УДК 517.9

К. С. Халіна (Фіз.-техн. ін-т низьких температур НАН України, Харків)

ПРОБЛЕМИ КРАЙОВОЇ КЕРОВАНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНОЇ СТРУНИ НА ПІВОСІ

We consider a wave equation on a semiaxis, namely, $w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) - q(x)w(x,t)$, $x > 0$. The equation is controlled by one of the following two boundary conditions: $w(0,t) = u_0(t)$ and $w_x(0,t) = u_1(t)$, $t \in (0,T)$, where u_0 and u_1 are controls. In both cases, the potential q satisfies the condition $q \in C[0,\infty)$, the controls belong to the class L^∞, and the time $T > 0$ is fixed. These control systems are considered in Sobolev spaces. Using the operators adjoint to the transformation operators for the Sturm – Liouville problem, we obtain necessary and sufficient conditions for the null-controllability and approximate null-controllability of these systems. The controls that solve these problems are found in explicit form.

Рассматривается волновое уравнение на полуоси: $w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) - q(x)w(x,t)$, $x > 0$. Это уравнение управляется одним из двух граничных условий: $w(0,t) = u_0(t)$ или $w_x(0,t) = u_1(t)$, $t \in (0,T)$, где u_0, u_1 — управления. В обоих случаях потенциал q удовлетворяет условию $q \in C[0,+\infty)$, управления принадлежат классу L^∞ и время $T > 0$ фиксировано. Управляемые системы рассмотрены в пространствах Соболева. С помощью операторов, сопряженных к операторам преобразования для задачи Штурма – Лиувилля, получены необходимые и достаточные условия 0- и ε-управляемости для этих систем. Управления, решающие поставленные задачи, найдены в явном виде.

1. Вступ. У цій роботі розглядається рівняння коливання неоднорідної струни на півосі. Це рівняння керується крайовими умовами у точці $x = 0$. Час T задано. Ми розглядаємо два випадки крайових умов: типу Діріхле та типу Неймана. Керування в обох випадках належить класу L^∞. Керована система розглядається у підпросторах функцій з обмеженими носіями із просторів Соболєва H_0^s. У випадку керування типу Діріхле використовуються підпростори непарних функцій, а у випадку керування типу Неймана — підпростори парних функцій. Роботу присвячено дослідженню питань 0- та ε-керованості заданих систем.

Зауважимо, що питання керованості для рівнянь гіперболічного типу було досліджено у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 18]). З питань керованості для рівняння коливання струни на скінченному відрізку одержано багато результатів, тоді як на півосі аналогічних результатів є надто мало.

Наведемо стислий огляд деяких робіт, у яких струна є скінченною. Крайову L^p-керованість для рівняння коливання однорідної струни на скінченному відрізку добре вивчено у роботах [1 – 8]. У цих роботах одержано результати для $2 \leq p < \infty$. Для випадку $p = \infty$ результати одержано у [5, 7], при цьому у [7] керування обмежені наперед заданою сталою. У роботі [8] одержано результати для однорідної струни, яка закріплена на одному кінці відрізка і керується іншим кінцем. Керування при цьому має мінімальну норму у $L^\infty(0,T)$.

Проблеми крайової керованості для рівняння коливання неоднорідної струни у скінченній області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ було вивчено у [9 – 11], а на відрізку — у [12 – 14]. Зазначимо, що потенціал q дорівнює сталій у [12] та не дорівнює сталій, взагалі кажучи, у [13, 14]. Керування належать класу L^2 у [9 – 11], класу W_2^1 у [12] та класу L^∞ у [13, 14]. У всіх цих роботах керування було задано на частині межі. Звернемо увагу на те, що у даній роботі $q \neq \mathrm{const}$, струна розглядається на півосі та керування належать класу L^∞ на відміну від усіх згаданих робіт.

Далі наведемо огляд тих робіт, де вивчено питання керованості для рівняння коливання струни на півосі. Для однорідної струни на півосі результати за вільний час одержано у [15 –

17]. У точці $x = 0$ керування типу Діріхле розглянуто у [15, 16] та типу Неймана — у [17]. У [18, 19] вивчено питання керованості для рівняння неоднорідної струни на півосі з потенціалом $q = \text{const} \geq 0$. У [18] час було зафіксовано. У [19] розглянуто два випадки: фіксованого та вільного часу. На лівому кінці розглядалося керування типу Неймана у [18] та типу Діріхле у [19]. Керування належали класу L^∞ та були обмежені наперед заданою сталою у [15 – 19]. Керовані системи вивчалися у просторах Соболєва H_0^s, $s \leq 0$, у [15, 16, 19] та $s \leq 1$ у [17, 18]. У всіх цих роботах було одержано необхідні та достатні умови 0- та ε-керованості і знайдено явні формули для керувань. Крім цього, досліджено деякі інші властивості цих керувань.

Суттєвою відмінністю даної роботи від [15 – 19] є той факт, що потенціал $q \neq \text{const}$. Ця умова значно ускладнює вивчення питань керованості. Метод дослідження відрізняється від методів, які використовувалися раніше для дослідження схожих питань. Цей метод включає застосування операторів, спряжених до операторів перетворення на півосі для задачі Штурма – Ліувілля. Ми розглядаємо та вивчаємо спряжені оператори у тих же підпросторах просторів Соболєва, в яких розглядається відповідна керована система. Оскільки дослідження згаданих операторів у заданих просторах виявилось фундаментальним і надто громіздким, його перенесено в окремий пункт. Зауважимо також, що обмеженість носіїв функцій із просторів Соболєва є важливим фактом, тому що довести неперервність спряжених операторів в іншому випадку не вдалося. В результаті застосування операторів ми одержимо необхідні та достатні умови 0- та ε-керованості за заданий час для керованих систем. Серед цих умов — зв'язок початкових функцій між собою, який описується відповідними спряженими операторами. Зауважимо, що подібний зв'язок між початковими функціями було встановлено у [18, 19], а результат даної роботи є продовженням цих результатів на випадок $q \neq \text{const}$. Також знайдено явні формули для керувань: вони залежать від початкового стану, і ці залежності також описуються згаданими операторами. Окрім цього показано, що обмеженість початкового стану є необхідною і достатньою умовою обмеженості відповідного керування в обох випадках. Також знайдено зв'язок між цими сталими.

