УДК 517.95

В. П. Бурский, Е. В. Лесина (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЗАДАЧА НЕЙМАНА И ОДНА ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

We investigate the solvability of an inhomogeneous Neumann problem and oblique-derivative problem for an improperly elliptic scalar differential equation with complex coefficients in a bounded domain. The model case where the domain is the unit disk and the equation does not have lower-order terms is studied. It is proved that the classes of boundary data for which the problems have unique solutions in a Sobolev space are the spaces of functions with exponentially decreasing Fourier coefficients.

Розглядається проблема розв'язності неоднорідної задачі Неймана і один випадок задачі зі скісною похідною в обмеженій області для скалярного неправильно еліптичного диференціального рівняння з комплексними коефіцієнтами. Досліджено модельний випадок, коли за область вибрано одиничний круг, а рівняння не має молодших членів. Доведено, що класами граничних даних, для яких задачі мають єдиний розв'язок у просторі Соболєва, є простори функцій з експоненціальним спаданням коефіцієнтів Фур'є.

1. Введение. В настоящее время граничные задачи для линейных эллиптических уравнений и систем изучаются только для правильно эллиптического случая, так как после примеров А. В. Бицадзе изучение граничных задач для неправильно эллиптического случая представляется весьма туманным. Напомним, что в 1948 г. А. В. Бицадзе [1] привел пример уравнения $d^2u/d\bar{z}^2 = 0$, $z = x_1 + ix_2$, однородная задача Дирихле в единичном круге для которого имеет счетное число линейно независимых полиномиальных решений $u_N(z) = (1 - z\bar{z})\, z^N$. Позже им был найден еще один пример уравнения с тем же свойством, но уже с простыми нулями символа (см. [2]).

В настоящей работе мы рассмотрим неправильно эллиптическое уравнение второго порядка в модельной области — круге — и получим разрешимость задачи Неймана и один частный случай задачи с косой производной в обычной соболевской шкале пространств, при этом правые части в граничных условиях должны быть из некоторого класса аналитических функций. Эта работа продолжает исследование граничных задач для неправильно эллиптических уравнений, начатое в [7], где была доказана разрешимость задачи Дирихле для этого же уравнения.

Заметим, что и для правильно эллиптического оператора граничная задача с косой производной может не быть эллиптической (т. е. не удовлетворять условию Лопатинского). Так, Л. Хермандер рассматривал задачу с косой производной как неэллиптическую граничную задачу, которая решалась сведением к псевдодифференциальному оператору на границе. В его работе [14] установлена связь между задачей с косой производной и теорией псевдодифференциальных операторов, в частности указаны условия, при которых псевдодифференциальный оператор является субэллиптическим. В определенном смысле продолжением его исследований можно считать работу Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева [8], однако предложенные в ней методы являются более простыми, так как основаны на простых геометрических рассуждениях и использовании теории коэрцитивных эллиптических задач.

В работе В. Г. Мазьи [12] изучена задача с косой производной для эллиптического уравнения второго порядка. В предположении, что векторное поле касается выделенных гладких компактных подмногообразий границы Γ рассматриваемой области, показано, что задача однозначно разрешима, получены оценки решений в $L_p(\Gamma)$, $1 < p \le \infty$, и доказана компактность обратного оператора.

Исследованием граничной задачи с косой производной для эллиптического дифференциального оператора в ограниченной области с гладкой границей занимался также Б. П. Панеях [15]. При условии, что множество точек границы, в которых векторное поле задачи пересекается с касательным пространством, непусто, он доказал фредгольмовость в подходящих пространствах оператора, соответствующего задаче, и привел необходимое и достаточное условие компактности обратного оператора.

Как мы отмечали ранее, в работе [7] была доказана разрешимость задачи Дирихле в обычной соболевской шкале пространств. В ней в зависимости от свойств числа $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$, называемого углом между характеристиками уравнения (2), были рассмотрены три случая:

1) угол φ_0 веществен и π-рационален, т. е. $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$;
2) угол φ_0 веществен и π-иррационален;
3) угол φ_0 невеществен.

