УДК 517.9

Ю. Є. Вакал, І. О. Парасюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ УЛЬТРАСУБГАРМОНІК ДВОВИМІРНОЇ МАЙЖЕ АВТОНОМНОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗА ЧАСОМ ГАМІЛЬТОНОВОЇ СИСТЕМИ

Using the Arnold method of detection of fixed points of symplectic diffeomorphisms, we find lower estimates for the number of ultrasubharmonics in a Hamiltonian system on a two-dimensional symplectic manifold with almost autonomous time-periodic Hamiltonian. We show that the asymptotic behavior of these estimates as the perturbation parameter tends to zero depends on which of the four zones of a ring domain foliated by closed level curves of the unperturbed Hamiltonian the generating unperturbed ultrasubharmonics belong to.

С помощью метода Арнольда обнаружения неподвижных точек симплектических диффеоморфизмов найдены оценки снизу количества ультрасубгармоник гамильтоновой системы на двумерном симплектическом многообразии с почти автономным периодическим по времени гамильтонианом. Показано, что асимптотика этих оценок при стремлении малого параметра возмущения к нулю зависит от того, к какой из четырех зон кольцевой области, расслоенной замкнутыми линиями уровня невозмущенного гамильтониана, принадлежат порождающие невозмущенные ультрасубгармоники.

1. Вступ. Нехай на двовимірному симплектичному многовиді $\mathcal{M}^2$ [1] задано 2π-періодичну за часом неавтономну гамільтонову систему з гамільтоніаном $\mathcal{H}_\varepsilon$, залежним від малого параметра $\varepsilon \geq 0$. Припустимо, що незбурений гамільтоніан $H = \mathcal{H}_0$ не залежить від часу і деяка область $D \subset \mathcal{M}^2$ розшаровується регулярними замкненими лініями рівня

$$M_z := \{x \in D\colon H = z\}, \qquad z \in (z_*, z^*) \subset H(\mathcal{M}^2).$$

Тоді рух кожної точки $x \in M_z$ під дією потоку незбуреної системи періодичний з періодом $T(z)$ та частотою $\omega(z) := 2\pi/T(z)$, що залежать у загальному випадку від z. Рухи з раціональною частотою $\omega(z_{m/n}) = m/n$ називають (n/m)-ультрасубгармоніками (n-субгармоніками при $m = 1$). Як відомо з теорії збурень Пуанкаре, загальним є випадок, коли лише певна дискретна множина (n/m)-ультрасубгармонік допускає продовження за малим параметром на деякий інтервал $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{m/n}$, що залежить від m/n, породжуючи збурені ультрасубгармоніки. Водночас при $\varepsilon \to 0$ спостерігається так зване явище буферності: загальна кількість ультрасубгармонік з різними частотами прямує до нескінченності, причому це явище можна спостерігати і при негамільтонових збуреннях [2–6]. У зазначених роботах йшлося про збурені ультрасубгармоніки, які концентруються поблизу гомо- або гетероклінічних контурів незбуреної гамільтонової системи, а існування таких коливних розв'язків пов'язувалося з наявністю нулів функцій Мельникова та їхніх модифікацій. Зокрема, в [3] розглядався випадок гамільтонових збурень і в околі гомоклінічного контура встановлювалося існування лише n-субгармонік; водночас зазначалося, що в рамках запропонованого в цій роботі підходу не вдається виявити збурені (n/m)-ультрасубгармоніки з $m \neq 1$.

Мета даної роботи полягає в тому, щоб оцінити швидкість зростання сумарної кількості збурених ультрасубгармонік гамільтонової системи з гамільтоніаном $\mathcal{H}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. На відміну від [7], де розглядалися негамільтонові збурення, ми не будемо використовувати для доведення існування збурених ультрасубгармонік модифіковані функції Мельникова, натомість застосовуватимемо метод В. І. Арнольда [1]. Такий підхід дасть змогу встановлювати існування не лише збурених ультрасубгармонік, що концентруються поблизу гомо- чи гетероклінічних контурів, але й розподілених по всій області D.

Статтю побудовано таким чином. У п. 2 викладено варіант методу Арнольда доведення існування нерухомих точок симплектичних дифеоморфізмів. У п. 3 описано спосіб побудови змінних (неканонічних) типу дія-кут автономної гамільтонової системи на площині без використання апарату твірних функцій та запропоновано формули для обчислення похідних вихідних канонічних змінних за змінними типу дія-кут. У п. 4 для фіксованого раціонального числа $\frac{m}{n}$ встановлено оцінки мализни малого параметра, що гарантують існування принаймні двох $2\pi n$-періодичних розв'язків збуреної системи, які при $\varepsilon \to 0$ трансформуються в породжуючі (n/m)-ультрасубгармоніки незбуреної системи. Пункт 5 містить основні результати. Тут множину незбурених ультрасубгармонік в залежності від розташування відповідних ліній рівня функції H поділено на чотири підмножини і для кожної з цих підмножин встановлено оцінки знизу кількості збурених ультрасубгармонік. Нарешті, в п. 6 доведно низку допоміжних лем, які суттєво використовуються при обґрунтуванні основних результатів.

2. Нерухомі точки симплектичних дифеоморфізмів. Нехай $(\mathcal{M}^2, d\Lambda)$ — двовимірний симплектичний многовид з точною симплектичною структурою $\omega^2 = d\Lambda$, де Λ — 1-форма. Припустимо, що на цьому многовиді визначено сім'ю симплектичних дифеоморфізмів $\{\chi_t\}_{t\in[0,T]}$, $\chi_0 = \mathrm{Id}$. Нас цікавить питання: чи має нерухому точку звуження дифеоморфізму χ_T на деяку кільцеву область, дифеоморфну $[-\delta, \delta] \times \mathbb{S}^1$? Для так званих симплектичних дифеоморфізмів закручування це питання вирішується за допомогою теорем Пуанкаре та Біркгофа принаймні у двох випадках: 1) кільцева область інваріантна відносно χ_T, а замкнені криві, що її обмежують, дифеоморфізм χ_T повертає в різні боки; 2) зазначена область, можливо, неінваріантна, але дифеоморфізм χ_T близький до тотожного і для нього існує крива, що обмежує однозв'язну область в $\mathcal{M}^2$, зміщуючись під дією χ_T „радіально" (тобто так, що відповідні точки кривої та її образу мають однакові проекції на $\mathbb{S}^1$) [8].

Для розв'язання поставленого питання скористаємося методом, запропонованим В. І. Арнольдом. Цей метод дає змогу пов'язати існування нерухомих точок дифеоморфізму χ_T з існуванням критичних точок деякої функції на колі і не вимагає, щоб „радіально" зміщувана крива обмежувала однозв'язну область. Натомість потрібно, щоб дифеоморфізм χ_T задовольняв умову гомологічності тотожному відображенню. Це означає, що в кожен момент $t \in [0, T]$ поле швидкостей $\frac{\partial}{\partial t}\chi_t := \dot{\chi}_t \in T_{\chi_t}\mathcal{M}^2$ повинно мати глобальний гамільтоніан F_t:

$$\chi_t^* \left(\iota(\dot{\chi}_t)\omega^2\right) = dF_t, \tag{1}$$

де ι — операція внутрішнього добутку вектора та диференціальної форми, χ_t^* — „pull-back"-відображення, індуковане на диференціальних формах дифеоморфізмом χ_t. Зокрема, якщо на $(\mathcal{M}^2, d\Lambda)$ задано неавтономну гамільтонову систему з гамільтоніаном $\mathcal{H}(t, x)$, для якої при кожному $x_0 \in \mathcal{M}^2$ розв'язок $x = \chi_t(x_0)$ початкової задачі $x\big|_{t=0} = x_0$ існує на $[0, T]$, то $\{\chi_t\}_{t\in[0,T]}$ є сім'єю симплектичних дифеоморфізмів, гомологічних тотожному [1].

Опишемо варіант методу Арнольда, в якому, на відміну від першоджерела, не використовується явно поняття твірної функції симплектичного дифеоморфізму. Насамперед зауважимо, що при виконанні умови (1) 1-форма $\chi_t^*\Lambda - \Lambda$ буде точною. Справді, симплектичність χ_t за означенням виливається в рівність $\chi_t^*\omega^2 = \omega^2$. Тоді $0 = \chi_t^*\omega^2 - \omega^2 = d\left(\chi_t^*\Lambda - \Lambda\right)$, звідки $d\dfrac{d}{dt}\chi_t^*\Lambda = 0$. З іншого боку, за основною формулою диференціального числення [9]

$$\frac{d}{dt}\chi_t^*\Lambda = \chi_t^*\left(\iota(\dot\chi_t)\omega^2\right) + d\left(\chi_t^*\left(\iota(\dot\chi_t)\Lambda\right)\right) = d\left[F_t + \chi_t^*\left(\iota(\dot\chi_t)\Lambda\right)\right].$$

Інтегруванням від 0 до t переконуємося, що форма $\chi_t^*\Lambda - \Lambda$ є точною:

$$\chi_t^*\Lambda - \Lambda = d\int\limits_0^t \left[F_s + \chi_s^*\left(\iota(\dot\chi_s)\Lambda\right)\right] ds.$$

Далі, нехай $(y, \psi|\bmod 2\pi)$ — такі (неканонічні) координати в кільцевій області, в яких 1-форма Λ та дифеоморфізм χ_T набирають відповідно вигляду

$$\Lambda = \lambda(y)d\psi, \qquad \chi_T\colon (y,\psi) \mapsto \left(\Upsilon(y,\psi), \Phi(y,\psi)\right),$$

де $\lambda'(y) \neq 0$, $y \in (-\delta, \delta)$. Наслідком точності форми $\chi_t^*\Lambda - \Lambda$ є рівність

$$\lambda \circ \Upsilon d\Phi - \lambda d\psi = dF_T. \tag{2}$$

Припустимо додатково, що існує „радіально” зміщувана крива, задана рівнянням $y = v(\psi)$, де $v(\cdot)$ — 2π-періодична функція зі значеннями в $(-\delta, \delta)$ така, що $\Phi(v(\psi), \psi) \equiv \psi$. Тоді, як наслідок (2), отримуємо рівність

$$\left[\lambda \circ \Upsilon(v(\psi), \psi) - \lambda \circ v(\psi)\right] d\psi = dF_T(v(\psi), \psi),$$

з якої внаслідок строгої монотонності λ випливає, що в кожній критичній точці ψ_* функції $F_T(v(\psi), \psi)$ виконується рівність

$$\Upsilon(v(\psi_*), \psi_*) = v(\psi_*).$$

Отже, $(v(\psi_*), \psi_*)$ — нерухома точка відображення χ_T.

Насамкінець слід зауважити, що 2π-періодична функція $F_T(v(\psi), \psi)$ (функція на колі) має принаймні дві критичні точки $\psi^\pm$, яким з огляду на наведені вище міркування відповідає пара нерухомих точок дифеоморфізму χ_T.