2. Позначення. Розглянемо хвильове рівняння на півосі

$$w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) - q(x)w(x,t), \quad x \in (0,+\infty), \quad t \in (0,T), \tag{2.1}$$

де $q \in C[0,+\infty)$, $T > 0$. Рівняння (2.1) керується однією з крайових умов

$$w(0,t) = u_0(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.2}$$

$$w_x(0,t) = u_1(t), \quad t \in (0,T), \tag{2.3}$$

де керування u_0 та u_1 такі, що $u_j \in L^\infty(0,T)$, $j = 0,1$. Ми будемо вивчати питання 0- та ε-керованості для систем (2.1), (2.2) та (2.1), (2.3), а саме, будемо шукати такі керування із класу $L^\infty(0,T)$, які переводять відповідну струну із заданого початкового стану в нульовий стан та в деякий ε-окіл нульового стану за час T відповідно.

Введемо простори, що будуть розглядатись у роботі. Нехай $\mathcal{S}$ — простір Шварца [20]:

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \colon \forall m,l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \, \exists C_{ml} > 0 \colon \forall x \in \mathbb{R} \left| \varphi^{(m)}(x)(1+|x|^2)^l \right| \leq C_{ml} \right\},$$

$\mathcal{S}'$ — простір узагальнених функцій над $\mathcal{S}$. Узагальнена функція $f \in \mathcal{S}'$ називається непарною, якщо $(f, \varphi(x)) = -(f, \varphi(-x))$, $\varphi \in \mathcal{S}$, та парною, якщо $(f, \varphi(x)) = (f, \varphi(-x))$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Позначимо через H_l^s простори Соболєва [21] (гл. 1):

$$H_l^s = \left\{ f \in \mathcal{S}' \colon (1 + x^2)^{l/2}(1 + |D|^2)^{s/2} f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad s, l \in \mathbb{R},\ D = -id/dx,$$

$$H_{l,o}^s(-a,a) = \left\{ f \in H_l^s \colon f \text{ непарна і } \operatorname{supp} f \subset (-a,a) \right\}, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$H_{l,e}^s(-a,a) = \left\{ f \in H_l^s \colon f \text{ парна і } \operatorname{supp} f \subset (-a,a) \right\},$$

$$\mathbb{H}_{l,p}^s(-a,a) = H_{l,p}^s(-a,a) \times H_{l,p}^{s-1}(-a,a), \quad p = o, e,$$

з нормою $\|f\|_l^s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| (1 + x^2)^{l/2}(1 + |D|^2)^{s/2} f(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}$, $s, l \in \mathbb{R}$. Для $f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \in$ $\in H_l^s \times H_l^{s-1}$ використовуватимемо норму $|||f|||_l^s = \left((\|f_0\|_l^s)^2 + (\|f_1\|_l^{s-1})^2 \right)^{1/2}$. Очевидно, що якщо $f \in H_{l,o}^s(-a,a)$, то $f' \in H_{l,e}^{s-1}(-a,a)$, і якщо $f \in H_{l,e}^s(-a,a)$, то $f' \in H_{l,o}^{s-1}(-a,a)$. У введених просторах будемо розглядати також норму

$$'\|f\|_l^s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| (1 + |D|^2)^{s/2}(1 + x^2)^{l/2} f(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Як відомо (див. [21], гл. 1), для будь-яких s, l існує $P_l^s > 0$ таке, що $\frac{1}{P_l^s} \|f\|_l^s \le {'\|f\|_l^s} \le P_l^s \|f\|_l^s$. Зауважимо, що $\|\cdot\|_0^0 = {'\|\cdot\|_0^0} = \|\cdot\|_{L^2}$.

Позначимо через $\mathcal{F} \colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ оператор перетворення Фур'є:

$$(\mathcal{F}\varphi)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda} \varphi(x) dx$$

та $(\mathcal{F}f, \varphi) = (f, \mathcal{F}^{-1}\varphi)$, де $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$.

2.1. Означення операторів, спряжених до операторів перетворення для задачі Штурма – Ліувілля. Для дослідження питань керованості систем (2.1), (2.2) та (2.1), (2.3) використовуються оператори, спряжені до операторів перетворення для задачі Штурма – Ліувілля. (Оператори перетворення вивчено, наприклад, у [22], гл. 1.) Ми розглянемо та вивчимо спряжені оператори у просторах $H_{0,o}^s(-T,T)$, $s = 0, -1$, і $H_{0,e}^s(-T,T)$, $s = 1, 0$. Оскільки дослідження згаданих операторів у просторах Соболєва виявилось фундаментальним і надто громіздким, його перенесено у пункт 6. Тому далі наведено лише їх означення. Визначимо оператори $\mathcal{L}_o, \mathcal{K}_o \colon H_{0,o}^0(-T,T) \to H_{0,o}^0(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_o) = D(\mathcal{K}_o) = H_{0,o}^0(-T,T)$ за формулами

$$(\mathcal{L}_o f)(t) = f(t) + \operatorname{sign} t \int_{|t|}^{T} \mathtt{L}(x, |t|; \infty) f(x) dx, \quad (\mathcal{K}_o g)(t) = g(t) + \operatorname{sign} t \int_{|t|}^{T} \mathtt{K}(x, |t|; \infty) g(x) dx, \tag{2.4}$$