Случай 1 — это случай нарушения единственности решения задачи Дирихле [3]. В этом случае имеется счетное число линейно независимых решений однородной задачи Дирихле. В случаях 2 и 3 пришлось вводить пространства аналитических правых частей для разрешимости в обычной соболевской шкале пространств, причем на свойства задачи Дирихле в случае 2, в отличие от случая 3, оказывали влияние теоретико-числовые свойства числа φ_0, аналогично тому, как это происходит со свойствами задачи Дирихле для гиперболического уравнения (2) с вещественными коэффициентами (см., например, [6]). Ниже мы убедимся, что этот эффект проявляется и при исследовании как задачи Неймана, так и задачи с косой производной.

Напомним определения правильно эллиптического оператора и задачи с косой производной.

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ называется эллиптическим в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если его старший символ $l(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ne 0$ для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и правильно (или собственно) эллиптическим в открытой или замкнутой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, если m четно, $m = 2k$, и для любого $x \in \Omega$, для каждой пары линейно независимых действительных векторов ξ и η среди корней полинома $l(x, \xi + t\eta)$ от параметра t имеется ровно k корней $t_+^1, t_+^2, \ldots, t_+^k$ с положительной мнимой частью ($\operatorname{Im} t_+^j > 0$) и k корней $t_-^1, t_-^2, \ldots, t_-^k$ с отрицательной мнимой частью ($\operatorname{Im} t_-^j < 0$).

Ясно, что каждый правильно эллиптический линейный дифференциальный оператор является эллиптическим. Отметим, что при $n \ge 3$ каждый эллиптический линейный дифференциальный оператор является правильно эллиптическим, но при $n = 2$ это не так (например, оператор Коши – Римана $\partial/\partial\bar{z} = (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)/2$), и то же справедливо для всех n в случае, когда коэффициенты оператора вещественны [11] (см. также [10]).

Если теперь предположить, что $\mathcal{L}$ — эллиптический оператор второго порядка и на границе $\partial\Omega$ области (точнее, в некоторой окрестности границы) задана вектор-функция $l = l(x)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, то задача

$$\mathcal{L}u = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

называется *задачей с косой производной* [9]. При $n \geq 3$ эллиптичность такой задачи равносильна тому, что поле $l(x)$ не касается границы ни в одной точке $x \in \partial\Omega$, а при $n = 2$ — эквивалентна условию $l(x) \neq 0$ при всех $x \in \partial\Omega$. Отметим, что если направление l совпадает с направлением конормали, то задача с косой производной переходит в задачу Неймана. Ниже, рассматривая уравнение с комплексными коэффициентами, мы сталкиваемся с комплексным направлением конормали, и потому вектор-функция $l(x)$ будет принимать комплексные значения.

Для случая $n = 2$ будем рассматривать общее уравнение второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами без младших членов

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = 0. \tag{1}$$

Раскладывая оператор в левой части на линейные множители, уравнение (1) можно записать в виде

$$(a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)\, u = 0$$

с единичными комплексными векторами $a^j = (a_1^j, a_2^j)$, $j = 1, 2$, что позволяет перейти к виду

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u = 0, \tag{2}$$

где φ_1 и φ_2 — комплексные числа, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Невещественность чисел φ_1 и φ_2 означает, что исходное уравнение является эллиптическим, т. е. $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, где $l(\xi) = (\sin\varphi_1 \cdot \xi_1 + \cos\varphi_1 \cdot \xi_2)(\sin\varphi_2 \cdot \xi_1 + \cos\varphi_2 \cdot \xi_2)$ — символ дифференциального оператора L. Правильная эллиптичность здесь означает, что корни λ_1, λ_2 квадратного уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеют мнимые части противоположных знаков, а это эквивалентно тому, что комплексные углы φ_1 и φ_2 имеют мнимые части противоположных знаков, и, стало быть, имеют мнимые части одного знака в неправильно эллиптическом случае.

