_{-k}(\varphi), x[\phi_{-k}(\varphi)]\right)\right)$ системи (12) рівномірно збігається на $J$ до розв'язку $\xi_t(\varphi, x_*[\varphi])$ цієї системи. На цій підставі, міркуючи від супротивного, легко дійти висновку, що $x_*[\varphi] \in \mathcal{W}_\varphi$ і

$$(\varphi_t(\varphi), \xi_t(\varphi, x_*[\varphi])) \in \mathcal{W} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Отже, $x_t(\varphi) = \xi_t(\varphi, x_*[\varphi])$. Водночас для цього розв'язку виконується нерівність $v(t) < V^*$ при $t \in \mathbb{R}$. Згідно з вибором $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ та означенням 2 всі умови леми 3 виконано, а отже,

$$v(t) \leq \frac{c_* c^*}{c_* + c^*} \liminf_{\varepsilon\to+0} [\bar{\omega}(\varepsilon) - \underline{\omega}(\varepsilon)] \leq \frac{c_* c^*}{c_* + c^*} [w^0 - w_0] \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

звідки випливає справедливість твердження 3.

Наступне твердження стосується достатніх умов єдиності обмеженого розв'язку.

**Твердження 4.** *Покладемо*

$$\Omega^* := \left\{(\varphi, x, y) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{2n} \colon (\varphi, x), (\varphi, y) \in \bar{\mathcal{W}} \cap V^{-1}\big((-\infty, v^*]\big)\right\}.$$

*Припустимо, що існує функція $U(\varphi, x, y) \in \mathrm{C}^1(\Omega^* \mapsto \mathbb{R})$ така, що $U(\varphi, x, x) \equiv 0$ і*

$$\dot{U}(\varphi, x, y, u) := \frac{\partial U(\varphi, x, y)}{\partial \varphi} a(\varphi, u) + \frac{\partial U(\varphi, x, y)}{\partial x} b(\varphi, x) + \frac{\partial U(\varphi, x, y)}{\partial x} b(\varphi, y) > 0$$

*для всіх $(\varphi, x, y) \in \Omega^*$ таких, що $x \neq y$, та всіх $(\varphi, u) \in V^{-1}\big((-\infty, v^*]\big)$. Тоді для довільного ліпшицевого відображення $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, графік якого належить $V^{-1}\big((-\infty, v^*]\big)$, та для довільної точки $\varphi \in \mathbb{T}^m$ система* (5) *має не більше одного розв'язку $(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi))$ такого, що $\phi_0(\varphi) = \varphi$ і*

$$(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi)) \in \bar{\mathcal{W}} \cap V^{-1}\big((-\infty, v^*]\big) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

***Доведення.*** Нехай $U^* = \max_{\Omega^*} |U|$. Зауважимо, що для довільного $\epsilon \in (0, U^*]$ знайдеться $\rho > 0$ таке, що з нерівності $|U(\varphi, x, y)| > \epsilon$ випливає нерівність $\|x - y\| > \rho$. Тоді знайдеться $\sigma > 0$ таке, що $\dot{U}(\varphi, x, y, u) > \sigma$.

Тепер припустимо, що для деякого ліпшицевого відображення $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, графік якого належить $V^{-1}\big((-\infty, v^*]\big)$, та для деякої точки $\varphi \in \mathbb{T}^m$ існує пара різних розв'язків $(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi))$, $(\phi_t(\varphi), y_t(\varphi))$ таких, що $\phi_0(\varphi) = \varphi$ і

$$(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi)), (\phi_t(\varphi), y_t(\varphi)) \in \bar{\mathcal{W}} \cap V^{-1}\big((-\infty, v^*]\big) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що $x_t(\varphi) \neq y_t(\varphi)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Покладемо

$$u(t) := U(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi), y_t(\varphi)).$$

Тоді $\dot{u}(t) = \dot{U}\left(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi), y_t(\varphi), u(\phi_t(\varphi))\right) > 0$. Отже, $u(t)$ строго зростає й існують границі $u_* = \lim_{t \to -\infty} u(t)$ і $u^* = \lim_{t \to \infty} u(t)$. Якщо $u_* \geq 0$, то $u(t) \geq u(0) > 0$ для всіх $t \geq 0$. Тому, як було зауважено вище, знайдеться $\sigma > 0$ таке, що $\dot{u}(t) \geq \sigma$ для всіх $t \geq 0$. Звідси $u(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, що неможливо.

Якщо $u_* < 0$, то існує $t_0$ таке, що $u(t) \leq u(t_0) < 0$ для всіх $t \leq t_0$. Знову знайдеться таке $\sigma > 0$, що $\dot{u}(t) \geq \sigma$ для всіх $t \leq t_0$. Звідси $u(t) \to -\infty$ при $t \to -\infty$. Отримали суперечність.

Твердження 4 доведено.

**4. Доведення основної теореми.** Покажемо, як за допомогою результатів п. 3 можна довести теорему 1. Деталізуємо схему доведення, яку вже було коротко описано в п. 2. Для додатного числа $l$ позначимо через $\mathfrak{U}_l$ простір відображень $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ таких, що $\max_{\varphi \in \mathbb{T}^m} \|u(\varphi)\| \leq \leq \sqrt{z^*}$ і $\|u(\varphi) - u(\psi)\| \leq l\|\varphi - \psi\|$ для всіх $\varphi, \psi \in \mathbb{T}^m$. При виконанні умов теореми знайдемо таке $l$, щоб для кожного $u(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$ система (5) мала інваріантний тор, заданий рівнянням $x = \hat{u}(\varphi)$, де $\hat{u}(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$. Таким чином, виникає відображення компакта $\mathfrak{U}_l \subset \mathrm{C}\left(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ в себе. Довівши неперервність цього відображення і застосувавши теорему Шаудера, встановимо існування нерухомої точки цього відображення, яка й визначатиме інваріантний тор системи (1).