де $f, g \in H^0_{0,o}(-T,T)$, $\mathtt{L}(\xi,\eta;\infty)$ та $\mathtt{K}(\xi,\eta;\infty)$ — ядра операторів, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Властивості ядер та оператори $\mathcal{K}^*_o$, $\mathcal{L}^*_o = (\mathcal{K}^*_o)^{-1}$ описано на початку пункту 6. У лемі 6.1 стверджується, що оператори $\mathcal{L}_o, \mathcal{K}_o$ неперервні з $H^0_{0,o}(-T,T)$ у $H^0_{0,o}(-T,T)$ і $R(\mathcal{L}_o) = R(\mathcal{K}_o) = H^0_{0,o}(-T,T)$. У зауваженні 6.4 показано, що спряжені оператори $\mathcal{L}^*_o$, $\mathcal{K}^*_o$, $D(\mathcal{L}^*_o) = D(\mathcal{K}^*_o) = H^0_{0,o}(-T,T)$, неперервні з $H^0_{0,o}(-T,T)$ у $H^0_{0,o}(-T,T)$, $R(\mathcal{L}^*_o) = R(\mathcal{K}^*_o) = H^0_{0,o}(-T,T)$ та $\mathcal{L}^{-1}_o = \mathcal{K}_o$. У лемі 6.2 стверджується, що оператори $\mathcal{L}^*_o$, $\mathcal{K}^*_o$ звужені на $H^1_{0,o}(-T,T)$, неперервні з $H^1_{0,o}(-T,T)$ у $H^1_{0,o}(-T,T)$ і мають своєю областю визначення та областю значень $H^1_{0,o}(-T,T)$. Отже, продовжимо оператори $\mathcal{L}_o$, $\mathcal{K}_o$ на $H^{-1}_{0,o}(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_o) = D(\mathcal{K}_o) = H^{-1}_{0,o}(-T,T)$, за правилом

$$(\mathcal{L}_o f, \varphi) = (f, \mathcal{L}^*_o \varphi), \quad (\mathcal{K}_o g, \psi) = (g, \mathcal{K}^*_o \psi), \tag{2.5}$$

де $f, g \in H^{-1}_{0,o}(-T,T)$, $\varphi, \psi \in H^1_{0,o}(-T,T)$. З леми 6.2 випливає неперервність операторів $\mathcal{L}_o, \mathcal{K}_o$ з $H^{-1}_{0,o}(-T,T)$ у $H^{-1}_{0,o}(-T,T)$ і $R(\mathcal{L}_o) = R(\mathcal{K}_o) = H^{-1}_{0,o}(-T,T)$.

Визначимо також оператори $\mathcal{L}_e, \mathcal{K}_e \colon H^0_{0,e}(-T,T) \to H^0_{0,e}(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_e) = D(\mathcal{K}_e) = H^0_{0,e}(-T,T)$:

$$(\mathcal{L}_e h)(t) = h(t) + \int\limits_{|t|}^{T} \mathtt{L}(x,|t|;0)h(x)dx, \quad (\mathcal{K}_e r)(t) = r(t) + \int\limits_{|t|}^{T} \mathtt{K}(x,|t|;0)r(x)dx, \tag{2.6}$$

де $h, r \in H^0_{0,e}(-T,T)$, $\mathtt{L}(\xi,\eta;0)$ та $\mathtt{K}(\xi,\eta;0)$ — ядра цих операторів, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Властивості цих ядер та оператори $\mathcal{K}^*_e$, $\mathcal{L}^*_e = (\mathcal{K}^*_e)^{-1}$ також описано на початку пункту 6. У лемі 6.3 стверджується, що оператори $\mathcal{L}_e, \mathcal{K}_e$ неперервні з $H^0_{0,e}(-T,T)$ у $H^0_{0,e}(-T,T)$ і $R(\mathcal{L}_e) = R(\mathcal{K}_e) = H^0_{0,e}(-T,T)$. У зауваженні 6.5 показано, що оператори $\mathcal{L}^*_e$, $\mathcal{K}^*_e$, $D(\mathcal{L}^*_e) = D(\mathcal{K}^*_e) = H^0_{0,e}(-T,T)$, неперервні з $H^0_{0,e}(-T,T)$ у $H^0_{0,e}(-T,T)$, $R(\mathcal{L}^*_e) = R(\mathcal{K}^*_e) = H^0_{0,e}(-T,T)$ та $\mathcal{L}^{-1}_e = \mathcal{K}_e$. Визначимо звуження операторів $\mathcal{L}_e, \mathcal{K}_e$ на $H^1_{0,e}(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_e) = D(\mathcal{K}_e) = H^1_{0,e}(-T,T)$, за формулами (2.6). У лемі 6.4 стверджується, що вони неперервні з $H^1_{0,e}(-T,T)$ у $H^1_{0,e}(-T,T)$ і $R(\mathcal{L}_e) = R(\mathcal{K}_e) = H^1_{0,e}(-T,T)$. Метод знаходження ядер $\mathtt{L}(x,t;\infty)$, $\mathtt{K}(x,t;\infty)$, $\mathtt{L}(x,t;0)$ і $\mathtt{K}(x,t;0)$ також наведено у пункті 6.

3. Умови керованості для хвильового рівняння з керуванням типу Діріхле. Розглянемо керовану систему (2.1), (2.2) з початковими умовами

$$w(x,0) = W^0_0(x), \quad w_t(x,0) = W^0_1(x), \quad x \in (0,+\infty), \tag{3.1}$$

де $W^0 = \begin{pmatrix} W^0_0 \\ W^0_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^0_{0,o}(-T,T)$. (Ми наполягаємо, що носії початкових функцій належать $(-T,T)$). Розв'язки системи (2.1), (2.2), (3.1) розглядаються у просторі $H^0_0(0,2T)$ (це буде зрозуміло із формули (3.5)).