Для неправильно эллиптического уравнения (2) в единичном круге K будем изучать корректную разрешимость задачи Неймана и задачи с косой производной, а именно, следуя определению корректности по Адамару линейной граничной задачи

$$Lu = f,\ Bu|_{\partial\Omega} = g,$$

укажем в обоих случаях пространство $\mathfrak{B}$, для которого справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathfrak{S}} \leq \|f\|_{\mathfrak{R}} + \|g\|_{\mathfrak{B}}$$

($\mathfrak{S}, \mathfrak{R}, \mathfrak{B}$ — банаховы пространства решений и правых частей) с пространством Соболева в качестве пространства $\mathfrak{S}$.

2. Метод исследования. В работе [4] получено условие связи следов решения задачи Коши для уравнения (2) с данными из обычных соболевских пространств, которое мы приводим в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $u \in H^s(K)$ *была решением задачи*

$$u|_{\partial K} = \psi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial K), \qquad u'_\nu|_{\partial K} = \chi \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для уравнения (2), *необходимо и достаточно, чтобы функции*

$$P(x) = -l(\nu(x))\psi(x) \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial K),$$

$$C(x) = l(\nu(x))\chi(x) + [(\nu_1^2 - \nu_2^2)\sin(\varphi_1+\varphi_2) + 2\nu_1\nu_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)]\psi'_\tau +$$

$$+[(\nu_2^2 - \nu_1^2)\cos(\varphi_1+\varphi_2) - 2\nu_1\nu_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\psi \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

удовлетворяли условию

$$\int\limits_{\partial K} [P(x)(-i\langle\nu,\overline{\xi}\rangle) + C(x)]\exp(-i\langle x,\overline{\xi}\rangle)\, d\tau = 0 \qquad \forall \xi \in \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^2 \colon l(\xi) = 0\}. \tag{3}$$

Здесь и ниже τ — натуральный параметр на ∂K, $\langle x,\xi\rangle = x_1\overline{\xi}_1 + x_2\overline{\xi}_2$, $x\cdot\eta = x_1\eta_1 + x_2\eta_2$.

В работе [5] было показано, что равенство (3) эквивалентно паре условий

$$\int\limits_{\partial K} \left[u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2}u'_\tau\right] Q(x\cdot\widetilde{a}^1)d\tau = 0,$$

$$\int\limits_{\partial K} \left[u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2}u'_\tau\right] Q(x\cdot\widetilde{a}^2)d\tau = 0.$$

Здесь $\widetilde{a}^1 = (-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1)$, $\widetilde{a}^2 = (-\overline{a}_2^2, \overline{a}_1^2)$ — направляющие векторы множества комплексных характеристических направлений $\Lambda^j = \left\{\lambda\widetilde{a}^j | \lambda \in \mathbb{C}\right\}$, $j = 1,2$, $\langle\widetilde{a}^j, a^j\rangle = 0$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\nu_*} = l(\nu)\dfrac{\partial}{\partial\nu} - \dfrac{1}{2k}[l(\nu(\tau))]'_\tau \cdot \dfrac{\partial}{\partial\tau}$ — производные по касательной и по конормали соответственно, k — кривизна кривой ∂K.

Данная эквивалентность вместе с теоремой 1 гарантировала справедливость следующей теоремы, доказанной в [5].

Теорема 2. *Для того чтобы функция* $u \in H^s(K)$, $s \geqslant 2$, *была решением задачи*

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K), \qquad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для уравнения (2), *необходимо и достаточно, чтобы функции* γ *и* κ *удовлетворяли интегральному равенству*

$$\int\limits_{\partial K} \left[\kappa - (-1)^j\frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x\cdot\widetilde{a}^j)d\tau = 0, \qquad j = 1,2, \tag{4}$$

с любым полиномом $Q \in \mathbb{C}[z]$. *При этом функция* u *восстанавливается с точностью до аддитивной постоянной.*

Таким образом, было получено другое условие связи следов решения, имеющее вид проблемы неопределенности некоторой проблемы моментов, свойства которой определяли свойства граничной задачи.