3. Про неканонічні змінні типу дія-кут незбуреної системи. Розглянемо на двовимірному симплектичному многовиді $\left(\mathcal{M}^2, \omega^2\right)$ автономну гамільтонову систему, яка задовольняє такі умови:

а) гамільтоніан системи H належить класу $\mathrm{C}^5\left(\mathcal{M}^2 \mapsto \mathbb{R}\right)$;

б) деяка область $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}^2$ допускає введення канонічних координат p, q, у яких симплектична структура набирає вигляду $dp \wedge dq$, а деяка підобласть D така, що $\bar D := D \cup \partial D \subset \mathcal{D}$, має кільцеву структуру — розшаровується замкненими лініями рівня функції H та не містить положень рівноваги; при цьому має місце типовий випадок, коли межу області D утворює пара компактних зв’язних критичних множин рівня гамільтоніана

$$M_{z_*} = \{x \in \mathcal{D} \colon H(x) = z_*\}, \qquad M_{z^*} = \left\{x \in \mathcal{D}^2 \colon H(x) = z^*\right\},$$

де $z_* < z^*$ — критичні значення функції H, і всі критичні точки функції H, які належать $M_{z_*} \cap M_{z^*}$, є невиродженими; крім того, припускаємо, що на M_{z^*} розташовані одна або кілька точок гіперболічного типу, а M_{z_*} вироджується в єдину точку еліптичного типу;

в) період руху системи з гамільтоніаном H по лінії рівня M_z як функція $T(z)$ параметра z, який нумерує фазові криві, задовольняє умову невиродженості

$$\left|T'(z)\right| + \left|T''(z)\right| \neq 0 \quad \forall z \in (z_*, z^*), \tag{3}$$

до того ж, щоб не ускладнювати подальший аналіз, припускаємо, що функція $T'(z)$ дорівнює нулю лише в одній точці $z_0 \in (z_*, z^*)$.

Наведемо кілька роз'яснень щодо зроблених припущень. Припущення щодо гладкості функції H суттєво використовується в п. 6 при встановленні оцінок функції $T(z)$ для значень z, близьких до критичних. Оскільки $T(z) \to \infty$ при $z \to z^* - 0$, то в точці z_0 функція $T(z)$ досягає мінімуму. Далі, отримані в цій роботі результати автоматично стосуються і випадку, коли M_{z_*} складається з однієї або кількох точок гіперболічного типу. При цьому область $\mathcal{D}$ може бути неоднозв'язною. Наприклад, досить часто зустрічається випадок, коли область $\mathcal{D}$ дифеоморфна циліндру $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Тоді координата p пробігає інтервал, а q — кутова координата на колі і, як наслідок, функція H є 2π-періодичною за змінною q. Класичний приклад — гамільтоніан математичного маятника: $H = p^2/2 + \sin q$.

Відомо, що в області D можна ввести канонічні змінні дія-кут $(I, \varphi| \bmod 2\pi)$. Змінна дії є монотонною функцією від гамільтоніана: $I = \mathcal{I} \circ H$. Іноді, зокрема і в розглядуваному випадку, замість I за координату, яка нумерує фазові криві, зручно брати $z = H$. Для подальшого важливо вміти виражати похідні координат p, q за змінними z, φ знову через координати p, q.

Лема 1. *Припустимо, що D розшаровується регулярними замкненими лініями рівня*

$$M_z = \{(p,q) \in D \colon H(p,q) = z\} \quad \forall z \in (z_*, z^*), \qquad \left[\left|H'_p\right| + \left|H'_q\right|\right]_{M_z} \neq 0.$$

Тоді в області D можна ввести неканонічні координати типу дія-кут $(z, \varphi| \bmod 2\pi)$, у яких функція H перетворюється на z, а симплектична структура і дужки Пуассона мають відповідно вигляд

$$\omega^2 = \frac{T(z)}{2\pi} dz \wedge d\varphi, \qquad \{\varphi, z\} = \frac{2\pi}{T(z)}.$$

Крім того, в координатах (p,q) справджуються рівності

$$p'_z = \frac{H'_p}{\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2} + \left(\frac{T \circ H}{2\pi}\right)^2 f H'_q, \qquad q'_z = \frac{H'_q}{\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2} - \left(\frac{T \circ H}{2\pi}\right)^2 f H'_p, \tag{4}$$

$$p'_\varphi = -\frac{T \circ H}{2\pi} H'_q, \qquad q'_\varphi = \frac{T \circ H}{2\pi} H'_p \tag{5}$$

з функцією $f \in \mathrm{C}^2 (D \mapsto \mathbb{R})$, яка визначається рівностями $f\big|_{\varphi=0} = 0$ та

$$f'_\varphi = \frac{2\pi g}{T \circ H} - \frac{2\pi T' \circ H}{(T \circ H)^2}, \tag{6}$$

де $g := \dfrac{\partial}{\partial p}\left[\dfrac{H'_p}{\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2}\right] + \dfrac{\partial}{\partial q}\left[\dfrac{H'_q}{\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2}\right]$.

Доведення. На фазовій кривій $(p(t), q(t))$ системи з гамільтоніаном H, яка належить лінії рівня M_z, форма

$$\tau = \frac{H'_p dq - H'_q dp}{\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2}$$

індукує форму

$$\left[\frac{H'_p \dot{q} - H'_q \dot{p}}{\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2} dt\right]_{p=p(t),q=q(t)} = dt.$$

Тому інтеграл форми τ по лінії рівня M_z, орієнтованій за напрямком руху, дає період

$$T(z) = \oint\limits_{H=z} \tau.$$

Змінна дії — це гамільтоніан вигляду $I = \mathcal{I} \circ H$, де $\mathcal{I} \in \mathrm{C}^2\left((z_*, z^*) \mapsto \mathbb{R}\right)$, для якого кожен рух має період 2π. Для нього роль форми τ відіграє форма

$$\vartheta := \frac{I'_p dq - I'_q dp}{\left(I'_p\right)^2 + \left(I'_q\right)^2} = \frac{\tau}{\mathcal{I}' \circ H}.$$

Тому інтеграл форми ϑ по лінії рівня M_z, орієнтованій за напрямком руху, даватиме період 2π, якщо $\dfrac{T(z)}{\mathcal{I}'(z)} = 2\pi$, звідки

$$\mathcal{I}(z) = \frac{1}{2\pi}\int T(z)dz.$$

Тоді

$$\vartheta = \frac{2\pi}{T \circ H}\frac{H'_p dq - H'_q dp}{\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2}. \tag{7}$$

Кутову координату φ введемо так. Побудуємо січну Γ, яка ортогонально перетинається в єдиній точці з кожною лінією рівня гамільтоніана H. Зручно задати її параметрично

$$\Gamma: \ p = \tilde{p}(s), \qquad q = \tilde{q}(s)$$

як фазову криву системи

$$p' = \frac{I'_p}{\left(I'_p\right)^2 + \left(I'_q\right)^2}, \qquad q' = \frac{I'_q}{\left(I'_p\right)^2 + \left(I'_q\right)^2},$$

оскільки тоді справджуватимуться рівності

$$I(\tilde{p}(s), \tilde{q}(s)) = s, \qquad \vartheta|_\Gamma = 0.$$

Кожній точці (p, q) відповідає єдина точка $(p_0(p, q), q_0(p, q))$ на кривій Γ, яка визначається значенням параметра $s = I(p, q)$. Тоді $\varphi = \varphi(p, q)$ — час, за який зазначена точка на Γ потрапляє в точку (p, q) під дією потоку гамільтонової системи з гамільтоніаном I. Іншими словами,

$$\varphi(p, q) = \int\limits_{(p_0(p,q), q_0(p,q))}^{(p,q)} \vartheta|_\Gamma.$$

Навпаки, якщо $(P(s, t), Q(s, t))$ як функція t — залежний від параметра s розв'язок задачі Коші $p|_{t=0} = \tilde{p}(s)$, $q|_{t=0} = \tilde{q}(s)$ для системи з гамільтоніаном $\mathcal{I} \circ H$, то координати (p, q) виражаються через змінні (I, φ):

$$p = P(I, \varphi), \qquad q = Q(I, \varphi).$$

Координати (I, φ) канонічні. Справді, беручи до уваги рівності

$$P'_\varphi = -(\mathcal{I} \circ H)'_q, \qquad Q'_\varphi = (\mathcal{I} \circ H)'_p, \qquad \mathcal{I} \circ H(p, q) = I, \tag{8}$$

маємо

$$\frac{\partial}{\partial I} \mathcal{I} \circ H(p, q) = 1,$$

звідки $Q'_\varphi P'_I - P'_\varphi Q'_I = 1$, а тоді

$$dP \wedge dQ = \left(P'_I Q'_\varphi - Q'_I P'_\varphi\right) dI \wedge d\varphi = dI \wedge d\varphi.$$

Замкнену форму, яка локально є диференціалом кутової координати, ми умовно позначимо $d\varphi$. Її можна розкласти за лінійно незалежними формами ϑ, dI, подавши у вигляді $d\varphi = \vartheta + f dI$, де функція f повинна задовольняти умову замкненості $d\vartheta + df \wedge dI = 0$, або еквівалентну їй умову

$$d\vartheta = \{f, I\} dI \wedge d\varphi = \{f, I\} dp \wedge dq,$$

і, крім того, $f\big|_{\varphi=0} = 0$ за побудовою січної Γ. Тут $\{\cdot, \cdot\}$ — дужки Пуассона, асоційовані з симплектичною структурою. Якщо в координатах (p, q) форму ϑ подати у вигляді $\vartheta = \alpha dp + \beta dq$, де з огляду на (7)

$$\alpha := -\frac{2\pi H'_q}{\left[\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2\right] T \circ H}, \qquad \beta := \frac{2\pi H'_p}{\left[\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2\right] T \circ H},$$

то в координатах I, φ ця умова набирає вигляду

$$\left(\beta'_p - \alpha'_q\right)(P(I,\varphi), Q(I,\varphi)) = \frac{\partial}{\partial\varphi} f(P(I,\varphi), Q(I,\varphi)),$$

звідки дістаємо (6). З 2π-періодичності функції f випливають рівності

$$\int_0^{2\pi} \left(\beta'_p - \alpha'_q\right)(P(I,\varphi), Q(I,\varphi)) d\varphi = 0,$$

$$f(P(I,\varphi), Q(I,\varphi)) = \int_0^{\varphi} \left(\beta'_p - \alpha'_q\right)(P(I,s), Q(I,s)) ds.$$

Таким чином, для коефіцієнтів форми $d\varphi = \varphi'_p dp + \varphi'_q dq := \vartheta + \frac{T \circ H}{2\pi} f dH$ в координатах (p, q) отримуємо вирази

$$\begin{aligned} \varphi'_p &= -\frac{2\pi H'_q}{\left[\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2\right] T \circ H} + \frac{T \circ H}{2\pi} f H'_p, \\ \varphi'_q &= \frac{2\pi H'_p}{\left[\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2\right] T \circ H} + \frac{T \circ H}{2\pi} f H'_q. \end{aligned} \tag{9}$$

Тепер зауважимо, що оскільки $\mathcal{I}'(z) > 0$, то замість координати I можна ввести координату $z = \mathcal{I}^{-1}(I)$, а оскільки $\{\varphi, I\} = 1$, то $\{\varphi, \mathcal{I}(z)\} = \mathcal{I}'(z)\{\varphi, z\} = 1$, звідки $\{\varphi, z\} = \frac{2\pi}{T(z)}$. Відтак в координатах (z, φ)

$$\{\varphi, p\} = p'_z\{\varphi, z\} = p'_z \cdot \frac{2\pi}{T}, \qquad \{\varphi, q\} = q'_z\{\varphi, z\} = q'_z \cdot \frac{2\pi}{T}.$$

З іншого боку, оскільки $\{q, p\} = 1$, то в координатах (p, q)

$$\{\varphi, p\} = \varphi'_q, \qquad \{\varphi, q\} = -\varphi'_p,$$

звідки

$$p'_z = \frac{T}{2\pi}\varphi'_q, \qquad q'_z = -\frac{T}{2\pi}\varphi'_p.$$

Звідси з огляду на (9) випливають формули (4). Рівності (5) одержуємо з (8).