**Твердження 5.** *Нехай $w^* > 0$, $w_* < 0$ — довільні числа. Якщо покласти*

$$\mathcal{M}_\varphi := \{x \in \mathbb{L}_+(\varphi)\colon \ \langle S(\varphi)x, x\rangle \leq w^*\}$$

*і $V^* = \infty$, то множина $\mathcal{W} = \{(\varphi, x) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n\colon w_* < \langle S(\varphi)x, x\rangle < w^*\}$ матиме властивість* **W**.

***Доведення.*** Нехай $\psi_\varphi(\cdot) \in \mathfrak{P}_\varphi$ і $e_k^\pm(\cdot;\varphi) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, $k = 1, \ldots, n_\pm$, — набір відображень такий, що $\left\{e_k^-(t;\varphi)\right\}_{k=1}^{n-}$ — базис в $\mathbb{L}_-(\psi_\varphi(t))$, а $\left\{e_k^+(t;\varphi)\right\}_{k=1}^{n+}$ — базис в $\mathbb{L}_+(\psi_\varphi(t))$ (тут $n_\pm$ — вимірності просторів $\mathbb{L}_\pm(\varphi)$). Позначимо через $R_\pm(t;\varphi) := \pm\left\{r_{ij}^\pm(t;\varphi)\right\}_{i,j=1}^{n\pm}$ додатно визначені матриці з елементами $r_{ij}^\pm(t;\varphi) := \left\langle S(\psi_\varphi(t))e_i^\pm(t;\varphi), e_j^\pm(t;\varphi)\right\rangle$. Відображення $\Xi_\varphi$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-} \times \mathbb{R}^{n+} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, яке кожній точці $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{n_-}, \eta_1, \ldots, \eta_{n_+})$ ставить у відповідність точку $(t, x) = \Xi_\varphi(t, \xi, \eta)$, де

$$x = \sum_{k=1}^{n-} \xi_k e_k^-(t;\varphi) + \left[w^* + \langle R_-(t;\varphi)\xi, \xi\rangle\right] \sqrt{R_+^{-1}(t;\varphi)} \sum_{k=1}^{n+} \eta_k e_k^+(t;\varphi),$$

є дифеоморфізмом. Легко бачити, що коли точка $\eta$ належить одиничній сфері $\mathbb{S}^{n_+-1} := \{\eta \in \mathbb{R}^{n_+} \colon \langle \eta, \eta \rangle = 1\}$, то точка $(t, x) = \Xi_\varphi(t, \xi, \eta)$ задовольняє рівняння $\langle S(\psi_\varphi(t))x, x \rangle = w^*$, тобто належить $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$. Таким чином, звуження дифеоморфізму $\Xi_\varphi$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{S}^{n_+-1}$ визначає структуру прямого добутку на многовиді $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$. При цьому відображення

$$\Xi_\varphi(0, 0, \cdot) \colon \ \mathbb{S}^{n_+-1} \mapsto \mathcal{B}[\psi_\varphi]$$

визначає вкладення, образом якого є еліпсоїд $\{0\} \times \partial\mathcal{M}_\varphi$, не гомологічний нулю в $\mathcal{B}[\psi_\varphi]$. Водночас цикл $\partial\mathcal{M}_\varphi$, природно вкладений у $\mathcal{W}_\varphi^{se} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle S(\varphi)x, x \rangle = w^*\}$, гомологічний нулю в $\bar{\mathcal{W}}_\varphi$.

Твердження 5 доведено.

**Твердження 6.** *Нехай виконуються умови* (**A**)–(**C**). *Тоді в разі потреби при* $\|x\|^2 > z^*$ *відображення* $b(\cdot)$ *можна перевизначити так, щоб*

$$\int_{z_0}^{\infty} \frac{[q(z) - p(z^*)]\, z}{Q(z)} dz = \infty. \tag{13}$$

***Доведення.*** Якщо умова (13) не виконується, то при $\|x\|^2 > z^*$ перевизначимо $b(\cdot)$ за формулою

$$b(\varphi, x) = \frac{\|x\|}{\sqrt{z^*}} b\left(\varphi, \frac{\sqrt{z^*}x}{\|x\|}\right).$$

Тоді для таких $x$ матимемо

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \langle S(\varphi)x, x\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi, u) + \langle S(\varphi)b(\varphi, x), x\rangle =$$

$$= \frac{\|x\|^2}{2z^*}\frac{\partial \left\langle S(\varphi)\sqrt{z^*}\,\|x\|^{-1} x, \sqrt{z^*}\,\|x\|^{-1} x\right\rangle}{\partial\varphi} a(\varphi, u) +$$

$$+ \frac{\|x\|}{\sqrt{z^*}}\left\langle S(\varphi)\frac{\|x\|}{\sqrt{z^*}} b\left(\varphi, \frac{\sqrt{z^*}x}{\|x\|}\right), \ \frac{\sqrt{z^*}x}{\|x\|}\right\rangle \geq$$

$$\geq \beta(\varphi)\left[q(z^*) - p\left(\|u\|^2\right)\right]\|x\|^2,$$

$$|\langle b(\varphi, x), x\rangle| = \left|\frac{\|x\|}{\sqrt{z^*}}\left\langle \frac{\|x\|}{\sqrt{z^*}} b\left(\varphi, \frac{\sqrt{z^*}x}{\|x\|}\right), \ \frac{\sqrt{z^*}x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \beta(\varphi)Q(z^*)\frac{\|x\|^2}{z^*}.$$

Отже, після перевизначення $b(\cdot)$ функції $q(z)$ і $Q(z)$ при $z > z_*$ задовольнятимуть рівності $q(z) = q(z^*)$ та $Q(z) = \dfrac{z}{z^*}Q(z^*)$. Залишилося взяти до уваги, що $q(z^*) > p(z^*)$.