Рассмотрим несколько подробнее возникшую проблему моментов на границе ∂K единичного круга K:

Для двух заданных наборов чисел ω_n^1 *и* ω_n^2, $\omega_0^1 = \omega_0^2$, $n = \mathbb{Z}_+$, *найти функцию* α *такую, что*

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau)(x(\tau)\cdot \widetilde{a}^j)^n d\tau = \omega_n^j.$$

Эта проблема моментов обобщает классическую тригонометрическую проблему моментов. Действительно, возьмем в качестве векторов $\widetilde{a}^j$ следующие векторы: $\widetilde{a}^1 = (1, i)$, $\widetilde{a}^2 = (1, -i)$. Получим обычную тригонометрическую проблему моментов

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) e^{in\tau} d\tau = \omega_n^1, \quad \int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) e^{-in\tau} d\tau = \omega_n^2.$$

Далее, умножая эти равенства на коэффициенты полинома Чебышева T_n первого рода и складывая, получаем

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) T_n(-x(\tau)\cdot \widetilde{a}^j) d\tau = \mu_n^j$$

с некоторыми μ_n^j. Поскольку $T_n(\cos\sigma) = \cos n\sigma$ и, кроме того, произведение $x(\tau)\cdot\widetilde{a}^j = (\cos\tau, \sin\tau)\cdot(-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j) = -\cos(\tau+\varphi_j)$, исходная проблема моментов может быть записана в следующей форме:

Для двух заданных наборов чисел μ_n^1 *и* μ_n^2, $n = \mathbb{Z}_+$, *найти функцию* α *такую, что*

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau) \cos n(\tau+\varphi_j) d\tau = \mu_n^j. \tag{5}$$

Введем обозначения. Пусть M_l^j — подпространство пространства $H^l(\partial K)$, $l \in \mathbb{R}$, элементами которого являются функции $\alpha(\tau)$, удовлетворяющие при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ интегральному равенству

$$\int\limits_{\partial K} \alpha(\tau)(x\cdot\widetilde{a}^j)^k d\tau = 0, \quad j = 1, 2.$$

Определение 1. *Определим пространство Соболева* $H_\rho^m(\partial K)$ *с весом* $\rho = \rho(n)$ *для коэффициентов Фурье как пространство функций*

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau\big) \tag{6}$$

из $L_2(\partial K)$ *таких, что коэффициенты* α_n^C, α_n^S *разложения удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2\big)\rho^2(n)\big(1+n^2\big)^m < \infty. \tag{7}$$

***Замечание* 1.** В дальнейшем в качестве веса $\rho(n)$ примем значение

$$\rho = \rho(n) = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}.$$

Отметим, что $|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|>0$ для неправильно эллиптического уравнения (8). Пространство $H^m_\rho(\partial K)$ с таким весом состоит из аналитических функций. Функции с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье систематически используются в теории функций, начиная с работ С. Н. Берштейна (см. [13]).

Определение 2. *Будем говорить, что векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ имеют $(H^m_\rho - H^l)$-свойство на кривой ∂K, $l \leqslant m$, если для каждой функции $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ существуют единственные функции $\alpha^1 \in M^1_l$, $\alpha^2 \in M^2_l$ такие, что имеет место представление $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + \mathrm{const}$.*

$\left(\boldsymbol{H^m_\rho - H^l}\right)$**-задача** на кривой ∂K $(l \leqslant m)$ состоит в нахождении условий на векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, необходимых и достаточных для $(H^m_\rho - H^l)$-свойства на кривой ∂K.

После подстановки разложения (6) в равенство (5) получим соотношения

$$\pi(\alpha^C_n \cos n\varphi_j - \alpha^S_n \sin n\varphi_j) = \mu^j_n, \quad j = 1,2,$$