Лему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Справджується рівність*

$$f'_z = \frac{2\pi}{T}\int_0^{\varphi}\left[g'_p p'_z + g'_q q'_z - \frac{gT'}{T}\right](P(I,s), Q(I,s)) ds - 2\pi\varphi\frac{d}{dz}\frac{T'}{T^2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{10}$$

4. Існування пари збурених (n/m)-ультрасубгармонік. Нехай гамільтоніан H зазнає малого 2π-періодичного за часом збурення $H \mapsto H + \varepsilon h$, яке задовольняє умову:

г) функція h належить класу $\mathrm{C}^2\left(\mathbb{S}^1 \times \mathcal{M}^2 \mapsto \mathbb{R}\right)$.

Зі зроблених припущень випливає, що в координатах (p, q) функції H та h мають обмежені на множині $\bar{D}$ частинні похідні за змінними p, q до порядку 5 та 2 відповідно. В координатах (z, φ) частинні похідні за змінними z, φ можуть необмежено зростати, якщо $z \to z_*$ та $z \to z^*$. Відповідні оцінки похідних наведено в п. 6

Запишемо збурені рівняння в координатах z, φ:

$$\dot{z} = \varepsilon\{z, h\}, \qquad \dot{\varphi} = \{\varphi, z + \varepsilon h\}.$$

Поклавши $\omega(z) := 2\pi/T(z)$, матимемо

$$\dot{z} = -\varepsilon\omega(z)h'_\varphi(t, z, \varphi), \qquad \dot{\varphi} = \omega(z)\left[1 + \varepsilon h'_z(t, z, \varphi)\right].$$

Для кожного раціонального числа $\dfrac{m}{n}$ з області значень частотної функції $\omega(z)$ знайдеться число $z_{m/n} \in (z_*, z^*)$ таке, що

$$\omega(z_{m/n}) = \frac{m}{n}. \tag{11}$$

При цьому, оскільки відповідно до припущень, зроблених у п. 3 щодо $T(z)$, в точці z_0 функція $\omega(z)$ досягає єдиного екстремального значення, а саме глобального максимуму $\omega_0 := := \omega(z_0) > \omega_* := \omega(z_* + 0)$, а далі монотонно спадає до нуля, кожному раціональному числу $m/n \in [\omega_*, \omega_0)$ відповідає пара точок, які задовольняють рівність (11). Для будь-якого іншого раціонального числа $m/n \in (0, \omega_0]$ рівність (11) задовольняє лише одна така точка.

Зафіксувавши деяку точку $z_{m/n}$ і достатньо мале число $\delta = \delta_{m/n}$, після заміни $z = z_{m/n} + y$, $\varphi = \dfrac{m}{n}t + \psi$, де $|y| \le \delta$, отримаємо систему

$$\begin{gathered}\dot{y} = -\varepsilon\omega\left(z_{m/n} + y\right)h'_\varphi\left(t, z_{m/n} + y, \frac{m}{n}t + \psi\right) := \varepsilon Y(t, y, \psi),\\ \dot{\psi} = \omega\left(z_{m/n} + y\right) - \omega\left(z_{m/n}\right) + \varepsilon\omega\left(z_{m/n} + y\right)h'_z\left(t, z_{m/n} + y, \frac{m}{n}t + \psi\right) :=\\ := \theta(y) + \varepsilon\Psi(t, y, \psi),\end{gathered} \tag{12}$$

де $\theta(y) := \omega\left(z_{m/n} + y\right) - \omega\left(z_{m/n}\right)$. Зрозуміло, що функції θ, Y, Ψ залежать від m/n, однак задля спрощення позначень ми не будемо цього вказувати.

Будемо шукати $2\pi n$-періодичний розв'язок системи (12). Досить показати, що породжене нею за період $T_n = 2\pi n$ відображення Пуанкаре має нерухому точку. Позначимо через $y = = y_0 + u(t, y_0, \psi_0)$, $\psi = \psi_0 + \phi(t, y_0, \psi_0)$ розв'язок задачі Коші $y|_{t=0} = y_0$, $\psi|_{t=0} = \psi_0$. Функції $u(t, y, \psi)$, $\phi(t, y, \psi)$ задовольняють систему інтегральних рівнянь

$$u(t) = \varepsilon\int\limits_0^t Y(s, y + u(s), \psi + \phi(s))ds,$$

$$\phi(t) = \int_0^t \theta(y + u(s))ds + \varepsilon \int_0^t \Psi(s, y + u(s), \psi + \phi(s))ds.$$

Відображення Пуанкаре має вигляд

$$\chi_{T_n} : \ (y, \psi) \mapsto (\Upsilon(y, \psi), \Phi(y, \psi)) := (y + u(T_n, y, \psi), \psi + \phi(T_n, y, \psi)) \,.$$

Нехай ρ — додатне число, яке задовольняє нерівність

$$\rho + \varepsilon T_n \left|Y\right|_\delta \leq \delta, \tag{13}$$

де $\left|\cdot\right|_\delta = \max_{t\in\mathbb{R},|y|\leq\delta,\psi\in[0,2\pi]} \left|\cdot\right|$. За умови, що $|y| \leq \rho$, методом послідовних наближень встановлюємо існування розв'язку, який задовольняє оцінки

$$|u(t)| \leq \varepsilon T_n \left|Y\right|_\delta , \qquad |\phi(t)| \leq T_n \left|\theta\right|_\delta + \varepsilon T_n \left|\Psi\right|_\delta , \qquad t \in [0, T_n].$$

Згідно з методом Арнольда, для доведення існування нерухомої точки відображення Пуанкаре χ_{T_n}, тобто розв'язку системи рівнянь

$$u(T_n, y, \psi) = 0, \qquad \phi(T_n, y, \psi) = 0$$

відносно змінних y, ψ, достатньо показати, що вибором $\delta = \delta_{m/n}$, $\rho = \rho_{m/n}$ та $\varepsilon = \varepsilon_{m/n}$ можна забезпечити виконання нерівності (13) і таких двох умов:

1) для всіх $\psi \in [0, 2\pi]$ знак $\phi(T_n, \rho, \psi)$ протилежний знаку $\phi(T_n, -\rho, \psi)$;

2) для всіх $\psi \in [0, 2\pi]$, $y \in [-\rho, \rho]$ похідна $\phi'_y(T_n, y, \psi)$ відмінна від нуля. Справді, тоді при кожному ψ функція $\hat{\phi}(y) = \phi(T_n, y, \psi)$ буде строго монотонною і змінюватиме знак на відрізку $[-\rho, \rho]$, а отже, матиме єдиний нуль $y = v(\psi)$. Диференційовність функції $v(\psi)$ випливає з теореми про неявну функцію, а її 2π-періодичність — з єдиності такої функції. Принагідно зауважимо, що в даному випадку

$$\Lambda = \mathcal{I}(z_{m/n} + y)d\psi, \qquad \lambda'(y) = \mathcal{I}'(z_{m/n} + y) = \frac{T(z_{m/n} + y)}{2\pi} > 0. \tag{14}$$

Для виконання умови 1 достатньо, щоб знак виразу

$$\theta(\pm\rho + u(s)) + \varepsilon\Psi(s, \pm\rho + u(s), \psi + \phi(s)) =$$

$$= \pm\rho\theta'(\pm\rho\lambda_1) + \theta'(\pm\rho + \lambda_2 u(s))u(s) + \varepsilon\Psi(s, \pm\rho + u(s), \psi + \phi(s)),$$

де λ_1, $\lambda_2 \in [0, 1]$, збігався зі знаком $\pm\rho\theta'(\pm\rho\lambda_1)$, а для цього, в свою чергу, достатньо, щоб

$$\varepsilon \left(\left|\theta'\right|_\delta \left|Y\right|_\delta T_n + \left|\Psi\right|_\delta \right) \leq \min_{|y|\leq\rho} \left|\theta'(y)\right| \rho. \tag{15}$$

Для забезпечення умови 2 оцінимо спочатку похідні u'_y, ϕ'_y. Вони задовольняють систему інтегральних рівнянь

$$u'_y(t) = \varepsilon \int\limits_0^t \left[Y'_y(s, \eta(s), \varphi(s))(1 + u'_y(s)) + Y'_\psi(s, \eta(s), \varphi(s))\phi'_y(s) \right] ds,$$

$$\phi'_y(t) = \int\limits_0^t \theta'(\eta(s))(1 + u'_y(s))ds +$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t \left[\Psi'_y(s, \eta(s), \varphi(s))(1 + u'_y(s)) + \Psi'_\psi(s, \eta(s), \varphi(s))\phi'_y(s) \right] ds,$$

де $\eta(s) := y + u(s)$, $\varphi(s) = \psi + \phi(s)$. Для відмінності від нуля похідної $\phi'_y(t)$ достатньо, щоб $\max_{t\in[0,T_n]} \left|u'_y(t)\right| < 1$ і

$$\left(\min_{|y|\le\delta} \left|\theta'(y)\right| - \varepsilon \left|\Psi'_y\right|_\delta \right)\left(1 - \max_{t\in[0,T_n]} \left|u'_y(t)\right| \right) > \varepsilon \left|\Psi'_\psi\right|_\delta \max_{t\in[0,T_n]} \left|\phi'_y(t)\right|. \tag{16}$$

Скористаємось тепер наслідком 2 з леми 10, поклавши

$$v_1(t) = 1 + \left|u'_y(t)\right|, \qquad v_2(t) = \left|\phi'_y(t)\right|, \qquad a_0 = \left|\theta'\right|_\delta, \qquad T = 2\pi n,$$

$$a_{11} = \left|Y'_y\right|_\delta, \qquad a_{12} = \left|Y'_\psi\right|_\delta, \qquad a_{21} = \left|\Psi'_y\right|_\delta, \qquad a_{22} = \left|\Psi'_\psi\right|_\delta.$$

Тоді за умови, що

$$\max\left\{ \varepsilon \left|Y'_y\right|_\delta, \varepsilon \left|\Psi'_\psi\right|_\delta, \sqrt{\varepsilon \left|Y'_\psi\right|_\delta \left(|\theta'|_\delta + \varepsilon \left|\Psi'_y\right|_\delta \right)} \right\} \le \frac{\ln 2}{4\pi n}, \tag{17}$$

маємо

$$\left|u'_y(t)\right| \le \frac{1}{2}, \qquad \left|\phi'_y(t)\right| \le 3\pi n \left(\left|\theta'\right|_\delta + \varepsilon \left|\Psi'_y\right|_\delta \right).$$

Отже, для виконання умови (16) достатньо, щоб

$$\varepsilon \left[3\pi n \left(\left|\theta'\right|_\delta + \varepsilon \left|\Psi'_y\right|_\delta \right) \left|\Psi'_\psi\right|_\delta + \frac{1}{2} \left|\Psi'_y\right|_\delta \right] < \frac{1}{2} \min_{|y|\le\delta} \left|\theta'(y)\right|. \tag{18}$$

Якщо всі умови мализни ε виконано, то згідно з п. 2 існують принаймні дві точки $\psi^\pm = \psi^\pm_{m/n}(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$, які породжують $2\pi n$-періодичні розв'язки збуреної системи (12), і ці розв'язки зображуються у вигляді

$$y = v(\psi^\pm) + u\left(t, v(\psi^\pm), \psi^\pm\right), \qquad \psi = \psi^\pm + \phi\left(t, v(\psi^\pm), \psi^\pm\right).$$

Щоб упевнитися, що при $\varepsilon \to 0$ зазначені розв'язки трансформуються в незбурені (n/m)-ультрасубгармоніки, оцінимо функцію $v(\psi)$. Записавши рівність $\phi(T_n, v(\psi), \psi) = 0$ у вигляді

$$T_n\left[\theta(v(\psi))-\theta(0)\right]+\int\limits_0^{T_n}\left[\theta\left(v(\psi)+u(s,v(\psi),\psi)\right)-\theta(v(\psi))\right]ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^{T_n}\Psi(s,v(\psi)+u(s,v(\psi),\psi),\psi+\phi(s,v(\psi),\psi))ds=0,$$

одержимо потрібну нерівність

$$|v(\psi)|\le\varepsilon\left[T_n\max_{|y|\le\delta}\left|\theta'(y)\right||Y|_\delta+|\Psi|_\delta\right]\left[\min_{|y|\le\delta}\left|\theta'(y)\right|\right]^{-1}.$$

Наведені вище міркування доводять таку теорему.

