УДК 517.956

С. А. Алдашев (Ин-т прикл. математики и информатики Актюбин. гос. ун-та, Казахстан)

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

We prove the unique solvability of the Dirichlet and Poincaré problems for a multidimensional Gellerstedt equation in a cylindric domain. We also obtain a criterion for the unique solvability of these problems.

Показано, що задачі Діріхле і Пуанкаре в циліндричній області для багатовимірного рівняння Геллерстедта однозначно розв'язні. Отримано критерій єдиності розв'язків цих задач.

В [1] было показано, что на плоскости одна из фундаментальных задач математической физики — изучение поведения колеблющейся струны — некорректна, если краевые условия заданы на всей границе области. Как отмечено в [2, 3], задача Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В [4] показано, что решение задачи Дирихле существует в прямоугольных областях. В дальнейшем эта задача исследовалась методами функционального анализа [5], которые сложны в применении к приложениям.

В [6, 7] получены теоремы единственности решения задачи Дирихле для строго гиперболических уравнений в пространствах, а в [8, 9] доказана корректность задач Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения.

Насколько известно автору, многомерные задачи Дирихле и Пуанкаре для вырождающихся гиперболических уравнений ранее не изучались.

В настоящей работе показано, что задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта однозначно разрешимы, а также получен критерий единственности решений этих задач.

Пусть D_β — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t)\colon |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β и S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим многомерное уравнение Геллерстедта

$$t^p \Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где $p = \mathrm{const} > 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_1 < \pi$, $i = 2, \ldots, m-1$.

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C(\bar{D_\beta}) \cap C^1(D_\beta \cup S_0) \cap$ $\cap\, C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\beta} = \varphi(r, \theta), \qquad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta), \qquad u|_{S_0} = \tau(r, \theta), \tag{2}$$

или

$$u|_{S_\beta} = \varphi(r, \theta), \qquad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta), \qquad u_t|_{S_0} = \tau(r, \theta). \tag{3}$$

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq$ $\leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W^l_2(S_0)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [10].

Лемма 1. *Пусть* $f(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$. *Если* $l \geq m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f^1_0(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f^k_n(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1,\, c_2 = \text{const}.$$

Через $\bar{\varphi}^k_n(r)$, $\overline{\psi}^k_n(t)$, $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\tau(r,\theta), \nu(r,\theta)$ соответственно.

Пусть $\varphi(r,\theta) \in W^l_2(S_\beta)$, $\psi(t,\theta) \in W^l_2(\Gamma_\beta)$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$, $l > \dfrac{3m}{2}$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если*

$$\cos\mu_{s,n}\beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $\mu_{s,n}$ — *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+(m-2)/2}(z)$, $\beta' = \dfrac{2}{2+p}\beta^{(2+p)/2}$, *то задача* 1 *однозначно разрешима.*

Теорема 2. *Решение задачи* 1 *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (5).

Доказательство теорем. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$t^p\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \qquad g_j = (\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [10], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Поскольку искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\bar{D_\beta}) \cap C^2(D_\beta)$, его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [10], имеем

$$t^p\left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right) - \bar{u}_{ntt}^k = 0, \qquad k=\overline{1,\,k_n}, \quad n=0,1,\ldots, \tag{8}$$

при этом краевые условия (2) и (3), с учетом леммы 1, соответственно примут вид

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \qquad \bar{u}_n^k(1,t) = \bar{\psi}_n^k(t), \qquad \bar{u}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \qquad k=\overline{1,\,k_n}, \quad n=0,1,\ldots, \tag{9}$$

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \qquad \bar{u}_n^k(1,t) = \bar{\psi}_n^k(t), \qquad \bar{u}_{nt}^k(r,0) = \bar{\nu}_n^k(r), \quad k=\overline{1,\,k_n}, \quad n=0,1,\ldots. \tag{10}$$

Производя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и полагая затем $r=r$, $x_0 = \dfrac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$, задачи (8), (9) и (8), (10) приводим к следующим задачам:

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^k \equiv \upsilon_{\alpha,nrr}^k - \upsilon_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0}\upsilon_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\upsilon_{\alpha,n}^k = 0, \tag{11_α}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,\beta') = \varphi_n^k(r), \qquad \upsilon_{\alpha,n}^k(1,x_0) = \psi_n^k(x_0), \qquad \upsilon_{\alpha,n}^k(r,0) = \tau_n^k(r), \tag{12}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,\beta') = \varphi_n^k(r), \qquad \upsilon_{\alpha,n}^k(1,x_0) = \psi_n^k(x_0), \qquad \lim_{x_0\to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{\alpha,n}^k = \nu_n^k(r), \tag{13}$$

где

$$0 < \alpha = \frac{p}{2+p} < 1, \qquad \bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4},$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0) = u_n^k\left[r, \left(\frac{2+p}{2}x_0\right)^{\frac{2}{2+p}}\right], \qquad \varphi_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\bar{\varphi}_n^k(r), \quad \psi_n^k(x_0) = \bar{\psi}_n^k\left[\left(\frac{2+p}{2}x_0\right)^{\frac{2}{2+p}}\right],$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\bar{\tau}_n^k(r), \qquad \nu_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\bar{\nu}_n^k(r), \quad k=\overline{1,\,k_n}, \quad n=0,1,\ldots.$$

Наряду с уравнением (11_α) рассмотрим уравнение

$$L_0 \upsilon_{0,n}^k \equiv \upsilon_{0,nrr}^k - \upsilon_{0,nx_0x_0}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\upsilon_{0,n}^k = 0. \tag{11_0}$$

Как доказано в [11] (см. также [12]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (11_α) и (11_0).

Утверждение 1. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (11_0), удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=\tau_n^k(r), \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{14}$$

то функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)=\gamma_\alpha\int_0^1 \upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\alpha/2-1}d\xi \equiv 2^{-1}\gamma_\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0x_0^2}^{-\alpha/2}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{15}$$

при $\alpha>0$ является решением уравнения (11_α) с данными (14).

Утверждение 2. *Если $\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (11_0), удовлетворяющее условиям*

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=\frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{16}$$

то при $0<\alpha<1$ функция

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)=\gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\alpha/2}d\xi\right]\equiv$$

$$\equiv\gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\alpha/2-1}\left[\frac{\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{17}$$

является решением уравнения (11_α) с начальными данными

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0, \qquad \lim_{x_0\to 0}x_0^\alpha\frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}=\nu_n^k(r), \tag{18}$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha=2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ — *гамма-функция,* D_{0t}^α — *оператор Римана–Лиувилля* [13], *а* $q\geq 0$ — *наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2-\alpha+2q\geq m-1$.

Решение задачи (11_α), (12) будем искать в виде

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k}(r,x_0)=\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)+\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0), \tag{19}$$

где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (11_α), (14), а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение краевой задачи для уравнения (11_α) с данными

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta')=\varphi_n^k(r)-\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta'), \qquad \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0)=\psi_n^k(x_0)-\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0), \qquad \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,0)=0. \tag{20}$$

Учитывая формулы (15), (17), а также обратимость оператора D_{0t}^α [13], задачи (11_α), (14) и (11_α), (20) соответственно сводим к задаче Коши (11_0), (14), имеющей единственное решение [11], и к задаче для (11_0) с условиями

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,\beta')=\varphi_{1n}^k(r), \qquad \upsilon_{0,n}^{k,1}(1,x_0)=\psi_{1n}^k(x_0), \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{0,n}^{k,1}(r,0)=0, \tag{21}$$

где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(x_0)$ — функции, вырождающиеся соответственно через $\varphi_n^k(r)$, $\tau_n^k(r)$ и $\psi_n^k(x_0)$, $\tau_n^k(r)$. В [9] показано, что если выполняется условие (5), то задача (11_0), (21) однозначно разрешима.

Далее, используя утверждения 1 и 2, устанавливаем однозначную разрешимость задач (11_α), (14) и (12), (20).

Теперь будем искать решение задачи (11_α), (13) в виде (19), где $\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи для (11_α), (18), а $\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи Коши для (11_α) с данными

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,\beta') = \varphi_n^k(r) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,\beta'), \qquad \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0) = \psi_n^k(x_0) - \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0), \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r,0) = 0. \tag{22}$$

Используя формулы (17), (15), задачи (11_α), (18) и (11_α), (22) соответственно приводим к задаче Коши (11_0), (16) и к задаче (11_0), (21), где $\varphi_{1n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(x_0)$ — функции, теперь вырождающиеся соответственно через $\varphi_n^k(r)$, $\nu_n^k(r)$ и $\psi_n^k(x_0)$, $\nu_n^k(r)$.