исходя из которых определим подпространства $M^j_l,\ j=1,2$, равенствами

$$M^1_l: \quad \alpha^C_n \cos n\varphi_1 - \alpha^S_n \sin n\varphi_1 = 0,$$

$$M^2_l: \quad \alpha^C_n \cos n\varphi_2 - \alpha^S_n \sin n\varphi_2 = 0.$$

Теперь исследуем $\left(H^m_\rho - H^l\right)$-задачу на окружности ∂K в предположении, что $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ — произвольная функция, имеющая представление (6). Спроектируем вектор $(\alpha^C_n, \alpha^S_n) \in \mathbb{C}^2$ на прямую $\alpha^C_n \cos n\varphi_1 - \alpha^S_n \sin n\varphi_1 = 0$ вдоль прямой $\alpha^C_n \cos n\varphi_2 - \alpha^S_n \sin n\varphi_2 = 0$. Определяя координаты $(\alpha^{1,C}_n, \alpha^{1,S}_n)$ проекции из системы

$$\alpha^{1,C}_n \cos n\varphi_1 - \alpha^{1,S}_n \sin n\varphi_1 = 0,$$

$$\alpha^{1,C}_n \cos n\varphi_2 - \alpha^{1,S}_n \sin n\varphi_2 = \alpha^C_n \cos n\varphi_2 - \alpha^S_n \sin n\varphi_2,$$

имеем

$$(\alpha^{1,C}_n, \alpha^{1,S}_n) = \left(\frac{\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1(\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right).$$

Прямым дополнением этого вектора в $\mathbb{C}^2$, лежащим на второй прямой, будет вектор

$$(\alpha^{2,C}_n, \alpha^{2,S}_n) = \left(\alpha^C_n - \frac{\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \alpha^S_n - \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1(\alpha^C_n - \alpha^S_n \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2(-\alpha^C_n \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha^S_n)}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \frac{-\alpha^C_n \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha^S_n}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right).$$

Далее, имея координаты проекции и прямого дополнения, найдем функции $\alpha^j \in M^j_l$, $j = 1,2$:

$$\alpha^1 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^{1,C}\cos n\tau + \alpha_n^{1,S}\sin n\tau) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\cos n\tau + \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1(\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\sin n\tau\right),$$
$$\tag{8}$$
$$\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^{2,C}\cos n\tau + \alpha_n^{2,S}\sin n\tau) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2(-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S)}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\cos n\tau + \frac{-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\sin n\tau\right).$$

Рассмотрим векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, заданные уравнением (2), и выясним, при каком показателе $l, l \leqslant m$, эти векторы имеют $(H_\rho^m - H^l)$-свойство на кривой ∂K. Исследуем отдельно два случая, отмеченные во введении:

2) $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ — вещественное π-иррациональное число,

3) φ_0 — невещественное комплексное число.

Оценим коэффициенты при множителях $\alpha_n^C \cos n\tau$, $\alpha_n^S \cos n\tau$, $\alpha_n^C \sin n\tau$, $\alpha_n^S \sin n\tau$ в выражениях (8):

$$\left|\frac{1}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2 - \sin n\varphi_2 \cos n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}\varphi_1|}e^{n|\mathrm{Im}\varphi_2|}}{|\sin n\varphi_0|} = \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|},$$
$$\left|\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}, \tag{9}$$
$$\left|\frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|},$$
$$\left|\frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 \operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}.$$

Случай 2. Напомним, что, по предположению из замечания 1, мы используем вес для коэффициентов Фурье в виде $\rho = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$, так что $\rho = e^{n|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}$ при вещественном φ_0, так как в этом случае $\mathrm{Im}\,\varphi_1 = \mathrm{Im}\,\varphi_2$.

Воспользуемся следующим утверждением из книги [6].

Утверждение 1. *Пусть* $\mu + 1 > 0$. *Неравенство для числа* $\varphi_0 \in \mathbb{R}$

$$\exists C_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon \quad |\sin n\varphi_0| > C_0 n^{-\mu} \tag{10}$$

равносильно неравенству

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall \frac{q}{r} \in \mathbb{Q}\colon \quad \left|\frac{\varphi_0}{\pi} - \frac{q}{r}\right| > C_1 r^{-\mu-1}.$$

Из неравенства (10) нетрудно видеть, что при вещественном φ_0 все указанные выше отношения в левых частях неравенств (9) оцениваются величиной ρn^{μ}. Следовательно, коэффициенты функций α^1, α^2 удовлетворяют оценке

$$|\alpha_n^{j,C}| \leqslant \rho n^{\mu}(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad |\alpha_n^{j,S}| \leqslant \rho n^{\mu}(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad j = 1, 2,$$