Теорема 1. *Нехай виконано умови* а) – г) *пп.* 3, 4, $m/n\in(0,\omega_0)\setminus\{\omega_*\}$. *Якщо додатні числа* ε, δ, ρ *задовольняють нерівності* (13), (15), (17) *та* (18), *то система* (12) *має принаймні два* $2\pi n$*-періодичні розв'язки* $(y^\pm(t),\psi^\pm(t))$ *такі, що*

$$\left|y^\pm(t)\right|\le\varepsilon\left[\frac{T_n\max_{|y|\le\delta}|\theta'(y)|\,|Y|_\delta+\varepsilon\,|\Psi|_\delta}{\min_{|y|\le\delta}|\theta'(y)|}+T_n\,|Y|_\delta\right]\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Уточнимо вигляд функції $F_{T_n}(v(\psi),\psi)$ у п. 2 в розглядуваному випадку. Оскільки $u(t,v(\psi),\psi)=O(\varepsilon)$, $v(\psi)=O(\varepsilon)$, $\theta(0)=0$, то $\phi(t,v(\psi),\psi)=O(\varepsilon)$, а тому з урахуванням рівностей $\phi(T_n,v(\psi),\psi)=0$ та $\lambda'(0)=\dfrac{n}{m}$ (остання випливає з (14)) маємо

$$\Upsilon(v(\psi),\psi)=v(\psi)-\varepsilon\frac{m}{n}\int\limits_0^{2\pi n}h'_\varphi\left(t,z_{m/n},\psi+\frac{m}{n}t\right)dt+o(\varepsilon),$$

$$\lambda\circ\Upsilon(v(\psi),\psi)-\lambda\circ v(\psi)=-\varepsilon\int\limits_0^{2\pi n}h'_\varphi\left(t,z_{m/n},\psi+\frac{m}{n}t\right)dt+o(\varepsilon),$$

звідки

$$F_{T_n}(v(\psi),\psi)=-\varepsilon\int\limits_0^{2\pi n}h\left(t,z_{m/n},\psi+\frac{m}{n}t\right)dt+o(\varepsilon)=:-\varepsilon F_{m/n}(\psi)+o(\varepsilon).$$

Функція $F_{m/n}(\psi)$ має період $\dfrac{2\pi}{n}$. Справді, визначивши цілі числа k, l так, щоб $km+ln=-1$, дістанемо

$$F_{m/n}\left(\psi+\frac{2\pi}{n}\right)=\int\limits_0^{2\pi n}h\left(t,z_{m/n},\psi+\frac{2\pi}{n}+\frac{m}{n}t\right)dt=$$

$$= \int\limits_{2\pi k}^{2\pi(n+k)} h\left(t, z_{m/n}, \psi + \frac{2\pi}{n} + \frac{m}{n}t\right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi n} h\left(t + 2\pi k, z_{m/n}, \psi + \frac{2\pi}{n} + \frac{m}{n}t + \frac{2\pi mk}{n} + 2\pi l\right) dt = F_{m/n}(\psi).$$

Функція $F_{m/n}(\psi)$ має тоді принаймні дві критичні точки на проміжку $\left[0, \frac{2\pi}{n}\right)$. А тому в загальному випадку, коли обидві ці критичні точки невироджені, можна вказати таке $\varepsilon_{m/n}$, що при всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{m/n}]$ функція $F_T(v(\psi), \psi)$ матиме $2n$ критичних точок, і відтак насправді існуватимуть $2n$ збурених (n/m)-ультрасубгармонік. Однак $\varepsilon_{m/n}$ залежить, зокрема, від оцінки знизу величини $\left|F''_{m/n}(0)\right|$, яка в свою чергу певним чином виражається через коефіцієнти Фур'є функції $h(t, z_{m/n}, \psi)$ і може вкрай нерегулярно залежати від m/n. Лише за певних додаткових умов для $z_{m/n}$, близьких до z^*, величину $\left|F''_{m/n}(0)\right|$ вдається виразити через функції Мельникова та їхні модифікації [3, 4, 7]. Через цю обставину в подальшому будемо враховувати існування двох (а не $2n$) критичних точок функції $F_{T_n}(v(\psi), \psi)$.

5. Основні теореми. Зафіксувавши достатньо мале $\delta_0 > 0$ так, щоб

$$\omega(z_* + 2\delta_0) < \omega(z_0 - 2\delta_0), \qquad \omega(z_0 + 2\delta_0) > \omega(z^* - 2\delta_0),$$

розіб'ємо множину ультрасубгармонік і відповідних точок $z_{m/n}$ на чотири підмножини:

I. *Ультрасубгармоніки зони строго регулярних значень частотної функції* визначаються точками $z_{m/n}$, для яких при деякому фіксованому $\delta_0 > 0$ справджуються нерівності

$$\min\left\{z^* - z_{m/n}, z_{m/n} - z_*\right\} > 2\delta_0, \qquad \left|z_0 - z_{m/n}\right| \geq 2\delta_0.$$

Точки першої підмножини знаходяться у взаємно однозначній відповідності з раціональними числами незв'язного об'єднання півінтервалів

$$I_{11} := \big(\omega(z_* + 2\delta_0), \omega(z_0 - 2\delta_0)\big], \qquad I_{12} := \big(\omega(z^* - 2\delta_0), \omega(z_0 + 2\delta_0)\big].$$

II. *Ультрасубгармоніки зони слабкорегулярних значень частотної функції* визначаються точками $z_{m/n}$, які задовольняють нерівності $0 < \left|z_0 - z_{m/n}\right| \leq 2\delta_0$. Точки другої підмножини знаходяться у взаємно однозначній відповідності з раціональними числами незв'язного об'єднання інтервалів

$$I_{21} := (\omega(z_0 - 2\delta_0), \omega(z_0)), \qquad I_{22} := (\omega(z_0 + 2\delta_0), \omega(z_0)).$$

III. *Ультрасубгармоніки примежової зони гіперболічного типу* визначаються точками $z_{m/n} \in \in [z^* - 2\delta_0, z^*)$. Точки третьої підмножини знаходяться у взаємно однозначній відповідності з раціональними числами півінтервалу $I_3 := \big(0, \omega(z^* - 2\delta_0)\big]$.

IV. *Ультрасубгармоніки примежової зони еліптичного типу* визначаються точками $z_{m/n} \in \in (z_*, z_* + 2\delta_0]$. Точки четвертої підмножини знаходяться у взаємно однозначній відповідності з раціональними числами півінтервалу $I_4 := \big(\omega_*, \omega(z_* + 2\delta_0)\big]$.

Щоб використати теорему 1 для досягнення нашої мети — встановлення оцінки знизу для залежності від ε кількості збурених ультрасубгармонік, необхідно мати оцінки норм $|\cdot|_\delta$ правих частин системи (12) та їхніх похідних. Відповідні оцінки залежать від того, до якої підмножини належить точка $z_{m/n}$. Для їх встановлення, використовуючи лему 1, потрібно спершу оцінити похідні функцій $p = P(z, \varphi)$, $q = Q(z, \varphi)$, які виражають канонічні змінні (p, q) через неканонічні змінні (z, φ) типу дія-кут. Відповідні обґрунтування наведено в п. 6.

Основні результати щодо оцінки кількості збурених ультрасубгармонік будуть сформульовані з використанням важливої теоретико-числової функції

$$\Phi(N) := \sum_{n=1}^{N} \varphi(n),$$

де $\varphi(\cdot)$ — функція Ейлера ($\varphi(n)$ — кількість натуральних чисел, взаємно простих з натуральним n, які не перевищують n). Відомо, що $\Phi(N) \sim 3N^2/\pi^2$. Більше того, в [10] встановлено: існує абсолютна стала C_Φ така, що

$$\frac{3N^2}{\pi^2}\left(1 - \frac{C_\Phi\sqrt{\ln\ln N}}{N}\right) \le \Phi(N) \le \frac{3N^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{C_\Phi\sqrt{\ln\ln N}}{N}\right). \tag{19}$$

За допомогою функції $\Phi(\cdot)$ побудуємо функцію $\Xi(\cdot,\cdot)$ двох аргументів — натурального числа та півінтервалу (інтервалу) — за правилом

$$\Xi(N, I) := \begin{cases} \left((b-a) + \dfrac{\mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(b) + \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(a) - 2}{N}\right)\Phi(N), & \text{якщо } I = (a, b], \\ \left((b-a) + \dfrac{\mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(b) + \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(a) - 2}{N}\right)\Phi(N) - \mathbf{I}_{\mathbb{Q}}(b), & \text{якщо } I = (a, b), \end{cases} \tag{20}$$

де через $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\cdot)$ позначено індикатор (характеристичну функцію) множини $\mathcal{A}$. Зрозуміло, що

$$\Xi(N, I) \sim \frac{3N^2}{\pi^2}\,|I|\,, \quad N \to \infty,$$

де $|I| := (b - a)$, а формули (19), (20) дають достатньо вичерпне уявлення про поведінку похибки $\Xi(N, I) - \dfrac{3N^2}{\pi^2}\,|I|$.

Збурення ультрасубгармонік зони строго регулярних значень частотної функції. Очевидно, що можна вказати такі додатні сталі c_0, C_0, щоб для всіх точок першої підмножини і всіх $(t, y, \psi) \in \mathbb{R}\times[-\delta_0, \delta_0] \times [0, 2\pi]$ справджувалися нерівності $|\theta'| \ge c_0$ та

$$\max\left\{|Y|\,, \left|Y'_y\right|, \left|Y'_\psi\right|, |\Psi|\,, \left|\Psi'_y\right|, \left|\Psi'_\psi\right|, \left|\theta'\right|\right\} \le C_0. \tag{21}$$

Проаналізувавши умови, які необхідно накласти на мализну ε, природно покласти

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_1}{n^2}, \qquad \delta = \delta_0, \qquad \rho = \frac{\delta}{2}.$$

Тоді одночасно для всіх точок першої підмножини значення μ_1 можна вибрати так, щоб при $\varepsilon < \varepsilon_1$ задовольнити всі чотири нерівності в умовах теореми 1. Звідси випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$ кількість збурених ультрасубгармонік, породжених точками першої підмножини, не менша за загальну кількість тих раціональних чисел із проміжків I_{11} та I_{12}, у яких знаменники не перевищують $\sqrt{\mu_1/\varepsilon}$. Позначивши через $\lfloor a \rfloor$ цілу частину числа a, з огляду на лему 12 дістаємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай виконано умови* а) – г) *пп.* 3, 4. *Тоді існують додатні числа* μ_1, ε_1 *такі, що при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *кількість збурених ультрасубгармонік зони строго регулярних значень частотної функції не менша за*

$$\Xi\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon}}\right\rfloor, I_{11}\right) + \Xi\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon}}\right\rfloor, I_{12}\right) \sim \frac{3\mu_1}{\pi^2\varepsilon}\big(|I_{11}| + |I_{12}|\big), \quad \varepsilon \to 0.$$