Твердження 6 доведено.

**Твердження 7.** *Нехай виконуються умови* (**A**)–(**C**). *Тоді для кожного ліпшицевого відображення* $u(\cdot) \colon \mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ *такого, що* $\max_{\varphi\in\mathbb{T}^m}\|u(\varphi)\| \leq \sqrt{z^*}$, *і для кожного* $\varphi \in \mathbb{T}^m$ *система* (5) *має розв'язок* $(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi))$, *визначений на всій дійсній осі і такий, що* $\phi_0(\varphi) = \varphi$, $\|x_t(\varphi)\| \leq \sqrt{z^*}$ *і* $\lambda_- z_0 < \langle S(\phi_t(\varphi))x_t(\varphi), x_t(\varphi)\rangle < \lambda_+ z_0$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$. *Розв'язок з такими властивостями єдиний, якщо додатково виконується умова* (**D**).

***Доведення.*** Застосуємо в разі потреби до відображення $b(\cdot)$ твердження 6 і визначимо функції

$$W(\varphi,x) := \langle S(\varphi)x, x\rangle, \qquad V(x) := \int\limits_{z_0}^{\|x\|^2} \frac{[q(s)-p(z^*)]\,s}{Q(s)}\,ds.$$

Тоді

$$|\dot V(\varphi,x,u)| \le 2\beta(\varphi)\left(q(\|x\|^2)-p(z^*)\right)\|x\|^2 \le \dot W(\varphi,x,u)$$

для всіх $(\varphi,x,u)$ таких, що $\varphi\in\mathbb{T}^m$, $\|x\|^2\ge z_0,\ \|u\|^2\le z^*$. Легко бачити, що

$$\max_{(\varphi,x)\in V^{-1}(0)} W(\varphi,x) = \lambda_+ z_0, \qquad \min_{(\varphi,x)\in V^{-1}(0)} W(\varphi,x) = \lambda_- z_0.$$

Отже, якщо покласти $w_0 := \lambda_+ z_0$, $w^0 := \lambda_- z_0$, $w_* = w_0-\varepsilon$, $w^* = w^0+\varepsilon$, $c_* = c^* = 1$, де $\varepsilon>0$ як завгодно мале, і

$$v^* := \int\limits_{z_0}^{z^*} \frac{[q(s)-p(z^*)]s}{Q(s)}ds,$$

а також визначити множину $\mathcal{M}_\varphi$ так, як у твердженні 5, то всі умови твердження 3 будуть виконані. Тому для кожного ліпшицевого відображення $u(\cdot)\colon \mathbb{T}^m\mapsto\mathbb{R}^n$ такого, що $V(u(\varphi))\le v^*$ (тобто $\max_{\varphi\in\mathbb{T}^m}\|u(\varphi)\|\le\sqrt{z^*}$), і для кожного $\varphi\in\mathbb{T}^m$ система (5) матиме розв'язок $\varphi=\phi_t(\varphi)$, $x=x_t(\varphi)$ такий, що $\phi_t(\varphi)=\varphi$, $V\left(x_t(\varphi)\right)\le\dfrac{1}{2}\left(w^0-w_0\right)$ і $\lambda_- z_0-\varepsilon < W(\phi_t(\varphi),x_t(\varphi)) <$ $< \lambda_+ z_0+\varepsilon$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Єдиність розв'язку з такими властивостями при всіх досить малих $\varepsilon>0$ випливає з твердження 4, якщо покласти $U(\varphi,x,y) := \langle S(\varphi)(x-y), x-y\rangle$ . Справді, легко бачити, що умова (**D**) з заміною $\gamma$, наприклад, на $\gamma/2$, виконуватиметься на множині

$$\|u\|^2,\ \|x\|^2,\ \|y\|^2\le z^*, \qquad \lambda_- z_0-\varepsilon\le\langle S(\varphi)x,x\rangle, \qquad \langle S(\varphi)y,y\rangle\le\lambda_+ z_0+\varepsilon$$

при всіх досить малих $\varepsilon>0$. Тепер залишилося спрямувати $\varepsilon$ до нуля.

Твердження 7 доведено.

Наслідком твердження 7 є наступне твердження.

**Твердження 8.** *Нехай виконуються умови* (**A**)–(**D**). *Тоді для кожного ліпшицевого відображення* $u(\cdot)\colon\mathbb{T}^m\mapsto\mathbb{R}^n$ *такого, що* $\max_{\varphi\in\mathbb{T}^m}\|u(\varphi)\|\le\sqrt{z^*}$, *система* (5) *має інваріантний тор, заданий рівнянням* $x=\chi(\varphi;[u(\cdot)]) := x_0(\varphi)$, *де* $x_t(\varphi)$ — $x$*-компонента розв'язку з твердження* 7.

***Доведення.*** Система (5) автономна, а тому $x_{t+0}(\varphi)=x_0(\phi_t(\varphi))$, тобто

$$\chi(\phi_t(\varphi);[u(\cdot)]) := x_t(\varphi) \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Ця рівність означає, що множина, задана рівнянням $x=\chi(\varphi;[u(\cdot)])$, є інваріантною.

Твердження 8 доведено.

Знайдемо умови, при виконанні яких оператор

$$\mathfrak{U}_l \ni u(\cdot)\mapsto\chi(\cdot;[u(\cdot)]) \tag{14}$$

відображає простір $\mathfrak{U}_l$ в себе.