которая означает, с учетом принадлежности $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, что $\alpha^j \in H^{m-\mu}(\partial K)$. Действительно,

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2)\rho^2 n^{2m} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n^{j,C}|^2 + |\alpha_n^{j,S}|^2}{\rho^2 n^{2\mu}} \cdot \rho^2 n^{2m} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\big(|\alpha_n^{j,C}|^2 + |\alpha_n^{j,S}|^2\big) n^{2(m-\mu)}.$$

Итак, мы выяснили, используя неравенство (7), что в случае 2 функции α^j принадлежат $H^{m-\mu}(\partial K)$ (т. е. искомое $l = m - \mu$).

Случай 3. Если φ_0- комплексное невещественное число, то, как нетрудно убедиться, все четыре соотношения из (9) оцениваются сверху весом $\rho = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$. Но тогда

$$|\alpha_n^{j,C}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad |\alpha_n^{j,S}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad j = 1, 2,$$

поэтому, снова используя определение 1, замечаем, что функции α^j принадлежат $H^m(\partial K)$ (здесь индекс l совпадает с m).

Резюмируя полученные результаты, сформулируем только что доказанное нами утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* φ_0 — *вещественное число,* $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ *и выполнено неравенство* (10). *Тогда функции* α^j, $j = 1, 2$, *принадлежат пространству* $H^{m-\mu}(\partial K)$. *Если же* φ_0 — *комплексное невещественное число и, по-прежнему,* $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, *то функции* α^j *принадлежат* $H^m(\partial K)$.

***Замечание* 2.** Отметим, что в смысле определения 2 последнее утверждение означает, что при вещественном φ_0 векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ имеют $(H^m_\rho - H^{m-\mu})$-свойство на окружности ∂K, а в случае комплексного φ_0 — $(H^m_\rho - H^m)$-свойство на ∂K.

3. Задача Неймана. Рассмотрим задачу Неймана

$$u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \tag{11}$$

для уравнения (2) в пространстве Соболева $H^s(K)(= W_2^s(K))$, $s \geqslant 2$, где $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| < < 1\}$ — единичный круг с границей ∂K, функция $\kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, и выясним, для каких классов граничных данных такая задача имеет единственное решение.

Сформулируем и докажем результат, отражающий связь свойств проблемы моментов (5) с разрешимостью задачи (2), (11).

Теорема 4. *Пусть φ_0 вещественно и π-иррационально. При наличии $\big(H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}\big)$-свойства на границе ∂K круга у векторов $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ решение $u(x)$ задачи* (11) *с $\kappa \in \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения* (2) *существует, единственно* (*с точностью до аддитивной постоянной*) *и принадлежит пространству $H^{s-\mu}(K)$.*

Доказательство. В силу $\big(H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\mu-\frac{3}{2}}\big)$-свойства векторов $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2$ любая функция $\kappa \in \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ представима в виде суммы $\kappa = v_1 + v_2$, где $v_j \in M^j_{s-\mu-\frac{3}{2}} \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K), j = 1, 2$. Нам необходимо по известной функции κ построить функцию γ таким образом, чтобы было выполнено интегральное равенство (4). Полагая $\gamma = \dfrac{2}{\overline{\Delta}}(2v_1 - \kappa)$, где $\Delta = \sin\varphi_0$, и подставляя разложение $\kappa = v_1 + v_2$, получаем $\gamma = \dfrac{2}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2)$.

Убедимся, что при таком выборе γ и κ выполняется равенство (4). В самом деле, при $j = 1$ имеем

$$\int\limits_{\partial K} \left[\kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^1) d\tau = \int\limits_{\partial K} \left(v_1 + v_2 + \frac{\overline{\Delta}}{2} \cdot \frac{2}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2)) Q(x \cdot \widetilde{a}^1\right) d\tau =$$

$$= 2 \int\limits_{\partial K} v_1 \cdot Q(x \cdot \widetilde{a}^1) d\tau = 0.$$

Ясно, что равенство нулю интеграла достигается вследствие принадлежности $v_1 \in M^1_{s-\mu-\frac{3}{2}}$.