Збурення ультрасубгармонік зони слабкорегулярних значень частотної функції. Для кожного $z_{m/n}$ знайдеться точка $\zeta_{m/n}$ у проміжку між $z_{m/n}$ і z_0 така, що

$$\left|\frac{m}{n} - \omega_0\right| = \big|\omega(z_{m/n}) - \omega(z_0)\big| = \big|\omega''(\zeta_{m/n})\big|\,(z_{m/n} - z_0)^2.$$

Враховуючи припущення невиродженості (3), отримуємо

$$c_1 := \min_{z\in[z_0-2\delta_0, z_0+2\delta_0]} \big|\omega''(z)\big| > 0. \tag{22}$$

Покладаючи $C_1 := \max_{z\in[z_0-2\delta_0, z_0+2\delta_0]} |\omega''(z)|$, маємо

$$\frac{1}{C_1}\sqrt{\left|\frac{m}{n} - \omega_0\right|} \le \big|z_{m/n} - z_0\big| \le \frac{1}{c_1}\sqrt{\left|\frac{m}{n} - \omega_0\right|}.$$

Як бачимо, оцінка знизу для $\big|z_{m/n} - z_0\big|$ залежить від арифметичних властивостей числа ω_0. Розглянемо найхарактерніший випадок: існують сталі $\gamma_0 > 0$, $\varkappa_0 \ge 1$ такі, що

$$\left|\frac{m}{n} - \omega_0\right| \ge \frac{\gamma_0}{n^{\varkappa_0}} \quad \forall\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{m}{n} \ne \omega_0. \tag{23}$$

Наприклад, якщо $\omega_0 = m_0/n_0$ є раціональним, то $\varkappa_0 = 1$, $\gamma_0 = 1$. З іншого боку, як відомо [11], при $\varkappa_0 > 2$ розглядуваний випадок має місце для майже всіх ірраціональних чисел.

Тепер, забезпечивши вибором δ_0 виконання нерівності $\delta_0 \le \sqrt{\gamma_0}/(2C_1)$, покладемо

$$\delta = \delta_{m/n} := \frac{\big|z_{m/n} - z_0\big|}{2}, \qquad \rho = \frac{\delta}{2}.$$

Тоді для будь-якої точки $z_{m/n}$ другої підмножини виконуватиметься нерівність

$$\delta_0 n^{-\varkappa_0/2} \le \delta \le \delta_0.$$

Зрозуміло, що нерівність (21) можна вважати виконаною і для точок другої підмножини, а з урахуванням (22) маємо

$$c_1\delta \le \min_{|y|\le\delta} \left|\theta'(y)\right|.$$

Відтак, проаналізувавши умови, які необхідно накласти на мализну ε, природно покласти

$$\varepsilon_2 = \frac{\mu_2}{n^{\varkappa_0+1}},$$

і тоді одночасно для всіх точок $z_{m/n}$ другої підмножини значення μ_2 можна вибрати так, щоб при $\varepsilon \le \varepsilon_2$ задовольнити всі чотири нерівності в умовах теореми 1. Звідси випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_2$ кількість збурених ультрасубгармонік зони слабкорегулярних значень частотної функції дорівнює загальній кількості тих раціональних чисел із проміжків I_{21} та I_{22}, у яких знаменник не перевищує $(\mu_2/\varepsilon)^{1/(\varkappa_0+1)}$. Отже, з урахуванням леми 12 маємо такий результат.

Теорема 3. *Нехай виконано умови* а) – г) *пп.* 3, 4 *і число* ω_0 *задовольняє нерівності* (23). *Тоді існують додатні числа* μ_2, ε_2 *такі, що при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *кількість збурених ультрасубгармонік зони слабкорегулярних значень частотної функції не менша за*

$$\Xi\left(\left\lfloor\frac{\mu_2}{\varepsilon}\right\rfloor^{1/(\varkappa_0+1)}, I_{21}\right) + \Xi\left(\left\lfloor\frac{\mu_2}{\varepsilon}\right\rfloor^{1/(\varkappa_0+1)}, I_{22}\right) \sim \frac{3}{\pi^2}\left(\frac{\mu_2}{\varepsilon}\right)^{2/(\varkappa_0+1)}\left(|I_{11}| + |I_{12}|\right), \quad \varepsilon \to 0.$$

Для аналізу випадку з точками третьої та четвертої підмножин скористаємося наведеним нижче твердженням, яке безпосередньо випливає з лем 6, 9.

Лема 2. *Нехай* $H \in \mathrm{C}^5\left(M^2 \mapsto \mathbb{R}\right)$ *і* z^* — *таке критичне значення функції* H, *що множина* $\partial D \cap H^{-1}(z^*)$ *містить скінченну кількість критичних точок цієї функції, до того ж всі вони гіперболічні й невироджені. Тоді існують такі додатні числа* r^*, C^* *і* c^*, *що для всіх раціональних* m/n *таких, що* $\left|z^* - z_{m/n}\right| < r^*$ *при* $\delta = \delta_{m/n} := \dfrac{1}{2}\left|z^* - z_{m/n}\right|$, *справджуються оцінки*

$$|Y|_\delta \le C^*, \qquad \left|Y'_y\right|_\delta \le \frac{C^*}{\delta}, \qquad \left|Y'_\psi\right|_\delta \le C^*\left|\ln\delta\right|, \qquad \left|\theta'\right|_\delta \le \frac{C^*}{\delta\ln^2\delta},$$

$$|\Psi|_\delta \le \frac{C^*}{\delta\left|\ln\delta\right|}, \qquad \left|\Psi'_y\right|_\delta \le \frac{C^*}{\delta^2\left|\ln\delta\right|}, \qquad \left|\Psi'_\psi\right|_\delta \le \frac{C^*}{\delta}, \qquad \min_{y\in[-\delta,\delta]}\left|\theta'\right| \ge \frac{c^*}{\delta\ln^2\delta}.$$

Якщо ж z_* — *таке критичне значення функції* H, *що* $\partial D \cap H^{-1}(z_*) = \{(p_*, q_*)\}$ — *критична точка еліптичного типу, то існують такі додатні числа* $r_* > 0$, C_* *і* c_*, *що для всіх раціональних* m/n *таких, що* $\left|z_* - z_{m/n}\right| < r_*$ *при* $\delta = \delta_{m/n} := \dfrac{1}{2}\left|z_* - z_{m/n}\right|$, *справджуються оцінки*

$$|Y|_\delta \le C_*\sqrt{\delta}, \qquad \left|Y'_y\right|_\delta \le \frac{C_*}{\sqrt{\delta}}, \qquad \left|Y'_\psi\right|_\delta \le C_*\sqrt{\delta}, \qquad \left|\theta'\right|_\delta \le C_*,$$

$$|\Psi|_\delta \le \frac{C_*}{\sqrt{\delta}}, \qquad \left|\Psi'_y\right|_\delta \le \frac{C_*}{\delta^{3/2}}, \qquad \left|\Psi'_\psi\right|_\delta \le \frac{C_*}{\sqrt{\delta}}, \qquad \min_{y\in[-\delta,\delta]}\left|\theta'\right| \ge c_*.$$

***Зауваження* 1.** Усі сталі, які фігурують у цьому твердженні, можна в явному вигляді виразити у вигляді раціональних функцій від сталих, які фігурують у лемах 3, 7, 6 та 9. Наприклад, $c^* = \dfrac{2\pi c_T^{[1]}}{3\left(C_T^{[0]}\right)^2}$.

Далі можемо вважати, що $r_* = r^* = 2\delta_0$.

Збурення ультрасубгармонік примежової зони гіперболічного типу. Згідно з лемою 3, для кожної точки $z_{m/n}$ третьої підмножини маємо

$$c_T^{[0]} \ln \frac{1}{z^* - z_{m/n}} \le T(z_{m/n}) = \frac{2\pi n}{m} \le C_T^{[0]} \ln \frac{1}{z^* - z_{m/n}},$$

звідки

$$\exp\left[-\frac{2\pi n}{c_T^{[0]} m}\right] \le z^* - z_{m/n} \le \exp\left[-\frac{2\pi n}{C_T^{[0]} m}\right].$$

З оцінок леми 2 та умов на мализну ε випливає, що

$$\varepsilon = O\left(\min\left\{\frac{\delta\,|\ln\delta|}{n^2},\ \frac{\delta}{n},\ \frac{\delta}{|\ln\delta|}\right\}\right).$$

Тому, якщо покласти

$$\varepsilon_3 = \frac{\mu_3}{n} \exp\left[-\frac{2\pi n}{c_T^{[0]}}\right], \tag{24}$$

то одночасно для всіх точок третьої підмножини значення μ_3 можна вибрати так, щоб при $\varepsilon < \varepsilon_3$ задовольнити всі чотири нерівності в умовах теореми 1. Звідси випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_3$ кількість збурених ультрасубгармонік примежової зони гіперболічного типу дорівнює кількості тих раціональних чисел з проміжку I_3, у яких знаменник не перевищує кореня $n = N^*(\varepsilon)$ рівняння щодо n вигляду (24).

***Зауваження* 2.** З огляду на зауваження 3 за рахунок мализни δ_0 сталу $c_T^{[0]}$ можна зробити як завгодно близькою до числа $1/\lambda^*$.

Позначимо через $G(\cdot)$ функцію, обернену до $g(u) = u + \ln u$, $u > 0$. Очевидно, що $G(u) \sim u$ при $u \to \infty$. На підставі наведених вище міркувань та з урахуванням леми 12 дістаємо таке твердження.

Теорема 4. *Нехай виконано умови* а) – г) *пп.* 3, 4. *Тоді існують додатні числа* μ_3, ε_3 *такі, що при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ *кількість збурених ультрасубгармонік примежової зони гіперболічного типу не менша за*

$$\Xi\left(\left\lfloor \frac{c_T^{[0]}}{2\pi} G \circ \ln\left(\frac{2\pi\mu_3}{c_T^{[0]}\varepsilon}\right)\right\rfloor, I_3\right) \sim \frac{3}{4}\left[\frac{c_T^{[0]}}{\pi^2}\right]^2 |I_3| \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Збурення ультрасубгармонік примежової зони еліптичного типу. Перенесемо початок координат у критичну точку еліптичного типу. Так само, як і при розгляді точок другої підмножини, припустимо, що існують сталі $\gamma_* > 0$, $\varkappa_* \geq 1$ такі, що

$$\left|\frac{m}{n} - \omega_*\right| \geq \frac{\gamma_*}{n^{\varkappa_*}} \quad \forall\, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{m}{n} \neq \omega_*. \tag{25}$$

Оскільки гамільтоніан $H(p,q)$ 5 разів неперервно диференційовний в околі початку координат, то в деякому околі точки $(0,0)$ існує канонічна заміна змінних

$$p = u + O(u^2 + v^2), \qquad q = v + O(u^2 + v^2),$$

яка зводить його до нормальної форми степеня 5 [1]:

$$H = \bar{H}_5\,(u,\,v) + o(|u| + |v|)^5, \tag{26}$$

де

$$\bar{H}_5\,(u,\,v) = \frac{1}{2b}\left[\,\left(u^2 + v^2\right) + \frac{\Omega}{4}\left(u^2 + v^2\right)^2\,\right]. \tag{27}$$

Припустимо, що має місце невироджений випадок, коли $\Omega \neq 0$. Тоді згідно з лемою 7 для точок четвертої підмножини маємо нерівності

$$\frac{\gamma_*}{n^{\varkappa_*}} \leq \left|\frac{m}{n} - \omega_*\right| = \left|\omega(z_{m/n}) - \omega(z_*)\right| = \frac{\left|T(z_{m/n}) - 2\pi b\right|}{bT(z_{m/n})} \leq \frac{\bar{C}_T^{[0]}}{bT(z_0)}\left(z_{m/n} - z_*\right).$$

Забезпечивши вибором δ_0 виконання нерівності $\delta_0 \leq \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{bT(z_0)}{\bar{C}_T^{[0]}}\right]$ і поклавши

$$\delta = \delta_{m/n} := \frac{z_{m/n} - z_*}{2}, \qquad \rho = \frac{\delta}{2},$$

дістанемо

$$\delta_0 n^{-\varkappa_*} \leq \delta \leq \delta_0.$$

З оцінок леми 2 та умов на мализну ε випливає, що

$$\varepsilon = O\left(\min\left\{\frac{\sqrt{\delta}}{n},\ \delta^{3/2},\ \frac{1}{\sqrt{\delta}n^2}\right\}\right).$$

Тому, якщо покласти

$$\varepsilon_4 = \frac{\mu_4}{n^{3\varkappa_*/2}},$$

то одночасно для всіх точок четвертої підмножини значення μ_4 можна вибрати так, щоб при $\varepsilon < \varepsilon_4$ задовольнити всі чотири нерівності в умовах теореми 1. Звідси випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_4$ кількість збурених ультрасубгармонік примежової зони еліптичного типу дорівнює кількості тих раціональних чисел з проміжку I_4, у яких знаменник не перевищує $(\mu_4/\varepsilon)^{2/(3\varkappa_*)}$. Як наслідок, маємо таке твердження.