**Твердження 9.** *Нехай справджується нерівність* (3)*. Тоді існує таке* $l > 0$*, що оператор* $\chi$*, визначений у* (14)*, відображає* $\mathfrak{U}_l$ *в себе.*

***Доведення.*** Введемо позначення $\Delta x_t := x_t(\varphi) - x_t(\psi)$, $\Delta\phi_t := \phi_t(\varphi) - \phi_t(\psi)$, де $(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi))$ — розв'язок з твердження 7, $\varphi, \psi \in \mathbb{T}^m$ — довільні точки. Очевидно, що $\Delta\phi_t \neq 0$, якщо $\varphi \neq \psi$. Відтак маємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|} = \frac{b(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi)) - b(\phi_t(\psi), x_t(\psi))}{\|\Delta\phi_t\|} -$$

$$-\frac{\langle \Delta\phi_t, a\left(\phi_t(\varphi), u\left(\phi_t(\varphi)\right)\right) - a\left(\phi_t(\psi), u\left(\phi_t(\psi)\right)\right)\rangle}{\|\Delta\phi_t\|^3}\Delta x_t =$$

$$= \frac{b(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi)) - b(\phi_t(\varphi), x_t(\psi))}{\|\Delta\phi_t\|} + \frac{b(\phi_t(\varphi), x_t(\psi)) - b(\phi_t(\psi), x_t(\psi))}{\|\Delta\phi_t\|} -$$

$$-\frac{\langle \Delta\phi_t, a\left(\phi_t(\varphi), u\left(\phi_t(\varphi)\right)\right) - a\left(\phi_t(\psi), u\left(\phi_t(\psi)\right)\right)\rangle}{\|\Delta\phi_t\|^2}\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}.$$

Обчислимо і оцінимо знизу похідну функції $w(t) := \left\langle S\left(\phi_t(\varphi)\right)\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle$:

$$\dot{w}(t) = \left\langle S'_\varphi\left(\phi_t(\varphi)\right) a\left(\phi_t(\varphi), u\left(\phi_t(\varphi)\right)\right)\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle +$$

$$+2\left\langle S\left(\phi_t(\varphi)\right)\frac{d}{dt}\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle =$$

$$= \left\langle S'_\varphi\left(\phi_t(\varphi)\right) a\left(\phi_t(\varphi), u\left(\phi_t(\varphi)\right)\right)\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle +$$

$$+2\left\langle S\left(\phi_t(\varphi)\right)\frac{b(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi)) - b(\phi_t(\varphi), x_t(\psi))}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle +$$

$$+2\left\langle S\left(\phi_t(\varphi)\right)\frac{b(\phi_t(\varphi), x_t(\psi)) - b(\phi_t(\psi), x_t(\psi))}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle -$$

$$-2\left\langle S\left(\phi_t(\varphi)\right)\frac{\langle \Delta\phi_t, a\left(\phi_t(\varphi), u\left(\phi_t(\varphi)\right)\right) - a\left(\phi_t(\psi), u\left(\phi_t(\psi)\right)\right)\rangle}{\|\Delta\phi_t\|^2}\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle \geq$$

$$\geq 2\gamma\frac{\|\Delta x_t\|^2}{\|\Delta\phi_t\|^2} - 2\lambda_+\left(l_a + lL_a\right)\frac{\|\Delta x_t\|^2}{\|\Delta\phi_t\|^2} - 2l_b\frac{\|\Delta x_t\|}{\|\Delta\phi_t\|}.$$

Далі, обчислимо похідну функції $z(t) := \dfrac{\|\Delta x_t\|^2}{\|\Delta\phi_t\|^2}$:

$$\dot{z}(t) = 2\left\langle \frac{d}{dt}\frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle \frac{b(\phi_t(\varphi), x_t(\varphi)) - b(\phi_t(\psi), x_t(\psi))}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|} \right\rangle -$$

$$-2\left\langle \frac{\langle \Delta\phi_t, a\left(\phi_t(\varphi), u\left(\phi_t(\varphi)\right)\right) - a\left(\phi_t(\psi), u\left(\phi_t(\psi)\right)\right)\rangle}{\|\Delta\phi_t\|^2} \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|}, \frac{\Delta x_t}{\|\Delta\phi_t\|} \right\rangle .$$

Тоді

$$|\dot{z}(t)| \leq 2\left(L_b + l_a + lL_a\right) \frac{\|\Delta x_t\|^2}{\|\Delta\phi_t\|^2} + 2l_b \frac{\|\Delta x_t\|}{\|\Delta\phi_t\|}.$$

Поклавши

$$g(z) = 2\left[\left(\gamma - \lambda_+\left(l_a + lL_a\right)\right)z - l_b\sqrt{z}\,\right], \qquad h(z) = 2\left[\left(L_b + l_a + lL_a\right)z + l_b\sqrt{z}\,\right]$$

і застосувавши лему 4, отримаємо

$$\int\limits_{\zeta_0(l)}^{z(t)} \frac{\left(\gamma - \lambda_+\left[l_a + lL_a\right]\right)z - l_b\sqrt{z}}{\left(L_b + l_a + lL_a\right)z + l_b\sqrt{z}} dz \leq \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}\zeta_0(l),$$

де $\zeta_0(l) = \left(\dfrac{l_b}{\gamma - \lambda_+\left[l_a + lL_a\right]}\right)^2$.