Таким образом, задача (11_α), (13) также имеет единственное решение.

Следовательно, задача (1), (2) имеет решение вида

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{23}$$

где $u_n^k(r,t)$ находятся из (11_α), (12).

Аналогичным образом находим решение задачи (1), (3) в виде (23), где $u_n^k(r,t)$ определяются из (11_α), (13).

Будем учитывать следующие свойства нулей функций Бесселя [14]:

1^0. Если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, \ldots$ — положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то $0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < \ldots, \quad \nu > -1.$

2^0. Пусть μ_ν, μ_ν', μ_ν'' являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J_\nu'(z)$, $J_\nu''(z)$ соответственно.

Тогда

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \quad \sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu' < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu_\nu'' < \sqrt{(\nu^2-1)}, \quad \nu > 1.$$

Используя формулы [14, 15]

$$\sin z = z\left(1 - z\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2\right),$$

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \tag{24}$$

$$2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z),$$

оценки [10]

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{m/2-1+q}, \qquad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \ldots ,$$

леммы, а также ограничения на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, как в [8, 9], можно показать, что полученное решение (23) принадлежит искомому классу $C(\bar{D}_\beta) \cap C^1(D_\beta \cup S_0) \cap$ $\cap\, C^2(D_\beta)$.

Теорема 1 доказана.

Теперь докажем теорему 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 следует единственность решения задачи 1.

Пусть теперь условие (5) не выполняется хотя бы для одного $s = p$.

В этом случае в [9] показано, что нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче (11_0), (21), является функция

$$\upsilon_{0,n}^{k,1}(r, x_0) = \sqrt{r} J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_p r) \cos \mu_p x_0. \tag{25}$$

Далее, из (15), (17), (25) следует, что однородные задачи (11_α), (12) и (11_α), (13) имеют решения вида

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) = \gamma_\alpha \sqrt{r} \left[\int_0^1 (\mu_p \xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi\right] J_{n+(m-2)/2}(\mu_p r),$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r, x_0) =$$

$$= \gamma_{2-k+2q} \sqrt{r} \left\{ \left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q} \int_0^1 \cos(\mu_p \xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\alpha/2} d\xi \right] \right\} J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_p r).$$

Следовательно, нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче 1, является функция $u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(1-m)/2} u_{jn}^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta)$, где $u_{1n}^k(r,t) =$ $= \upsilon_{\alpha,n}^{k,1}(r, x_0)$ в случае задачи (1), (2), $u_{2n}^k(r,t) = \upsilon_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ в случае задачи (1), (3), при этом из (24) следует, что она принадлежит искомому классу, если $l > \dfrac{3m}{2}$.

В заключение отметим, что в [16] для уравнения (1) внутри характеристической области приведены корректные постановки задач Дирихле и Пуанкаре.

1. *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Princeton Univ. Bull. – 1902. – **13**. – P. 49 – 52.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
4. *Bourgin D.G., Duffin R.* The Dirichlet problem the vibrating string eguation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**. – P. 851 – 858.
5. *Fox D. W., Pucci C.* The Dirichlet problem the wave eguation // Ann. math. pura ed appl. – 1958. – **46**. – P. 155 – 182.
6. *Нахушев А. М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 1. – С. 190 – 191.
7. *Dunninger D. R., Zachmanoglou E. C.* The condition for uniqueness of the Diriclet problem for hyperbolic equations in cilindrical domains // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**, № 8.

8. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation // Math. Problems Engineering. – 2010. – Article ID 653215. – 7 p.
9. *Aldashev S. A.* The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation // J. Math. Sci. – 2011. – **173**, № 2. – P. 150 – 154.
10. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
11. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
12. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973. – 94 с.
13. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1985. – 301 с.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
16. *Алдашев С. А., Селиханова Р. Б.* О задачах Дарбу с отходом от характеристики и сопряженных им задачах для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Докл. Адыгейской (Черкесской) Междунар. академии наук. – Нальчик, 2007. – **9**, № 2. – С. 24 – 27.

Получено 08.05.11