Теорема 5. *Нехай виконано умови* а) – г) *пп.* 3, 4, *число* ω_* *задовольняє нерівності* (25) *і коефіцієнт* Ω *в нормальній формі гамільтоніана* (26) *в околі еліптичного положення рівноваги відмінний від* 0. *Тоді існують додатні числа* μ_4, ε_4 *такі, що при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4)$ *кількість збурених ультрасубгармонік примежової зони еліптичного типу не менша за*

$$\Xi\left(\left\lfloor\frac{\mu_4}{\varepsilon}\right\rfloor^{1/(2\varkappa_*)}, I_4\right) \sim \frac{3}{\pi^2}\left(\frac{\mu_4}{\varepsilon}\right)^{4\varkappa_*/3}|I_4|, \quad \varepsilon \to 0.$$

6. Допоміжні леми. В [4] було отримано зображення періоду $T(z)$ як функції віддалі замкненої кривої $H^{-1}(z)$ до сепаратриси — межі області D. При цьому припускалося, що гамільтоніан H нескінченно диференційовний. Лему, яку наведено нижче, можна розглядати як певний аналог зазначеного результату для випадку, коли H має п'ять неперервних похідних. При доведенні цієї леми використовується скінченно диференційовний варіант леми Морса. Оскільки у відомих нам джерелах (див., наприклад, [12]) наводиться гладкий варіант леми Морса, ми повністю наводимо відповідне доведення для скінченно диференційовних функцій у кінці цього пункту (лема 11).

Лема 3. *Нехай* $H \in \mathrm{C}^5\left(M^2 \mapsto \mathbb{R}\right)$ *і* z^* — *таке критичне значення функції* H, *що множина* $\partial D \cap H^{-1}(z^*)$ *містить скінченну кількість критичних точок цієї функції, до того ж всі вони гіперболічні й невироджені. Тоді знайдуться додатні сталі* r^*, $c_T^{[j]}, C_T^{[j]}$, $j = 0, 1, 2$, *такі, що при* $z \in (z^* - r^*, z^*)$ *справджуються нерівності*

$$c_T^{[0]} \ln\frac{1}{z^* - z} \leq T(z) \leq C_T^{[0]} \ln\frac{1}{z^* - z}, \qquad \frac{c_T^{[j]}}{(z^* - z)^j} \leq T^{(j)}(z) \leq \frac{C_T^{[j]}}{(z^* - z)^j}, \quad j = 1, 2.$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли критичною гіперболічною невиродженою точкою гамільтоніана є початок координат, до того ж $H(0,0) = 0$. Тоді можна ввести локальні канонічні координати, в яких гамільтоніан записується у вигляді $H(p,q) = pq/a + O\left((p^2+q^2)^{3/2}\right)$, де a — дійсне число. За лемою Морса існує (неканонічна) локальна заміна змінних класу C^3

$$p = u + O(u^2 + v^2), \qquad q = v + O(u^2 + v^2)$$

така, що в деякому r-квадраті $S_r = [-r, r]^2$, де $r \in (0,1)$, гамільтоніан набирає вигляду $H = uv/a$. Позначимо через $\Delta(u,v)$ якобіан зазначеної заміни. Очевидно, що $\Delta(u,v) = 1 + O\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$. Тоді симплектична структура в координатах u, v набирає вигляду $\omega^2 = \Delta(u,v)du \wedge dv$, а рівняння руху з гамільтоніаном uv/a — вигляду

$$\dot{u} = -\frac{u}{a\Delta(u,v)}, \qquad \dot{v} = \frac{v}{a\Delta(u,v)}.$$

Обчислимо час проходження ділянки лінії рівня $uv = z$, де $0 < z < r^2$, яка розташована в перетині $S_r \cap \{u > 0, v > 0\}$. Внаслідок заміни часу $t \to s$ за формулою

$$dt = \Delta(u,v)ds$$

отримуємо систему

$$\frac{du}{ds} = -u, \qquad \frac{dv}{ds} = v,$$

і дугу, про яку йшлося вище, можна задати рівняннями

$$u = re^{-s}, \qquad v = \frac{z}{r}e^s, \qquad s \in \left[0, \ln\frac{r^2}{z}\right].$$

Тоді час проходження цієї дуги дорівнює

$$\tau(z) = a \int\limits_0^{\ln r^2/z} \Delta\left(re^{-s}, \frac{z}{r}e^s\right) ds.$$

Як наслідок,

$$\left|\tau(z) - a\ln\frac{r^2}{z}\right| \leq a \int\limits_0^{\ln r^2/z} \left|\Delta\left(re^{-s}, \frac{z}{r}e^s\right) - 1\right| ds \leq$$

$$\leq a \max_{S_r}\left(\left|\Delta'_u\right| + \left|\Delta'_v\right|\right) \int\limits_0^{\ln r^2/z} \left(re^{-s} + \frac{z}{r}e^s\right) ds =$$

$$= 2ar\left(1 - \frac{z}{r^2}\right) \max_{S_r}\left(\left|\Delta'_u\right| + \left|\Delta'_v\right|\right), \quad 0 < z \leq r^2.$$

Враховуючи, що $\Delta \in \mathrm{C}^2\left(S_r \mapsto \mathbb{R}\right)$, маємо

$$\tau'(z) = -\frac{a}{z}\Delta\left(\frac{z}{r}, r\right) + a \int\limits_0^{\ln r^2/z} \Delta'_v\left(re^{-s}, \frac{z}{r}e^s\right)\frac{e^s}{r}ds,$$

$$\tau''(z) = +\frac{a}{z^2}\Delta\left(\frac{z}{r}, r\right) - \frac{a}{rz}\Delta'_u\left(\frac{z}{r}, r\right) - \frac{ar}{z^2}\Delta'_v\left(\frac{z}{r}, r\right) + a \int\limits_0^{\ln r^2/z} \Delta''_{vv}\left(re^{-s}, \frac{z}{r}e^s\right)\frac{e^{2s}}{r^2}ds,$$

звідки при відповідному виборі r дістаємо

$$-\frac{3a}{2} \leq -a\max_{S_r}|\Delta| - ar\max_{S_r}\left|\Delta'_v\right| \leq z\tau'(z) \leq$$

$$\leq -a\min_{S_r}|\Delta| + ar\max_{S_r}\left|\Delta'_v\right| \leq -\frac{a}{2}, \quad 0 < z \leq r^2,$$

і аналогічно

$$\frac{a}{2} \leq z^2\tau''(z) \leq \frac{3a}{2}, \quad 0 < z \leq r^2.$$

Подальші міркування збігаються з тими, що містяться в [4] і ґрунтуються на тому, що загальний час проходження ділянок лінії M_z, які не перетинають r-квадратів з центрами в гіперболічних критичних точках, можна при $0 \le z^* - z \le r^2$ рівномірно обмежити деякою сталою. При цьому слід зауважити, що оскільки $T(z) \to +\infty$ при $z \to z^* - 0$, то похідні періоду при цьому прямують саме до $+\infty$.

Лему 3 доведено.

***Зауваження* 3.** За рахунок мализни числа $r^* < r$ сталу $c_T^{[0]}$ можна зробити як завгодно близькою до числа $a = 1/\lambda^*$, де λ^* — мінімальне з додатних власних чисел матриць лінеаризацій незбуреної системи в гіперболічних критичних точках функції H, розташованих на множині M_{z^*}.

Оцінимо похідні змінних p, q за змінними z, φ до другого порядку включно поблизу критичної множини рівня M_{z^*}. Зокрема, з'ясуємо, як поводять себе ці похідні при $z \to z^* - 0$. З цією метою насамперед оцінимо знизу функцію $\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2$ на кривій M_z. Зауважимо, що аналогічні оцінки для цієї функції справджуватимуться і при $z \to z_* + 0$.

Лема 4. *Покладемо $x = (p, q)$ і припустимо, що x^* — невироджена ізольована критична точка функції H. Тоді можна вказати замкнений круг $\bar{U}$ з центром в x^* і додатні числа k_*, k^* такі, що*

$$k_* \left|z - z^*\right| \le \left[H'(x)\right]^2 \le k^* \left|z - z^*\right| \quad \forall x \in \bar{U} \cap M_z.$$

Доведення. Без обмеження загальності вважаємо, що $x^* = 0$. Нехай $\bar{U}$ — замкнений круг з центром у початку координат, який не містить інших критичних точок функції H і в якому матриця Гессе цієї функції невироджена. В $\bar{U}$ маємо зображення

$$\left[H'(x)\right]^2 = \langle A(x)x, x\rangle, \qquad A(x) := \left[\int\limits_0^1 H''(sx)ds\right]^2,$$

і

$$H(x) - z^* = \langle B(x)x, x\rangle, \qquad z^* := H(0), \qquad B(x) := \int\limits_0^1 t \int\limits_0^1 H''(tsx)dsdt.$$

Якщо круг $\bar{U}$ досить малий, то обидві матриці $A(x)$, $B(x)$ невироджені в ньому. Множина M_z в $\bar{U}$ задається рівнянням $\langle B(x)x, x\rangle = z - z^*$. Отже, знайдуться додатні сталі λ_B, Λ_B такі, що в точках цієї множини справджуються нерівності

$$\lambda_B \left\|x\right\|^2 \le \left|z - z^*\right| \le \Lambda_B \left\|x\right\|^2.$$

З іншого боку, знайдуться додатні сталі λ_A, Λ_A такі, що в $\bar{U}$ маємо

$$\lambda_A \left\|x\right\|^2 \le \left[H'(x)\right]^2 \le \Lambda_A \left\|x\right\|^2.$$

Таким чином, лему 4 доведено, до того ж $k_* = \dfrac{\lambda_A}{\Lambda_B}$, $k^* = \dfrac{\Lambda_A}{\lambda_B}$.

Тепер доведемо таке твердження.