Тепер нам потрібно показати, що $l$ можна вибрати так, щоб функція $z(t)$ задовольняла умову $z(t) \leq l^2$ для всіх дійсних $t$. А для цього достатньо, щоб знайшлося таке $l$, яке б задовольняло нерівність

$$\left(\frac{\gamma - \lambda_+\left[l_a + lL_a\right]}{l_b}\right)^2 \int\limits_{\zeta_0(l)}^{l^2} \frac{\left(\gamma - \lambda_+\left[l_a + lL_a\right]\right)\sqrt{z} - l_b}{\left(L_b + l_a + lL_a\right)\sqrt{z} + l_b} dz \geq \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2},$$

еквівалентну (3). Зрозуміло, що для існування такого $l$ достатньо, щоб права частина цієї нерівності не перевищувала максимуму лівої частини, взятого по множині тих значень $l$, які задовольняють нерівність $l > \sqrt{\zeta_0(l)}$, тобто по відрізку $[l_-, l_+]$, де $l_-, l_+$ — відповідно менший і більший корені рівняння $l = \sqrt{\zeta_0(l)}$, еквівалентного $A(l) = 1$.

Твердження 9 доведено.

**Твердження 10.** *Оператор* $\chi$, *визначений у* (14), *неперервний у просторі* $\mathrm{C}(\mathbb{T}^m \mapsto \mathbb{R}^n)$, *наділеному стандартною нормою* $\max_{\mathbb{T}^m} \|\cdot\|$.

***Доведення.*** Нехай $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathfrak{U}_l$ і $\max_{\varphi\in\mathbb{T}^m} \|u_1(\varphi) - u_2(\varphi)\| < \varepsilon$. Нехай $(\phi_{i,t}(\varphi), x_{i,t}(\varphi))$ — розв'язок системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, u_i(\varphi)), \qquad \dot{x} = b(\varphi, x),$$

існування якого гарантує твердження 3. Введемо позначення $\delta\phi_t = \phi_{1,t}(\varphi) - \phi_{2,t}(\varphi)$, $\delta x_t = x_{1,t}(\varphi) - x_{2,t}(\varphi)$. Маємо

$$\left|\frac{d}{dt}\|\delta x_t\|^2\right| = 2\left|\left\langle b\left(\phi_{1,t}(\varphi), x_{1,t}(\varphi)\right) - b\left(\phi_{2,t}(\varphi), x_{2,t}(\varphi)\right), \delta x_t\right\rangle\right| \leq$$

$$\leq 2L_b \left\|\delta x_t\right\|^2 + 2l_b \left\|\delta\phi_t\right\| \left\|\delta x_t\right\|$$

і

$$\left|\frac{d}{dt}\left\|\delta\phi_t\right\|^2\right| = 2\left|\left\langle a\left(\phi_{1,t}(\varphi), u_1(\phi_{1,t}(\varphi))\right) - a\left(\phi_{2,t}(\varphi), u_2(\phi_{2,t}(\varphi))\right), \delta\phi_t\right\rangle\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\left\langle a\left(\phi_{1,t}(\varphi), u_1(\phi_{1,t}(\varphi))\right) - a\left(\phi_{2,t}(\varphi), u_1(\phi_{1,t}(\varphi))\right), \delta\phi_t\right\rangle\right| +$$

$$+2\left|\left\langle a\left(\phi_{2,t}(\varphi), u_1(\phi_{1,t}(\varphi))\right) - a\left(\phi_{2,t}(\varphi), u_2(\phi_{1,t}(\varphi))\right), \delta\phi_t\right\rangle\right| +$$

$$+2\left|\left\langle a\left(\phi_{2,t}(\varphi), u_2(\phi_{1,t}(\varphi))\right) - a\left(\phi_{2,t}(\varphi), u_2(\phi_{2,t}(\varphi))\right), \delta\phi_t\right\rangle\right| \leq$$

$$\leq 2\left(l_a + L_a l\right)\left\|\delta\phi_t\right\|^2 + 2L_a\varepsilon\left\|\delta\phi_t\right\|.$$

Тоді

$$\left|\frac{d}{dt}\frac{\left\|\delta x_t\right\|^2}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon}\right| = \left|\frac{\frac{d}{dt}\left\|\delta x_t\right\|^2}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} - \frac{\left\|\delta x_t\right\|^2 \frac{d}{dt}\left\|\delta\phi_t\right\|^2}{\left[\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon\right]^2}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2L_b\left\|\delta x_t\right\|^2 + 2l_b\left\|\delta\phi_t\right\|\left\|\delta x_t\right\|}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} + \frac{\left\|\delta x_t\right\|^2\left(2\left(l_a+L_a l\right)\left\|\delta\phi_t\right\|^2 + 2L_a\varepsilon\left\|\delta\phi_t\right\|\right)}{\left[\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon\right]^2} \leq$$

$$\leq \left[2(L_b + l_a + L_a l) + L_a\sqrt{\varepsilon}\right]\frac{\left\|\delta x_t\right\|^2}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} + 2l_b\frac{\left\|\delta x_t\right\|}{\sqrt{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon}}$$

і

$$\frac{d}{dt}\frac{\left\langle S(\phi_{1,t}(\varphi))\delta x_t, \delta x_t\right\rangle}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} = \frac{\left\langle S'_\varphi(\phi_{1,t}(\varphi))a\left(\phi_{1,t}(\varphi), u_1(\phi_{1,t}(\varphi))\right)\delta x_t, \delta x_t\right\rangle}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} +$$

$$+\frac{2\left\langle S(\phi_{1,t}(\varphi))\left[b\left(\phi_{1,t}(\varphi), x_{1,t}(\varphi)\right) - b\left(\phi_{2,t}(\varphi), x_{2,t}(\varphi)\right)\right], \delta x_t\right\rangle}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} -$$

$$-\frac{\left\langle S(\phi_{1,t}(\varphi))\delta x_t, \delta x_t\right\rangle}{\left[\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon\right]^2}\frac{d\left\|\delta\phi_t\right\|^2}{dt} =$$

$$= \frac{\left\langle S'_\varphi(\phi_{1,t}(\varphi))\delta x_t, \delta x_t\right\rangle}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} +$$