Нехай $\Omega, \Xi \colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $D(\Omega) = D(\Xi) = \mathcal{S}'$ — оператори непарного та парного продовження відповідно. Маємо $(\Omega f)(x) = f(x) - f(-x)$, $(\Xi f)(x) = f(x) + f(-x)$, $f \in \mathcal{S}'$. Припустимо, що q задано на $\mathbb{R}$ і $q \equiv 0$ на $(-\infty,0)$. Позначимо $Q = \Xi q$, $W(\cdot,t) = \Omega w(\cdot,t)$, $t \in (0,T)$. Очевидно, що $W(\cdot,t) \in H^0_{0,o}(-T,T)$, $t \in (0,T)$.

Легко побачити, що керована система (2.1), (2.2), (3.1) еквівалентна системі

$$W_{tt}(x,t) = W_{xx}(x,t) - Q(x)W(x,t) - 2u_0(t)\delta'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,T), \tag{3.2}$$

$$W(x,0) = W_0^0(x), \quad W_t(x,0) = W_1^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

де δ — дельта-функція Дірака, $\delta = H'$, H — функція Хевісайда. Розглянемо (3.2), (3.3) за деяких умов влучення

$$W(x,T) = W_0^T(x), \quad W_t(x,T) = W_1^T(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

де $W^T = \begin{pmatrix} W_0^T \\ W_1^T \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_{0,o}^0(-T,T)$. Нехай $T > 0$, $W^0 \in \mathbb{H}_{0,o}^0(-T,T)$. Позначимо через $\mathcal{R}_T^o(W^0)$ множину станів $W^T \in \mathbb{H}_{0,o}^0(-T,T)$, для яких існує керування $u_0 \in L^\infty(0,T)$ таке, що задача (3.2) – (3.4) має єдиний розв'язок у $H_{0,o}^0(-2T,2T)$.

Означення 3.1. *Стан* $W^0 \in \mathbb{H}_{0,o}^0(-T,T)$ *називається* 0*-керованим за заданий час* $T > 0$, *якщо* 0 *належить* $\mathcal{R}_T^o(W^0)$, *та* ε*-керованим за заданий час* $T > 0$, *якщо* 0 *належить замиканню* $\mathcal{R}_T^o(W^0)$ *у* $\mathbb{H}_{0,o}^0(-T,T)$.

Наступне поняття введено за аналогією з „косинус-перетворенням Фур'є" [22] (гл. 2).

Означення 3.2. *Нехай* $\omega(\lambda,x)$ — *розв'язок задачі Коші* (6.2). *Функція* $F^{[\omega]}$, $F^{[\omega]}(\lambda) = (f,\omega(\lambda,\cdot))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, *називається* ω*-перетворенням функції* f *для* $f \in H_{0,o}^s(-T,T)$, $s = 0,-1$.

Лема 7.2 містить явну формулу для ω-перетворення і встановлює його неперервність із $H_{0,o}^s(-T,T)$ у $H_{s+1,e}^0(\mathbb{R})$, $s = 0,-1$.

Лема 3.1. *Нехай* $U_0(t) = u_0(t)[H(t) - H(t-T)]$. *Тоді*

$$\mathcal{K}_o \begin{pmatrix} W \\ W_t \end{pmatrix} (\cdot,t) = \mathcal{E}(\cdot,t) * \left(\mathcal{K}_o \begin{pmatrix} W_0^0 \\ W_1^0 \end{pmatrix} - \Omega \begin{pmatrix} U_0 \\ U_0' \end{pmatrix} \right), \quad t \in (0,T), \tag{3.5}$$

де $\mathcal{E}(y,\tau) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta(y+\tau) + \delta(y-\tau) & \dfrac{1}{2}(\operatorname{sign}(y+\tau) - \operatorname{sign}(y-\tau)) \\ \delta'(y+\tau) - \delta'(y-\tau) & \delta(y+\tau) + \delta(y-\tau) \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Доведення. Застосуємо ω-перетворення до рівняння (3.2):

$$\frac{d^2}{dt^2}(W(\cdot,t),\omega(\lambda,\cdot)) = -\left(W(\cdot,t), \left(\frac{d^2}{dx^2} + Q \right)\omega(\lambda,\cdot) \right) + 2u_0(t)(\delta,\omega_x'(\lambda,\cdot)),$$

де $\lambda \in \mathbb{C},\ t \in (0,T)$. Враховуючи, що $\omega(\lambda,x)$ — розв'язок задачі Коші (6.2) по x, та позначаючи $F^{[\omega]}(\lambda,t) = (W(\cdot,t),\omega(\lambda,\cdot))$, $t \in (0,T)$, $F_j^{[\omega]}(\lambda) = (W_j^0,\omega(\lambda,\cdot))$, $j = 0,1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, отримуємо задачу Коші

$$\begin{matrix} F_{tt}^{[\omega]}(\lambda,t) + \lambda^2 F^{[\omega]}(\lambda,t) = 2u_0(t), \\ F^{[\omega]}(\lambda,0) = F_0^{[\omega]}(\lambda),\ F_t^{[\omega]}(\lambda,0) = F_1^{[\omega]}(\lambda), \end{matrix} \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ t \in (0,T),$$

єдиний розв'язок якої

$$\begin{pmatrix} F^{[\omega]}(\lambda,t) \\ F_t^{[\omega]}(\lambda,t) \end{pmatrix} = \Sigma(\lambda,t) \begin{pmatrix} F_0^{[\omega]}(\lambda) - 2\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\lambda\tau}{\lambda} u_0(\tau)\,d\tau \\ F_1^{[\omega]}(\lambda) + 2\displaystyle\int_0^t \cos\lambda\tau u_0(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in (0,T),$$