Лема 5. *За виконання умов леми* 3 *додатні числа* r^*, C_z, C_φ, C_{zz}, $C_{z\varphi}$, $C_{\varphi\varphi}$ *можна вибрати так, щоб для всіх* $\varphi \in [0, 2\pi]$ *при* $|z - z^*| \leq r^*$ *справджувалися нерівності*

$$\max\left\{\left|p'_z\right|, \left|q'_z\right|\right\} \leq \frac{C_z}{|z - z^*|}, \qquad \max\left\{\left|p'_\varphi\right|, \left|q'_\varphi\right|\right\} \leq C_\varphi \left|\ln|z - z^*|\right|,$$

$$\max\left\{\left|p''_{zz}\right|, \left|q''_{zz}\right|\right\} \leq \frac{C_{zz}}{|z - z^*|^2},$$

$$\max\left\{\left|p''_{z\varphi}\right|, \left|q''_{z\varphi}\right|\right\} \leq C_{z\varphi}\frac{\left|\ln|z - z^*|\right|}{|z - z^*|}, \qquad \max\left\{\left|p''_{\varphi\varphi}\right|, \left|q''_{\varphi\varphi}\right|\right\} \leq C_{\varphi\varphi}\ln^2|z - z^*|.$$

Доведення. Використавши формули (6), (10), нерівність $|f| \leq 2\pi\left|f'_\varphi\right|$ та лему 3, оцінимо $|f|$ та $|f'_z|$. При цьому слід взяти до уваги, що в околі кожної критичної точки функція $\left(H'_p\right)^2 + \left(H'_q\right)^2$на кривій M_z допускає оцінку знизу, встановлену лемою 4. Як наслідок, отримуємо оцінки

$$f = O\left(\frac{1}{|z - z^*|\left|\ln|z - z^*|\right|}\right), \qquad f = O\left(\frac{1}{|z - z^*|\ln^2|z - z^*|}\right)$$

відповідно в околах та поза околами критичних точок. Після цього за формулами (4), (5) дістаємо оцінки в околах та поза околами критичних точок для похідних p'_z, q'_z, p'_φ, q'_φ, наслідком яких є перші дві нерівності леми 5. Дві останні нерівності цієї леми одержимо, здиференціювавши відповідно за змінними z та φ рівності (5). Для похідної f'_z оцінки в околах та поза околами критичних точок з урахуванням (10) відповідно мають вигляд

$$f'_z = O\left(\frac{1}{|z - z^*|^2}\right), \quad f'_z = O\left(\frac{1}{|z - z^*|^2\ln^2|z - z^*|}\right).$$

Нарешті, використавши ці оцінки та здиференціювавши за змінною z рівності (4), одержимо потрібні оцінки для p''_{zz}, q''_{zz}.

Лему 5 доведено.

Як наслідок доведеної леми дістаємо оцінки частинних похідних функції h за змінними z, φ до другого порядку включно поблизу критичної множини рівня M_{z^*}.

Лема 6. *За виконання умов леми* 3 *додатні числа* r^*, K_z, K_φ, K_{zz}, $K_{z\varphi}$, $K_{\varphi\varphi}$ *можна вибрати так, щоб для всіх* $\varphi \in [0, 2\pi]$ *при* $|z - z^*| \leq r^*$ *справджувалися нерівності*

$$\left|h'_z\right| \leq \frac{K_z}{|z - z^*|}, \qquad \left|h'_\varphi\right| \leq K_\varphi\left|\ln|z - z^*|\right|,$$

$$\left|h''_{zz}\right| \leq \frac{K_{zz}}{|z - z^*|^2}, \qquad \left|h''_{z\varphi}\right| \leq \frac{K_{z\varphi}\left|\ln|z - z^*|\right|}{|z - z^*|}, \qquad \left|h''_{\varphi\varphi}\right| \leq K_{\varphi\varphi}\ln^2|z - z^*|.$$

Проаналізуємо тепер випадок, коли z_* — критичне значення функції H і $\partial D \cap H^{-1}(z_*) = \{(p_*, q_*)\}$ — критична точка еліптичного типу. Без обмеження загальності міркувань далі вважаємо, що $\{(p_*, q_*)\} = (0, 0)$ і $z_* = 0$.

Перейшовши до канонічної полярної системи координат $u = \sqrt{2r}\cos\varphi,\ v = \sqrt{2r}\sin\varphi$, дістанемо

$$H = \left[H_5\left(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi\right) + o\left(\rho^5\right)\right]_{\rho=\sqrt{2r}}.$$

Тут функція змінних ρ, φ у квадратних дужках 5 разів неперервно диференційовна на множині $[0, \rho_0) \times \mathbb{R}$ при деякому додатному $\rho_0 > 0$ і 2π-періодична щодо φ. Розглянемо тепер функцію $F\left(z, r, \varphi\right) = H\left(\sqrt{2r}\cos\varphi,\ \sqrt{2r}\sin\varphi\right) - z$. Ця функція є двічі неперервно диференційовною щодо $(r, \varphi) \in [0, \rho_0^2/2)\times\mathbb{R}$ і 5 разів неперервно диференційовною на множині $(r, \varphi) \in (0, \rho_0^2/2)\times \times \mathbb{R}$. Оскільки $F'_r(0, 0, \varphi) = 1/b \neq 0$, то за теоремою про неявну функцію при деякому $z_0 > > 0$ лінію рівня $H = z$ можна однозначно подати у вигляді $r = R\left(z, \varphi\right)$ з двічі неперервно диференційовною на множині $[0, z_0) \times \mathbb{R}$ і 2π-періодичною щодо φ функцією $R\left(\cdot, \cdot\right)$, яка допускає зображення

$$R = bz - \frac{\Omega}{2}(bz)^2 + o\left(z^{5/2}\right).$$

Водночас ця функція 5 разів неперервно диференційовна на множині $(0, z_0) \times \mathbb{R}$.

Далі, здиференціювавши тотожність $H|_{r=R(z,\varphi)} \equiv z$ тричі по змінній z, можна знайти асимптотичні зображення для похідних $R'_z,\ R''_{zz},\ R'''_{zzz}$ при $z \to +0$. Оскільки система з гамільтоніаном H в полярних координатах має вигляд

$$\dot{r} = -H'_\varphi, \qquad \dot{\varphi} = H'_r \equiv \frac{1}{b}\left[1 + \Omega r + o\left(r^{3/2}\right)\right],$$

то з другого рівняння вздовж лінії $r = R\left(z, \varphi\right)$ знаходимо період $T(z)$ як функцію z:

$$T\left(z\right) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{H'{}_r|_{r=R(z,\varphi)}} = \int\limits_0^{2\pi} R'{}_z d\varphi = 2\pi b\left[1 - \Omega bz - o\left(z^{3/2}\right)\right],$$

звідки отримуємо

$$T'\left(z\right) = \int\limits_0^{2\pi} R''{}_{zz} d\varphi = -2\pi\Omega b^2 + o\left(z^{1/2}\right), \qquad T''\left(z\right) = \int\limits_0^{2\pi} R'''{}_{zzz} d\varphi = -\frac{2\pi b^2}{\sqrt{z}} o\left(1\right).$$

Звідси випливає таке твердження.

Лема 7. *Нехай $H \in \mathrm{C}^5\left(M^2 \mapsto \mathbb{R}\right)$ і z_* — таке критичне значення функції H, що множина $\partial D \cap H^{-1}(z_*)$ є невиродженою критичною точкою локального мінімуму, до того ж у формулі* (27) $\Omega \neq 0$. *Тоді знайдуться додатні сталі $r_*,\ \bar{C}_T^{[j]},\ j = 0, 1, 2$, такі, що при $|z - z_*| < r_*$ справджуються нерівності*

$$|T(z) - 2\pi b| \leq \bar{C}_T^{[0]}|z - z_*|,$$

$$\left|T'(z) + 2\pi\Omega b^2\right| \leq \bar{C}_T^{[1]}\sqrt{|z - z_*|}, \qquad \left|T''(z)\right| \leq \frac{\bar{C}_T^{[2]}}{\sqrt{|z - z_*|}}.$$

Тепер, міркуючи, як і при доведенні леми 5, отримуємо такий результат.

Лема 8. *За виконання умов леми 7 додатні числа r_*, $\bar{C}_z$, $\bar{C}_\varphi$, $\bar{C}_{zz}$, $\bar{C}_{z\varphi}$, $\bar{C}_{\varphi\varphi}$ можна вибрати так, щоб для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$ при $|z - z_*| \le r_*$ справджувалися нерівності*

$$\max\left\{\left|p_z'\right|, \left|q_z'\right|\right\} \le \frac{\bar{C}_z}{\sqrt{|z - z_*|}}, \qquad \max\left\{\left|p_\varphi'\right|, \left|q_\varphi'\right|\right\} \le \bar{C}_\varphi \sqrt{|z - z_*|},$$

$$\max\left\{\left|p_{zz}''\right|, \left|q_{zz}''\right|\right\} \le \frac{\bar{C}_{zz}}{|z - z_*|^{3/2}},$$

$$\max\left\{\left|p_{z\varphi}''\right|, \left|q_{z\varphi}''\right|\right\} \le \frac{\bar{C}_{z\varphi}}{\sqrt{|z - z_*|}}, \qquad \max\left\{\left|p_{\varphi\varphi}''\right|, \left|q_{\varphi\varphi}''\right|\right\} \le \bar{C}_{\varphi\varphi} \sqrt{|z - z_*|}.$$

У свою чергу з цієї леми випливає наступна лема.

Лема 9. *За виконання умов леми 7 додатні числа r, $\bar{K}_z$, $\bar{K}_\varphi$, $\bar{K}_{zz}$, $\bar{K}_{z\varphi}$, $\bar{K}_{\varphi\varphi}$ можна вибрати так, щоб для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$ при $|z - z_*| \le r_*$ справджувалися нерівності*

$$\left|h_z'\right| \le \frac{\bar{K}_z}{\sqrt{|z - z_*|}}, \qquad \left|h_\varphi'\right| \le \bar{K}_\varphi \sqrt{|z - z_*|},$$

$$\left|h_{zz}''\right| \le \frac{\bar{K}_{zz}}{|z - z_*|^{3/2}}, \qquad \left|h_{z\varphi}''\right| \le \frac{\bar{K}_{z\varphi}}{\sqrt{|z - z_*|}}, \qquad \left|h_{\varphi\varphi}''\right| \le \bar{K}_{\varphi\varphi} \sqrt{|z - z_*|}.$$

Доведемо лему про систему інтегральних нерівностей.

Лема 10. *Нехай неперервні і невід'ємні на $[0, T]$ функції $v_1(t)$ та $v_2(t)$ задовольняють на цьому відрізку нерівності*

$$v_1(t) \le 1 + \varepsilon \left[a_{11} \int\limits_0^t v_1(s) ds + a_{12} \int\limits_0^t v_2(s) ds\right],$$

$$v_2(t) \le (a_0 + \varepsilon a_{21}) \int\limits_0^t v_1(s) ds + \varepsilon a_{22} \int\limits_0^t v_2(s) ds$$

з невід'ємними числами a_0 та a_{kj}, $k, j = 1, 2$. Тоді

$$v_1(t) \le \mathrm{e}^{\varepsilon \bar{a} T} \mathrm{ch}\left(T \sqrt{\varepsilon a_{12} (a_0 + \varepsilon a_{21})}\right),$$

$$v_2(t) \le (a_0 + \varepsilon a) \mathrm{e}^{\varepsilon \bar{a} T} \mathrm{sh}\left(T \sqrt{\varepsilon a_{12} (a_0 + \varepsilon a_{21})}\right) / \sqrt{\varepsilon a_{12} (a_0 + \varepsilon a_{21})},$$

де $\bar{a} := \max_{i=1,2} a_{ii}$.