$$+\frac{2\left\langle S(\phi_{1,t}(\varphi))\left[b\left(\phi_{1,t}(\varphi), x_{1,t}(\varphi)\right) - b\left(\phi_{1,t}(\varphi), x_{2,t}(\varphi)\right)\right], \delta x_t\right\rangle}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} +$$

$$+\frac{2\left\langle S(\phi_{1,t}(\varphi))\left[b\left(\phi_{1,t}(\varphi), x_{2,t}(\varphi)\right) - b\left(\phi_{2,t}(\varphi), x_{2,t}(\varphi)\right)\right], \delta x_t\right\rangle}{\left\|\delta\phi_t\right\|^2+\varepsilon} -$$

$$-\frac{\langle S(\phi_{1,t}(\varphi))\delta x_t, \delta x_t\rangle}{\left[\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon\right]^2}\frac{d\,\|\delta\phi_t\|^2}{dt} \geq$$

$$\geq 2\gamma\frac{\|\delta x_t\|^2}{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon} - 2l_b\frac{\|\delta x_t\|}{\sqrt{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon}} - \lambda^+\frac{\|\delta x_t\|^2}{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon}\frac{2\left(l_a+L_a l\right)\|\delta\phi_t\|^2+2L_a\varepsilon\,\|\delta\phi_t\|}{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon} \geq$$

$$\geq \left(2\left[\gamma-\lambda^+(l_a+L_a l)\right]-L_a\sqrt{\varepsilon}\right)\frac{\|\delta x_t\|^2}{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon} - 2l_b\frac{\|\delta x_t\|}{\sqrt{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon}}.$$

Покладемо

$$z(t)=\frac{\|\delta x_t\|^2}{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon}, \qquad w(t)=\frac{\langle S(\phi_{1,t}(\varphi))\delta x_t, \delta x_t\rangle}{\|\delta\phi_t\|^2+\varepsilon},$$

$$g(z)=\left(2\left[\gamma-\lambda^+(l_a+L_a l)\right]-L_a\sqrt{\varepsilon}\right)z-2l_b\sqrt{z},$$

$$h(z)=\left(2(L_b+l_a+L_a l)+L_a\sqrt{\varepsilon}\right)z+2l_b\sqrt{z}.$$

Тоді за лемою 4 за умови достатньої мализни $\varepsilon$ матимемо

$$\int\limits_{z_0(\varepsilon)}^{z(t)}\frac{\left(\left[\gamma-\lambda^+(l_a+L_a l)\right]-\sqrt{\varepsilon}L_a/2\right)\sqrt{z}-l_b}{\left((L_b+l_a+L_a l)+\sqrt{\varepsilon}L_a/2\right)\sqrt{z}+l_b}dz \leq \frac{(\lambda^+-\lambda_-)z_0(\varepsilon)}{2}, \tag{15}$$

де $z_0(\varepsilon) = \dfrac{l_b^2}{\left(\left[\gamma-\lambda^+(l_a+L_a l)\right]-\sqrt{\varepsilon}L_a/2\right)^2}$. Звідси випливає, що знайдуться $\varepsilon_0 > 0$ і стала $K(\varepsilon_0)$ такі, що $z(t) \leq K(\varepsilon_0)$, зокрема $z(0) \leq K(\varepsilon_0)$ при всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Отже,

$$\|\chi(\varphi;[u_1(\cdot)]) - \chi(\varphi;[u_2(\cdot)])\|^2 = \|\delta x_0\|^2 \leq K\left(\|\delta\phi_0\|^2+\varepsilon\right) = K\varepsilon \quad \forall\varphi\in\mathbb{T}^m.$$

***Зауваження* 2.** Порівнявши умову (15) з (3), легко зробити висновок, що $K(\varepsilon_0)$ можна вибрати так, щоб $K(\varepsilon_0)\to l$ при $\varepsilon_0\to 0$. Тому якщо $l<1$, то оператор $\chi$ буде стискати. Відтак, існування його нерухомої точки випливатиме з принципу Банаха.

**5. Допоміжні леми.**

**Лема 2.** *Покладемо* $I_+ := [t_0, T)$. *Нехай* $v(\cdot)\in \mathrm{C}^1(I_+\mapsto\mathbb{R})$ *та* $w(\cdot)\in \mathrm{C}^1(I_+\mapsto\mathbb{R})$ — *такі функції, що* $v(t_0)\geq 0$, $v^{-1}((0,\infty))\neq\varnothing$, $\omega^* := \sup_{t\in I_+\cap v^{-1}((0,\infty))} w(t) < \infty$ *і*

$$\dot v(t) \leq c^*\dot w(t) \quad \forall t\in v^{-1}((0,\infty)),$$

*де* $c^*>0$ — *деяка стала. Тоді*

$$v(t) \leq c^*\omega^* + \max\left\{v(t_0)-c^*w(t_0), -c^*\omega_0\right\} \quad \forall t\in I_+,$$

*де* $\omega_0 := \inf_{t\in v^{-1}(0)} w(t)$, *якщо* $v^{-1}(0)\neq\varnothing$, *і* $\omega_0 := \infty$, *якщо* $v^{-1}(0)=\varnothing$.

***Доведення.*** Множину $v^{-1}((0,\infty)) \setminus \{t_0\}$ можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зліченної множини інтервалів, які не перетинаються. Нехай $J$ — один із таких інтервалів. Покладемо $t_1 := \inf J$. Якщо $t_1 > t_0$, то $v(t_1) = 0$, $w(t_1) \geq \omega_0$, і, отже,

$$0 < v(t) \leq c^*(w(t) - w(t_1)) \leq c^*(\omega^* - \omega_0) \quad \forall t \in J.$$

Така сама оцінка має місце й тоді, коли $t_1 = t_0$ і при цьому $v(t_0) = 0$. Якщо ж $v(t_0) > 0$, то залишається додатково оцінити $v(t)$ на відрізку $[t_0, t_2]$, де

$$t_2 := \sup\{\tau \in (t_0, T)\colon\ v(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0, \tau)\}.$$

Очевидно, що

$$v(t) \leq c^*\omega^* - c^*w(t_0) + v(t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_2].$$

Лему 2 доведено.