де $\Sigma(\lambda,t) = \begin{pmatrix} \cos\lambda t & \dfrac{\sin\lambda t}{\lambda} \\ -\lambda\sin\lambda t & \cos\lambda t \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $t\in(0,T)$. Підставимо вирази для $F^{[\omega]}$ та $F_j^{[\omega]}$, $j=0,1$, із леми 7.2. Після цього домножимо на $-\dfrac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}$ і застосуємо оператор $\mathcal{F}^{-1}$. Оскільки $\mathcal{F}^{-1}[fg] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}f * \mathcal{F}^{-1}g$ для $f,g\in\mathcal{S}'$, то

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_o W(\cdot,t) \\ \mathcal{K}_o W_t(\cdot,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\Sigma(\cdot,t) * \begin{pmatrix} \mathcal{K}_o W_0^0 + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}i\left[\mathcal{F}^{-1}\displaystyle\int_0^t \sin\lambda\tau u_0(\tau)\,d\tau\right] \\ \mathcal{K}_o W_1^0 - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(i\lambda\displaystyle\int_0^t \cos\lambda\tau u_0(\tau)\,d\tau\right)\right] \end{pmatrix}, \quad t\in(0,T). \tag{3.6}$$

Як відомо,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\Sigma(\lambda,t) = \mathcal{E}(y,t), \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad y\in\mathbb{R}, \quad t\in(0,T). \tag{3.7}$$

Легко довести, що

$$i\mathcal{F}^{-1}\int_0^t \sin\lambda\tau u_0(\tau)\,d\tau = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Omega U_0, \quad \mathcal{F}^{-1}\left(i\lambda\int_0^t \cos\lambda\tau u_0(\tau)\,d\tau\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Omega U_0'. \tag{3.8}$$

Підставляючи (3.7), (3.8) у (3.6), одержуємо (3.5).

Лему доведено.

Із (3.5) маємо

$$\mathcal{K}_o W^T = \mathcal{E}(\cdot,T) * \left(\mathcal{K}_o W^0 - \Omega\begin{pmatrix} U_0 \\ U_0' \end{pmatrix}\right). \tag{3.9}$$

Теорема 3.1. *Нехай $T>0$, $W^0\in\mathbb{H}^0_{0,o}(-T,T)$ і виконано умови*

$$W_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{3.10}$$

$$W_1^0 = \mathcal{L}_o(\operatorname{sign} x\mathcal{K}_o W_0^0)'. \tag{3.11}$$

Тоді стан W^0 є 0-керованим за час T.

Крім цього, розв'язок проблеми 0-керованості (керування u_0) задається формулою

$$u_0(t) = W_0^0(t) + \int_t^T \mathcal{K}(x,t;\infty)W_0^0(x)\,dx, \quad t\in(0,T). \tag{3.12}$$

Доведення. Позначимо $\widetilde{U}_0 = \mathcal{K}_o W_0^0$. Тоді $\widetilde{U}_0 \in H^0_{0,o}(-T,T)$. Згідно з (3.10) і лемою 6.5, $\widetilde{U}_0\in L^\infty(\mathbb{R})$. Через u_0 позначимо обмеження $\widetilde{U}_0$ на $(0,T)$. Отже, $u_0\in L^\infty(0,T)$ і (3.12) виконано. Нехай $U_0 = u_0[H(x)-H(x-T)]$. Тоді $\Omega U_0 = \widetilde{U}_0$, $\Xi U_0 = \operatorname{sign} x\widetilde{U}_0$. Враховуючи (3.11), одержуємо $\Omega U_0 = \mathcal{K}_o W_0^0$, $\Omega U_0' = (\Xi U_0)' = (\operatorname{sign} x\mathcal{K}_o W_0^0)' = \mathcal{K}_o W_1^0$. Підставляючи ці рівності у (3.9), отримуємо $\mathcal{K}_o W^T = 0$. Оскільки $\mathcal{L}_o 0 = 0$, то $W^T = 0$.

Теорему доведено.

Теорема 3.2. *Нехай* $T > 0$, $W^0 \in \mathbb{H}^0_{0,o}(-T,T)$ *і стан* W^0 *є* ε*-керованим за час* T. *Тоді виконуються умови* (3.10), (3.11) *і керування* u_0 *задається формулою* (3.12).

Доведення. Оскільки стан W^0 є ε-керованим за час T, то існує послідовність $\{(W^T)^m\}_{m=1}^{\infty}$ така, що $(W^T)^m \in \mathcal{R}^o_T(W^0)$, $m = \overline{1,\infty}$ і $\left|\left|\left|(W^T)^m\right|\right|\right|_0^0 \to 0$ при $m \to \infty$. Отже, існує послідовність $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ така, що $u^m \in L^\infty(0,T)$, $m = \overline{1,\infty}$, і із (3.9) маємо

$$\left(\mathcal{K}_o W^0 - \Omega \begin{pmatrix} U^m \\ (U^m)' \end{pmatrix}\right) = \mathcal{E}(\cdot, -T) * \mathcal{K}_o (W^T)^m, \quad m = \overline{1,\infty},$$

для $U^m = u^m[H(t) - H(t-T)]$. Використаємо наступну оцінку, доведену у [18] (лема 6.7): $\|\mathcal{E}(x,\tau) * f\|_0^s \le \sqrt{(2\tau^2+6)(1+q^2)}$ для $f \in H^s_0 \times H^{s-1}_0$, $\tau \in \mathbb{R}$, де $q \equiv \mathrm{const}$ — потенціал керованої системи. Оскільки застосування оператора $\mathcal{K}_o$ фактично зводить керовану систему з потенціалом $Q \ne 0$ до керованої системи з $Q \equiv 0$, то ми використаємо цю оцінку з $q = 0$. Отже,

$$\left|\left|\left|\left(\mathcal{K}_o W^0 - \Omega \begin{pmatrix} U^m \\ (U^m)' \end{pmatrix}\right)\right|\right|\right|_0^0 \le \sqrt{2T^2+6}\,\left|\left|\left|\mathcal{K}_o (W^T)^m\right|\right|\right|_0^0, \quad m = \overline{1,\infty}.$$