Доведення. Використовуючи векторну нерівність Гронуолла, дістаємо

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \leq \exp\left[T\begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ a_0 + \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq$$

$$\leq \mathrm{e}^{\varepsilon \bar{a} T} \exp\left[T\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon a_{12} \\ a_0 + \varepsilon a_{21} & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\varepsilon \bar{a} T} \mathrm{ch}\left(T\sqrt{\varepsilon a_{12}\left(a_0 + \varepsilon a_{21}\right)}\right) \\ (a_0 + \varepsilon a_{21}) \mathrm{e}^{\varepsilon \bar{a} T} \mathrm{sh}\left(T\sqrt{\varepsilon a_{12}\left(a_0 + \varepsilon a_{21}\right)}\right) / \sqrt{\varepsilon a_{12}\left(a_0 + \varepsilon a_{21}\right)} \end{pmatrix}.$$

Лему 10 доведено.

Оскільки при $0 < x \leq \ln\sqrt{2}$ справджуються нерівності $e^x \mathrm{sh}\, x / x < e^x \mathrm{ch}\, x \leq 3/2$, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Якщо* $\max\left\{\varepsilon \bar{a} T, T\sqrt{\varepsilon a_{12}\left(a_0 + \varepsilon a_{21}\right)}\right\} \leq \ln\sqrt{2}$, то $v_1(t) \leq \dfrac{3}{2}$ і $v_2(t) \leq \dfrac{3}{2}(a_0 + \varepsilon a_{21})T$.

Наступна лема стверджує, що показник гладкості дифеоморфізму, який приводить функцію до квадратичної форми в околі невиродженої критичної точки, максимум на дві одиниці менший за гладкість самої функції.

Лема 11 (лема Морса). *Нехай* $B(0)$ *— окіл нуля в* $\mathbb{R}^n$, $H(x) \in \mathrm{C}^k\left(B(0) \mapsto \mathbb{R}\right)$, $H(0) = 0$, $H'(0) = 0$ *і* $H''(0)$ *невироджена. Тоді існують окіл нуля* $\hat{B}(0) \in \mathbb{R}^n$ *і дифеоморфізм*

$$\xi(\cdot) \in \mathrm{C}^{k-2}\left(\hat{B}(0) \mapsto \xi\left(\hat{B}(0)\right) \subset B(0)\right)$$

такий, що $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) = E$ *і* $H(\xi(x)) = \dfrac{1}{2}H''(0)x^2$.

Доведення. Як і в [12], застосуємо гомотопічний метод. Запишемо $H(x)$ у вигляді

$$H(x) = \frac{1}{2}H''(0)x^2 + \varphi(x), \qquad \varphi(x) := H(x) - \frac{1}{2}H''(0)x^2.$$

Тоді

$$\varphi'(x) = H'(x) - H''(0)x = H'(x) - H'(0) - H''(0)x =$$

$$= \left[\int\limits_0^1 \left(H''(\theta x) - H''(0)\right) d\theta\right] x = G(x)x,$$

і очевидно, що $G(x) \in \mathrm{C}^{k-2}\left(B(0) \mapsto \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$, $\quad G(0) = 0$. Далі шукаємо систему $\dot{x} = f(t, x)$ таку, що $f(t, 0) \equiv 0$, і її розв'язок $\chi(t, x)$ задачі Коші $\chi(0, x) = x$, який би мав властивість

$$\frac{1}{2}H''(0)\chi^2(t, x) + t\varphi(\chi(t, x)) \equiv \frac{1}{2}H''(0)x^2.$$

Тоді шуканим дифеоморфізмом буде $\xi(\cdot) = \chi(1, \cdot)$. Диференціюємо

$$\big\langle \chi, H''(0) f(t, \chi) \big\rangle + t \big\langle \varphi'(\chi), f(t, \chi) \big\rangle = -\varphi(\chi),$$

звідки

$$\big\langle \chi, H''(0) f(t, \chi) \big\rangle + t \left\langle \chi, G(\chi) f(t, \chi) \right\rangle = - \left\langle \chi, \int\limits_0^1 \varphi'(\theta\chi) d\theta \right\rangle.$$

Отже, за праву частину шуканої системи достатньо взяти вектор-функцію, яка задовольняє рівність

$$\big[H''(0) + tG(\chi)\big] f(t, \chi) = - \int\limits_0^1 \varphi'(\theta\chi) d\theta,$$

тобто покласти

$$f(t, x) := - \big[H''(0) + tG(x)\big]^{-1} \int\limits_0^1 \varphi'(\theta x) d\theta \in \mathrm{C}^{k-2} \left(\tilde{B}(0) \mapsto \mathbb{R}^n\right),$$

відповідним чином вибравши окіл $\tilde{B}(0) \subset B(0)$. При цьому $f(t, 0) \equiv 0$, а тоді можна вказати такий окіл $\hat{B}(0) \subset \tilde{B}(0)$, що $\chi(t, x)$ існує і набуває значень в $\tilde{B}(0)$ при всіх $x \in \hat{B}(0)$ і $t \in [0, 1]$. Нарешті, легко бачити, що $\chi(1, x) = x + O(x^2)$.

Лему 11 доведено.

Кількість елементів скінченної множини $\mathcal{A}$ позначимо через $\#\mathcal{A}$; для дійсного числа a позначимо через $\lfloor a \rfloor$ його цілу частину, а через $\lceil a \rceil$ найменше ціле число, не менше за a. Елементарним наслідком результатів роботи [13] є наведене нижче твердження про кількість додатних раціональних чисел зі знаменниками, що не перевищують $N \in \mathbb{N}$, тобто кількість елементів множини

$$\mathbb{Q}_N := \left\{ \frac{m}{n} : \ m, \ n \in \mathbb{N}, \ \gcd(m, n) = 1, \ n \leq N \right\},$$

які містяться в заданому півінтервалі (інтервалі) $I \subset (0, \infty)$.

Лема 12. *Нехай* $0 \leq a < b < \infty$, $I := (a, b]$ *або* $I := (a, b)$. *Тоді* $\#\left(\mathbb{Q}_N \cap I\right) \geq \Xi(N, I)$, *де функцію* $\Xi(\cdot, \cdot)$ *визначено формулою* (20).

Доведення. Насамперед зауважимо, що множина $\mathbb{Q}_N$ одержується з послідовності Фері (Фарея) $\mathcal{F}_N$ (множини $\mathbb{Q}_N \cap (0, 1]$, впорядкованої за зростанням) усіма можливими зсувами на цілі невід'ємні числа, до того ж $\#\mathcal{F}_N = \Phi(N)$ і послідовність Фері симетрична відносно елемента $1/2$. Відтак можна важати, що $a \in [0, 1)$.

Нехай $I = (a, b]$. В [13] показано, що при $b \leq 1$ справджуються нерівності

$$\left(b - \frac{1 - \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(b)}{N} \right) \Phi(N) \leq \#\left(\mathbb{Q}_N \cap (0, b]\right) \leq \left(b + \frac{1 - \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(b)}{N} \right) \Phi(N),$$

а тому в цьому випадку

$$\#\left(\mathbb{Q}_N \cap I\right) = \#\left(\mathbb{Q}_N \cap (0,b]\right) - \#\left(\mathbb{Q}_N \cap (0,a]\right) \geq$$

$$\geq \left(b - \frac{1-\mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(b)}{N}\right)\mathit{\Phi}(N) - \left(a + \frac{1-\mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(a)}{N}\right)\mathit{\Phi}(N) = \Xi(N,I).$$

Якщо ж $b > 1$, то

$$\mathbb{Q} \cap I = \left(\mathbb{Q}_N \cap \left(a, \lceil a \rceil\right]\right) \cup \left(\mathbb{Q}_N \cap \left(\lceil a \rceil, \lfloor b \rfloor\right]\right) \cup \left(\mathbb{Q}_N \cap \left(\lfloor b \rfloor, b\right]\right),$$

до того ж вважаємо $(c, c] := \varnothing$ для довільного дійсного c. Тоді

$$\#\left(\mathbb{Q}_N \cap I\right) \geq \lceil a \rceil\, \mathit{\Phi}(N) - \left(a + \frac{1-\mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(a)}{N}\right)\mathit{\Phi}(N) +$$

$$+ \left(\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil\right)\mathit{\Phi}(N) + \left(b - \lfloor b \rfloor - \frac{1-\mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(b)}{N}\right)\mathit{\Phi}(N) = \Xi(N,I).$$

Якщо тепер $I = (a, b)$, то при $b \notin \mathbb{Q}$ всі оцінки не змінюються, а при $b \in \mathbb{Q}$, очевидно,

$$\#\left(\mathbb{Q}_N \cap I\right) = \#\left(\mathbb{Q}_N \cap (a,b]\right) - 1 \geq \Xi(N,I).$$

Лему 12 доведено.

7. Висновки. В даній роботі із застосуванням методу Арнольда виявлення нерухомих точок симплектичних дифеоморфізмів встановлено нижні оцінки числа ультрасубгармонік гамільтонової системи на двовимірному симплектичному многовиді з майже автономним 2π-періодичним за часом гамільтоніаном. Показано, що асимптотика цих оцінок при прямування малого параметра збурення до нуля залежить від того, до якої з чотирьох зон кільцевої області $D \subset \mathcal{M}^2$ належать породжуючі незбурені ультрасубгармоніки. Для всіх зон, крім примежової зони гіперболічного типу, відповідні оцінки демонструють степеневий характер залежності від $1/\varepsilon$, до того ж, як і можна було очікувати, найбільша швидкість зростання числа ультрасубгармонік при $\varepsilon \to 0$ притаманна зоні строго регулярних значень. Для зони слабкорегулярних значень частотної функції та примежової зони еліптичного типу відповідні оцінки залежать від арифметичних властивостей значень частототної функції $\omega(z)$ на лінії виродження M_{z_0} (на цій лінії $\omega'(z_0) = 0$) та в критичній точці еліптичного типу. Для примежової зони гіперболічного типу оцінка знизу для кількості збурених ультрасубгармонік при $\varepsilon \to 0$ асимптотично еквівалентна $C \ln^2 \dfrac{1}{\varepsilon}$, при цьому отримано явний вираз для сталої C. Ця оцінка повністю узгоджується з аналогічною оцінкою в [7], де розглядалися негамільтонові збурення, однак без жодних додаткових умов щодо існування нулів модифікованих функцій Мельникова.

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. – New York: Springer, 1983. – 453 p.
3. *Козлов В. В.* Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 5. – С. 177 – 178.

4. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Труды Ин-та математики и механики УРО РАН. – 2006. – **12**, № 1. – С. 109 – 141.
5. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в системах с полутора степенями свободы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2006. – **46**, № 9. – С. 1582 – 1593.
6. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* О предельных значениях функций Мельникова на периодических орбитах // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 2. – С. 176 – 190.
7. *Вакал Ю. Є., Парасюк І. О.* Оцінка кількості збурених ультрасубгармонік системи з півтора ступенями вільності, близької до гамільтонової // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 2. – С. 147 – 180.
8. *Арнольд В. И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. – Ижевск, 1999. – 284 с.
9. *Гийемин В., Стернберг С.* Геометрические асимптотики. – М.: Мир, 1981. – 500 с.
10. *Montgomery H. L.* Fluctuations in the mean of Euler's phi function // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). – 1987. – **97**, № 1-3. – P. 239 – 245.
11. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
12. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
13. *Dress F.* Discrepance des suites de Farey // J. Theor. Nombres Bordeaux. – 1999. – **11**, № 2. – P. 345 – 367.

Одержано 15.07.11