**Лема 3.** *Нехай $v(\cdot) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ та $w(\cdot) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ — функції, які задовольняють такі умови*: a) *функція $w(\cdot)$ обмежена на $\mathbb{R}$*; b) *множина $v^{-1}((0,\infty))$ непорожня і на цій множині $-c_*\dot{w}(t) \leq \dot{v}(t) \leq c^*\dot{w}(t)$, де $c_* > 0$ та $c_* \geq 0$ — деякі сталі*; c) *якщо для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ множина $v^{-1}((\varepsilon,\infty))$ необмежена, то $\inf_{t \in v^{-1}((\varepsilon,\infty))} \dot{w}(t) > 0$.*

*Тоді для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ множина $v^{-1}(\varepsilon)$ непорожня і функція $v(\cdot)$ задовольняє нерівність*

$$v(t) \leq \frac{c_* c^*}{c_* + c^*} \liminf_{\varepsilon \to +0} [\bar{\omega}(\varepsilon) - \underline{\omega}(\varepsilon)] \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

*де* $\underline{\omega}(\varepsilon) = \inf_{t \in v^{-1}(\varepsilon)} w(t)$, $\bar{\omega}(\varepsilon) = \sup_{t \in v^{-1}(\varepsilon)} w(t)$.

***Доведення.*** Покладемо $\omega^* = \sup_{t \in \mathbb{R}} w(t)$, $\omega_* = \inf_{t \in \mathbb{R}} w(t)$. Оскільки множина $v^{-1}((0,\infty))$ непорожня, то для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ множина $v^{-1}((\varepsilon,\infty))$ теж непорожня. Якщо ця множина обмежена, то для кожного $t_0$ такого, що $v(t_0) > \varepsilon$, знайдуться числа $t_- < t_0$, $t_+ > t_0$ такі, що $v(t_\pm) = \varepsilon$ і $v(t) > \varepsilon$ на інтервалі $(t_-, t_+)$. Нехай $\hat{t} \in \arg\max_{t \in [t_-, t_+]} v(t)$. Тоді

$$w(t_+) - w(t_-) = \int\limits_{t_-}^{\hat{t}} \dot{w}(t)\,dt + \int\limits_{\hat{t}}^{t_+} \dot{w}(t)\,dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{c^*} \int\limits_{t_-}^{\hat{t}} \dot{v}(t)\,dt - \frac{1}{c_*} \int\limits_{\hat{t}}^{t_+} \dot{v}(t)\,dt = \frac{c_* + c^*}{c_* c^*} \left[v(\hat{t}) - \varepsilon\right].$$

Звідси випливає нерівність

$$v(t) \leq \frac{c_* c^*}{c_* + c^*} [\bar{\omega}(\varepsilon) - \underline{\omega}(\varepsilon)] + \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Нехай тепер множина $v^{-1}((\varepsilon,\infty))$ необмежена. Тоді для довільного $t_0 \in \mathbb{R}$ такого, що $v(t_0) > \varepsilon$, знову знайдуться числа $t_- < t_0$, $t_+ > t_0$ такі, що $v(t_\pm) = \varepsilon$ і $v(t) > \varepsilon$ на інтервалі $(t_-, t_+)$. Справді, міркуючи від супротивного, припустимо, наприклад, що $v(t) > \varepsilon$ для всіх $t > t_0$. Тоді за умовою знайдеться таке $\kappa(\varepsilon) > 0$, що $\dot{w}(t) \geq \kappa(\varepsilon)$ для всіх $t \geq t_0$, а отже,

$$\kappa(\varepsilon)(t-t_0) \leq \int\limits_{t_0}^{t} \dot{w}(s)ds \leq \omega^* - \omega_* < \infty \quad \forall t \geq t_0,$$

що неможливо. Таким чином, числа $t_-, t^+$ існують. Залишається повторити наведені вище міркування, результатом яких є оцінка (16). Вибравши послідовність $\{\varepsilon_k\}$, яка реалізує $\liminf_{\varepsilon\to+0}[\bar{\omega}(\varepsilon) - \underline{\omega}(\varepsilon)]$, отримаємо потрібну оцінку для функції $v(\cdot)$.

Лему 3 доведено.

**Лема 4.** *Нехай для функцій $g(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R})$ та $h(\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R})$ існує $z_0 > 0$ таке, що $g(z) > 0$ при $z > z_0$ і $h(z) > 0$ при $z \geq z_0$, а функції $z(\cdot) \in \mathrm{C}^1(I \mapsto \mathbb{R}_+)$ та $w(\cdot) \in \mathrm{C}^1(I \mapsto \mathbb{R})$ для всіх $t \in z^{-1}\big((z_0, \infty)\big)$ задовольняють нерівності*

$$\dot{w}(t) \geq \alpha(t) g \circ z(t), \qquad -c_*\alpha(t) h \circ z(t) \leq \dot{z}(t) \leq c^*\alpha(t) h \circ z(t)$$