Внаслідок того, що $\mathcal{K}_o$ є неперервним з $H^s_{0,o}$ у $H^s_{0,o}$, $s = 0-1$, $\left|\left|\left|\mathcal{K}_o W^0 - \begin{pmatrix} \Omega U^m \\ (\Xi U^m)' \end{pmatrix}\right|\right|\right|_0^0 \to 0$ при $m \to \infty$. Це означає, що

$$\begin{pmatrix} \Omega U^m \\ (\Xi U^m)' \end{pmatrix} \to \mathcal{K}_o W^0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{у} \quad \mathbb{H}^0_{0,o}(-T,T). \tag{3.13}$$

Позначимо $\widetilde{U}_0 = \mathcal{K}_o W^0_0$. Тоді $\widetilde{U}_0 \in H^0_{0,o}(-T,T) \subset L^2(\mathbb{R})$. Оскільки $u^m \in L^\infty(0,T)$, то $\Omega U^m \in$ $\in L^\infty(\mathbb{R})$, $m = \overline{1,\infty}$. Отже, $\widetilde{U}_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Нехай $U_0(t) = \widetilde{U}_0(t)H(t)$. Із (3.13) маємо

$$\begin{pmatrix} \Omega U^m \\ (\Xi U^m)' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Omega U_0 \\ (\Xi U_0)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_o W^0_0 \\ \mathcal{K}_o W^0_1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \text{у} \quad \mathbb{H}^0_{0,o}(-T,T). \tag{3.14}$$

Звідси $\mathcal{K}_o W^0_1 = (\Xi U_0)' = (\operatorname{sign} x \Omega U_0)' = (\operatorname{sign} x \mathcal{K}_o W^0_0)'$. Отже, (3.11) виконано.

Із (3.14) маємо $W^0_0 = \mathcal{L}_o \Omega U_0$. Оскільки $U_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, то, згідно з лемою 6.5, (3.10) виконано. Позначимо через u_0 обмеження U_0 на $(0,T)$. Тоді, очевидно, $u_0 \in L^\infty(0,T)$ і (3.12) виконується.

Теорему доведено.

***Зауваження* 3.1.** Якщо задано сталу $C_u > 0$ таку, що $|u_0| \le C_u$ майже скрізь на $(0,T)$, то з огляду на лему 6.5 ми повинні додати до умов (3.10), (3.11) у теоремах 3.1 та 3.2 наступну умову:

$$\left|W^0_0\right| \le C_u(1 + 2TC_L), \tag{3.15}$$

де $C_L > 0$ така, що $|\mathtt{L}(x,t;\infty)| \le C_L$ на $(-T,T) \times (-T,T)$.

***Зауваження* 3.2.** Якщо $q \equiv \mathrm{const}$, то неважко довести, що $\mathcal{L}_o = \Psi_T$ та $\mathcal{K}_o = \Psi_T^{-1}$, де оператор Ψ_T було введено та вивчено у [19]. Отже, теорема 3.1 є узагальненням теореми 2.5 із [19] на випадок $q \ne \mathrm{const}$.

***Зауваження* 3.3.** Якщо $q \equiv 0$, то $\mathcal{L}_o = \mathcal{K}_o = I$, де I — тотожний оператор. У цьому випадку умова (3.11) набирає вигляду $W^0_1 = (\operatorname{sign} x W^0_0)'$, а умова (3.12) — вигляду $u_0 = W^0_0$ на $(0,T)$. Цей результат було одержано у [15].

***Приклад* 3.1.** Нехай $T = 3$, $W_0^0(x) = 2\sin x - 6x$, $x \in [-3, 3]$, і $W_0^0(x) = 0$, $x \in (-\infty, -3) \cup \cup (3, +\infty)$. Нехай W_1^0 таке, що $W_1^0 = \mathcal{L}_o(\operatorname{sign} x \mathcal{K}_o W_0^0)'$. Нехай також $q(x) = e^{-x}$ і $u_0 \in L^\infty(0, 3)$ таке, що $|u_0| \le 5$.

Знайдемо функцію $\mathtt{K}(x, t)$, яка буде визначати ядро $\mathtt{K}(x, t; \infty)$ за формулою (6.11). Згідно із зауваженням 6.3 достатньо знайти $\mathtt{K}(x, t)$ лише для $x > t > 0$. Поклавши $\alpha = \dfrac{x + t}{2} > 0$, $\beta = \dfrac{x - t}{2} > 0$, зведемо крайову задачу (6.12), (6.13) до задачі Гурса. Розв'яжемо її методом послідовних наближень (див., наприклад, [23]). Повертаючись до змінних x і t, одержуємо

$$\mathtt{K}(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n + 1)!} \left(1 - e^{-\frac{x-t}{2}}\right)^n \left(1 - e^{-\frac{x+t}{2}}\right)^{n+1} \tag{3.16}$$

для $0 < t < x$ і $\mathtt{K}(x, t) = 0$ для $t > x > 0$. Враховуючи, що $\mathtt{K}(x, t; \infty) = \mathtt{K}(x, t) - \mathtt{K}(x, -t)$, і застосовуючи означення модифікованої функції Бесселя $I_1(z) = i^{-1} J_1(iz)$, де $J_1(z)$ — функція Бесселя, отримуємо

$$\mathtt{K}(x, t; \infty) = \left(e^{-\frac{x-t}{2}} - e^{-\frac{x+t}{2}}\right) \frac{I_1\left(2\sqrt{\left(1 - e^{-\frac{x-t}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{x+t}{2}}\right)}\right)}{2\sqrt{\left(1 - e^{-\frac{x-t}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{x+t}{2}}\right)}} \tag{3.17}$$

для $0 < t < x$ та $\mathtt{K}(x, t; \infty) = 0$ для $t > x > 0$.