Далее, при $j = 2$ получаем

$$\int\limits_{\partial K} \left[\kappa - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau = \int\limits_{\partial K} \left(v_1 + v_2 - \frac{\overline{\Delta}}{2} \cdot \frac{2}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2)\right) Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau =$$

$$= 2 \int\limits_{\partial K} v_2 \cdot Q(x \cdot \widetilde{a}^2) d\tau = 0,$$

так как $v_2 \in M^2_{s-\mu-\frac{3}{2}}$.

Отметим, что в силу вложения функция $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \subset H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K) \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$. Кроме того, $\gamma \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$, так как имеет место представление $\gamma = \dfrac{2}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2)$, где $v_j \in M^j_{s-\mu-\frac{3}{2}} \subset H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$, $j = 1, 2$.

Итак, обе функции γ и κ принадлежат пространству $H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$ и удовлетворяют равенству (4). Следовательно, для этих функций справедлива теорема 2, а это, в свою очередь, означает, что существует единственное решение $u(x) \in H^{s-\mu}(K)$ задачи

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K), \qquad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\mu-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

с двумя граничными условиями для уравнения (2). Таким образом, функция $u(x)$ удовлетворяет исходному уравнению и каждому из граничных условий, в частности условию Неймана $u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa$. Значит, существует единственное (с точностью до аддитивной постоянной) решение $u(x) \in H^{s-\mu}(K)$ задачи (2), (11).

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть φ_0 невещественно. Если векторы $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ имеют $\big(H_\rho^{s-\frac{3}{2}} - H^{s-\frac{3}{2}}\big)$-свойство на границе ∂K круга, то решение $u(x)$ задачи* (11) *с $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ для уравнения* (2) *существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству $H^s(K)$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы с тем отличием, что в этом случае $\mu = 0$.

Объединяя теоремы 3 – 5, получаем основной результат в виде теорем 6 и 7, соответствующих случаям 2 и 3.

Теорема 6. *Пусть φ_0 вещественно и π-иррационально, $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$ и выполнено неравенство* (10). *Тогда решение задачи* (2), (11) *существует, единственно* (*с точностью до аддитивной постоянной*) *и принадлежит пространству $H^{s-\mu}(K)$.*

Теорема 7. *Если φ_0 — невещественное число и $\kappa \in H_\rho^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$, то решение задачи* (2), (11) *существует, единственно* (*с точностью до аддитивной постоянной*) *и принадлежит пространству $H^s(K)$.*

4. Задача с косой производной. Для уравнения (2) рассмотрим краевую задачу

$$(u'_{\nu_*} - g u'_\tau)|_{\partial K} = \kappa - g\gamma = \alpha, \tag{12}$$

где $g \neq \pm\dfrac{\overline{\Delta}}{2}$, $\Delta = \sin\varphi_0$, и будем предполагать, что $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$.

По определению $\big(H_\rho^m - H^l\big)$-свойства векторов $\widetilde{a}^1$, $\widetilde{a}^2$ имеет место представление $\alpha = w_1 + w_2$, где $w_i \in M_l^i \subset H^l(\partial K)$, $l \leqslant m$, $i = 1, 2$. Обозначив

$$v_1 = \left(u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau\right)\Big|_{\partial K} = \kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma,$$

$$v_2 = \left(u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau\right)\Big|_{\partial K} = \kappa - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma,$$

выразим через v_1 и v_2 функции κ и γ:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \\ \gamma &= \frac{1}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда

$$\alpha = \kappa - g\gamma = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{g}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{g}{\overline{\Delta}}\right)v_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{\overline{\Delta}}\right)v_2,$$

откуда

$$v_1 = \frac{w_1}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{g}{\overline{\Delta}}} = \frac{2\overline{\Delta}w_1}{\overline{\Delta} - 2g}, \qquad v_2 = \frac{w_2}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{g}{\overline{\Delta}}} = \frac{2\overline{\Delta}w_2}{\overline{\Delta} + 2g},$$