*з деякою функцією $\alpha(\cdot) \in \mathrm{C}(I \mapsto \mathbb{R}_+)$ такою, що $\inf_{t\in I}\alpha(t) > 0$, та деякими сталими $c_* \geq 0$, $c^* > 0$; при цьому множина $z^{-1}\big((z_0, \infty)\big)$ припускається непорожньою, а функція $w(t)$ — обмеженою зверху, якщо $I = I_+$, і обмеженою на $\mathbb{R}$, якщо $I = \mathbb{R}$. Тоді функції $v(\cdot) := \int_{z_0}^{z(\cdot)} \dfrac{g(s)}{h(s)}\, ds$ та $w(\cdot)$ задовольняють умови леми 2, якщо $I = I_+$, і леми 3, якщо $I = \mathbb{R}$. Крім того, якщо знайдуться функції $\underline{f}(\cdot) \in \mathrm{C}\,(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ та $\bar{f}(\cdot) \in \mathrm{C}\,(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ такі, що $\underline{f} \circ z(t) \leq w(t) \leq \bar{f} \circ z(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, то*

$$v(t) \leq \frac{c_* c^*}{c_* + c^*}\left[\bar{f}(z_0) - \underline{f}(z_0)\right].$$

***Доведення.*** Насамперед зауважимо, що для всіх $t \in z^{-1}\big((z_0, \infty)\big)$ справджуються нерівності

$$-c_*\dot{w}(t) \leq -c_*\alpha(t) g \circ z(t) \leq \dot{v}(t) = \frac{\dot{z}(t) g \circ z(t)}{h \circ z(t)} \leq c^*\alpha(t) g \circ z(t) \leq c^*\dot{w}(t).$$

Далі, для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує єдине $z(\varepsilon) > z_0$ таке, що $\displaystyle\int_{z_0}^{z(\varepsilon)} \frac{g(s)}{h(s)}\, ds = \varepsilon$, до того ж $z(\varepsilon) \to z_0$ при $\varepsilon \to 0$. Отже, для всіх досить малих $\varepsilon > 0$ множина $z^{-1}(z(\varepsilon))$ непорожня і збігається з $v^{-1}(\varepsilon)$. Тому $\underline{\omega}(\varepsilon) \geq \underline{f}(z(\varepsilon))$ і $\bar{\omega}(\varepsilon) \leq \bar{f}(z(\varepsilon))$. Залишилося скористатися лемою 3.

Лему 4 доведено.

**6. Висновки.** У цій роботі отримано нові нелокальні достатні умови існування ліпшицевих інваріантних торів для істотно нелінійних динамічних систем з фазовим простором $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, які характеризуються властивостями індефінітної коерцитивності та індефінітної монотонності. Використаний при цьому підхід ґрунтується на поєднанні топологічного принципу Важевського та принципу Шаудера існування нерухомої точки у компактного оператора, визначеного на опуклій множині $\mathbb{R}^n$-значних ліпшицевих відображень тора $\mathbb{T}^m$. Для ефективного застосування першого з названих принципів при конструюванні зазначеного оператора було використано пару узгоджених між собою допоміжних функцій — напрямну функцію $W$ та оцінювальну функцію $V$ (V-W-пару). За певних умов на топологію поверхонь рівня напрямної функції вдалося використати V-W-пару для доведення існування і локалізації в просторі інваріантних перерізів нелінійних розширень динамічних систем на торі вигляду (5), породжених вихідною динамічною системою шляхом звуження її торичної компоненти на графіки ліпшицевих відображень $u(\cdot)$. Позитивною рисою запропонованого підходу є той факт, що отримані достатні умови існування інваріантних торів мають аналітичний, коефіцієнтний характер і в кожному конкретному випадку допускають ефективну перевірку.


1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219 – 1240.
2. *Samoilenko A. M.* Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 332 p.
3. *Samoilenko A. M.* Perturbation theory of smooth invariant tori of dynamical systems // Nonlinear Anal. – 1997. – **30**, № 5. – P. 3121 – 3133.
4. *Sacker R. J.* A perturbation theorem for invariant manifolds and Holder continuity // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**, № 8. – P. 705 – 761.
5. *Fenishel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds and flows // Indiana Univ. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 193 – 226.
6. *Osipenko A.* Perturbation of invariant manifolds of ordinary differential equations // Six Lectures Dynam. Systems. – Singapore: World Sci., 1996. – P. 213 – 265.
7. *Перестюк М. О, Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 4. – С. 520 – 529.
8. *Перестюк М. О., Фекета П. В.* Про існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С. 106 – 112.
9. *Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю.* Оператор Гріна – Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 948 – 957.
10. *Голец В. Л.* К вопросу возмущения устойчивого инвариантного тора динамической системы // Укр. мат. журн. – 1971. – **23,** № 1. – С. 130 – 137.
11. *Волков Д. Ю., Ильин Ю. А.* О существовании инвариантного тора у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. – 1992. – Вып. 4, № 22. – С. 27 – 31.
12. *Митропольский Ю. А, Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 271 с.
13. *Чересиз В. М.* V-монотонные системи и почти-периодические решения // Сиб. мат. журн. – 1972. — **13**, № 4. – С. 921 – 932.
14. *Чересиз В. М.* Устойчивые и условно устойчивые почти-периодические решения V-монотонных систем // Сиб. мат. журн. – 1974. – **15**, № 1. – С. 162 – 176.
15. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск, 1986. – 200 с.
16. *Парасюк І. О., Романченко І. А.* Обґрунтування методу Гальоркіна для індефінітно монотонних квазіперіодичних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2002. – Вип. 7. – С. 37 – 41.
17. *Ivanov O. A.* Wazewski's topological principle and existence of bounded solutions of quasihomogeneous systems // Vestn. Leningr. Univ., Mat. Mekh. Astron. – 1985. – № 1. – P. 109 – 110.
18. *Lagoda V., Parasyuk I.* Existence of V-bounded solutions for nonautonomous nonlinear systems via the Wazewski topological principle // arXiv:0911.4643v2 [math.CA]. – 2009. – 33 p.
19. *Dugundji J.* Topology. – Boston: Allyn and Bacon, 1965.


Одержано 07.06.11