Використовуючи (6.18), знаходимо $|\mathtt{L}(x, t; \infty)| \le 57{,}48$ на $(0, 3) \times (0, 3)$. Маємо $|W_0^0| \le 20$ на $(0, 3)$ і $C_u(1 + 2TC_L) \approx 1729{,}25$. Очевидно, що (3.15) виконується.

Оскільки умови (3.10), (3.11) та (3.15) виконано, то стан W^0 є 0-керованим за час $T = 3$ і керування, що розв'язує задачу 0-керованості, задається формулою ($t \in (0, 3)$)

$$u_0(t) = 2\sin t - 6t + \int_t^3 \left(e^{-\frac{x-t}{2}} - e^{-\frac{x+t}{2}}\right) \frac{I_1\left(2\sqrt{\left(1 - e^{-\frac{x-t}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{x+t}{2}}\right)}\right)}{2\sqrt{\left(1 - e^{-\frac{x-t}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{x+t}{2}}\right)}} (2\sin x - 6x)dx.$$

4. Умови керованості для хвильового рівняння з керуванням типу Неймана. У цьому пункті розглянемо керовану систему (2.1), (2.3) з початковими умовами

$$w(x, 0) = V_0^0(x), \quad w_t(x, 0) = V_1^0(x), \quad x \in (0, +\infty), \tag{4.1}$$

де $V^0 = \begin{pmatrix} V_0^0 \\ V_1^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_{0,e}^1(-T, T)$. Розв'язки системи (2.1), (2.3), (4.1) розглядаємо у $H_0^1(0, 2T)$. Позначимо $V(\cdot, t) = \Xi w(\cdot, t)$, $t \in (0, T)$. Очевидно, що $V(\cdot, t) \in H_{0,e}^1(-T, T)$, $t \in (0, T)$. Керована система (2.1), (2.3), (4.1) еквівалентна системі

$$V_{tt}(x, t) = V_{xx}(x, t) - Q(x)V(x, t) - 2u_1(t)\delta(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \tag{4.2}$$

$$V(x, 0) = V_0^0(x), \quad V_t(x, 0) = V_1^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Розглянемо (4.2), (4.3) за деяких умов влучення

$$V(x,T) = V_0^T(x), \quad V_t(x,T) = V_1^T(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

де $V^T = \begin{pmatrix} V_0^T \\ V_1^T \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^1_{0,e}(-T,T)$. Для заданих $T > 0$, $V^0 \in \mathbb{H}^1_{0,e}(-T,T)$ позначимо через $\mathcal{R}^e_T(V^0)$ множину станів $V^T \in \mathbb{H}^1_{0,e}(-T,T)$, для яких існує керування $u_1 \in L^\infty(0,T)$ таке, що задача (4.2)–(4.4) має єдиний розв'язок у $H^1_{0,e}(-2T,2T)$.

Означення 4.1. *Стан $V^0 \in \mathbb{H}^1_{0,e}(-T,T)$ називається 0-керованим за заданий час $T > 0$, якщо 0 належить $\mathcal{R}^e_T(V^0)$, та ε-керованим за заданий час $T > 0$, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}^e_T(V^0)$ у $\mathbb{H}^1_{0,e}(-T,T)$.*

Введемо оператор, обернений до оператора диференціювання.

Позначимо $\partial\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $D(\partial) = H^{s+1}_{0,e}(-T,T)$, $s = -1, 0$, $\partial z = z'$, $z \in H^{s+1}_{0,e}(-T,T)$. Очевидно, що $\partial z \in H^s_{0,o}(-T,T)$. Міркуючи, як у додатку у [18], можна показати, що оператор ∂ неперервний з $H^{s+1}_{0,e}(-T,T)$ у $H^s_{0,o}(-T,T)$, $R(\partial) = H^s_{0,o}(-T,T)$, та існує обернений оператор $\partial^{-1}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $D(\partial^{-1}) = R(\partial)$, $R(\partial^{-1}) = D(\partial)$, неперервний з $H^s_{0,o}(-T,T)$ у $H^{s+1}_{0,e}(-T,T)$. Отже, $\left\|\partial^{-1} y\right\|_0^{s+1} \le \|y\|_0^s$, де $y \in H^s_{0,o}(-T,T)$, $s = -1, 0$.

Знову введемо нове поняття за аналогією з „косинус-перетворенням Фур'є" [22] (гл. 2).

Означення 4.2. *Нехай $\nu(\lambda,x)$ — розв'язок задачі Коші* (6.6). *Функція $F^{[\nu]}$, $F^{[\nu]}(\lambda) = (f, \nu(\lambda,\cdot))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, називається ν-перетворенням функції f для $f \in H^s_{0,e}(-T,T)$, $s = 1, 0$.*

Лема 7.3 містить явну формулу для ν-перетворення і встановлює його неперервність із $H^s_{0,e}(-T,T)$ у $H^0_{s,e}(\mathbb{R})$, $s = 1, 0$.

Лема 4.1. *Нехай $U_1(t) = u_1(t)[H(t) - H(t-T)]$. Тоді*

$$\mathcal{K}_e \begin{pmatrix} V \\ V_t \end{pmatrix}(\cdot,t) = \mathcal{E}(\cdot,t) * \left(\mathcal{K}_e \begin{pmatrix} V_0^0 \\ V_1^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial^{-1}\Omega U_1 \\ \Xi U_1 \end{pmatrix} \right), \quad t \in (0,T),$$

де $\mathcal{E}(y,t)$ було визначено у лемі 3.1.