т. е. по заданным функциям w_i, построенным по известной функции α, мы по последним формулам получим функции v_i, а по ним по формуле (13) строим функции κ и γ:

$$\kappa = \overline{\Delta} \cdot \left(\frac{w_1}{\overline{\Delta} - 2g} + \frac{w_2}{\overline{\Delta} + 2g}\right) \in H^l(\partial K), \qquad \gamma = 2\left(\frac{w_1}{\overline{\Delta} - 2g} - \frac{w_2}{\overline{\Delta} + 2g}\right) \in H^l(\partial K). \tag{14}$$

В силу принадлежности w_1, w_2 пространству $H^l(\partial K)$ функции γ и κ также принадлежат $H^l(\partial K)$, а по построению функций w_i они удовлетворяют интегральному равенству (4). Но тогда из теоремы 2 следует существование единственного решения $u(x) \in H^{l+3/2}(K)$ задачи

$$Lu = 0, \quad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa, \quad u'_\tau|_{\partial K} = \gamma.$$

Этот факт влечет, в свою очередь, существование единственного решения задачи (2), (12). Действительно, выразив w_1 и w_2 из равенств (14) через κ и γ и подставив их значения в представление $\alpha = w_1 + w_2$, получим в точности граничное условие (12). Таким образом, функция u удовлетворяет исходному уравнению и условию (12), т. е. является решением задачи с косой производной.

***Замечание* 3.** 1. Если $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ — вещественное и π-иррациональное число и $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то функции γ, κ принадлежат $H^{m-\mu}(\partial K)$ (в этом случае $l = m - \mu$).

2. Если же φ_0 — комплексное невещественное число и, по-прежнему, $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то $\gamma, \kappa \in H^m(\partial K)$ (т. е. $l = m$).

Действительно, из теоремы 3 в силу $\left(H^m_\rho - H^l\right)$-свойства следует, что w_1, w_2 принадлежат $H^{m-\mu}(\partial K)$ в случае 1 и w_1, w_2 принадлежат $H^m(\partial K)$ в случае 2 соответственно, но, как установлено выше (см. (14)), функции γ и κ принадлежат тому же пространству, что и w_1, w_2.

Сформулируем окончательный результат, касающийся разрешимости задачи с косой производной для исходного уравнения (2).

Теорема 8. *Пусть $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ и выполнено $\left(H^m_\rho - H^l\right)$-свойство на границе ∂K. Тогда решение граничной задачи* (2), (12) *существует, единственно и принадлежит пространству $H^l(K)$, причем*

$$l = \begin{cases} m - \mu, & \text{если} \quad \varphi_0 \quad \text{вещественное,} \quad \pi\text{-иррациональное,} \\ m, & \text{если} \quad \varphi_0 \quad \text{комплексное невещественное.} \end{cases}$$

В случае вещественного φ_0 требуется дополнительно выполнение неравенства (10).

1. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 6. – С. 211 – 212.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 32 – 36.
4. *Бурский В. П.* О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1307 – 1313.
5. *Бурский В. П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1476 – 1483.
6. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
7. *Бурский В. П., Кириченко Е. В.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 156 – 164.
8. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.* О задаче с косой производной // Мат. сб. – 1969. – **78 (120)**. – С. 148 – 176.
9. *Егоров Ю. В., Шубин М. А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории // Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. – 1987. – **30**. – С. 1 – 264.
10. *Лионс Ж.-М., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
11. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – **5**, № 2. – С. 123 – 151.
12. *Мазья В. Г.* О вырождающейся задаче с косой производной // Мат. сб. – 1972. – **87 (129)**. – С. 417 – 454.
13. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. – М.; Л.: ОНТИ, 1937.
14. *Хермандер Л.* Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи // Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1967. – С. 166 – 297.
15. *Панеях Б. П.* К теории разрешимости задачи с косой производной // Мат. сб. – 1981. – **114 (156)**. – С. 226 – 268.

Получено 19.11.11