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 3.1, при цьому застосовується ν-перетворення до рівняння (4.2) і враховується, що

$$\mathcal{F}^{-1} \int\limits_0^t \sin \lambda\tau u_1(\tau)\, d\tau = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \partial^{-1}\Omega U_1$$

і

$$\mathcal{F}^{-1} \int\limits_0^t \cos \lambda\tau u_1(\tau)\, d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \Xi U_1.$$

Із леми 4.1 маємо

$$\mathcal{K}_e V^T = \mathcal{E}(\cdot,T) * \left(\mathcal{K}_e V^0 - \begin{pmatrix} \partial^{-1}\Omega U_1 \\ \Xi U_1 \end{pmatrix} \right). \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Нехай $T > 0$, $V^0 \in \mathbb{H}^1_{0,e}(-T,T)$ та виконуються умови*

$$V_1^0 \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{4.6}$$

$$V_0^0 = \mathcal{L}_e \partial^{-1}(\operatorname{sign} x \mathcal{K}_e V_1^0). \tag{4.7}$$

Тоді стан V^0 є 0-керованим за час T.

Крім цього, розв'язок проблеми 0-керованості (керування u_1) задається формулою

$$u_1(t) = V_1^0(t) + \int\limits_t^T \mathtt{K}(x,t;0)V_1^0(x)\,dx, \quad t \in (0,T). \tag{4.8}$$

Ця теорема доводиться аналогічно теоремі 3.1 з використанням (4.5).

Теорема 4.2. *Нехай $T > 0$, $V^0 \in \mathbb{H}^1_{0,e}(-T,T)$ і стан V^0 є ε-керованим за час T. Тоді виконуються умови* (4.6), (4.7) *і керування u_1 задається формулою* (4.8).

Ця теорема знову доводиться аналогічно теоремі 3.2 з використанням (4.5).

***Зауваження* 4.1.** Як і у випадку керування типу Діріхле, якщо задано сталу $C_u^1 > 0$ таку, що $|u_1| \le C_u^1$ майже скрізь на $(0,T)$, то, згідно з лемою 6.6, ми повинні додати до умов (4.6), (4.7) умову

$$\left|V_1^0\right| \le C_u^1(1 + 2TB_L), \tag{4.9}$$

де $B_L > 0$ така, що $|\mathtt{L}(x,t;0)| \le B_L$ на $(-T,T) \times (-T,T)$.

***Зауваження* 4.2.** Очевидно, що умова (4.7) еквівалентна умові

$$V_1^0 = \mathcal{L}_e \operatorname{sign} x(\mathcal{K}_e V_0^0)'. \tag{4.10}$$

Нехай $q \equiv \mathrm{const}$. Можна побачити, що $\mathcal{L}_e = \Phi$ та $\mathcal{K}_e = \Phi^{-1}$, де оператор Φ було введено та вивчено у [18]. Отже, теорема 4.1 є узагальненням теореми 3.3 із [18] на випадок $q \ne \mathrm{const}$.

***Зауваження* 4.3.** Очевидно, що $\mathcal{L}_e = \mathcal{K}_e = I$, де I — тотожний оператор, якщо $q \equiv 0$. У цьому випадку умова (4.10) набирає вигляду $V_1^0 = \operatorname{sign} x(V_0^0)'$, а умова (4.8) — вигляду $u_1 = V_1^0$ на $(0,T)$. Цей результат було одержано у [17].

***Приклад* 4.1.** Нехай $T = 1$, $V_1^0(x) = x^2 + \cos 2x - 5$, $x \in [-1,1]$, і $V_1^0(x) = 0$, $x \in$ $\in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Нехай V_0^0 таке, що $V_0^0 = \mathcal{L}_e \partial^{-1}(\operatorname{sign} x \mathcal{K}_e V_1^0)$. Нехай також $q(x) = e^{-x}$ і $u_1 \in L^\infty(0,1)$ таке, що $|u_1| \le 1/2$.

Очевидно, що умови (4.6), (4.7) виконуються. Знайдемо ядро $\mathtt{K}(x,t;0)$ за формулою (6.11). Оскільки $q(x)$ таке саме, як у прикладі 3.1, то ми використаємо формулу (3.16). Враховуючи, що $\mathtt{K}(x,t;0) = \mathtt{K}(x,t) + \mathtt{K}(x,-t)$, та міркуючи, як у прикладі 3.1, одержуємо

$$\mathtt{K}(x,t;0) = \left(2 - e^{-\frac{x-t}{2}} - e^{-\frac{x+t}{2}}\right) \frac{I_1\left(2\sqrt{\left(1 - e^{-\frac{x-t}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{x+t}{2}}\right)}\right)}{2\sqrt{\left(1 - e^{-\frac{x-t}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{x+t}{2}}\right)}}$$

для $0 < t < x$ та $\mathtt{K}(x,t;0) = 0$ для $t > x > 0$.

Використовуючи (6.19), одержуємо $|\mathtt{L}(x,t;0)| \le 1,32$ на $(0,1) \times (0,1)$. Маємо $|V_1^0| \le 7$ на $(0,1)$ та $C_u^1(1 + 2TB_L) \approx 1,82$. Очевидно, що (4.9) не виконується. Отже, стан V^0 не є 0-керованим за час $T = 1$.

5. Проблема ε-керованості та неперервні керування. Зауважимо, що керування, які одержано у теоремах 3.1 та 4.1, можуть бути дуже складними для практичної реалізації. У цьому пункті ми будуємо неперервні керування, що розв'язують проблему ε-керованості для систем

(2.1), (2.2), (3.1) та (2.1), (2.3), (4.1), тому що у деяких випадках необхідно перевести початковий стан керованої системи у заданий кінцевий стан неперервним шляхом. Зазначимо, що проблему 0-керованості для обмеженої струни з неперервним початковим станом за допомогою неперервного керування було розглянуто у [6]. У [18] побудовано неперервні керування типу Неймана і показано, що вони розв'язують проблему ε-керованості для хвильового рівняння на півосі з потенціалом $q \equiv \mathrm{const}$. Автором було також доведено, що якщо початковий стан є неперервним, то кінцевий стан також є неперервним.

Покладемо

$$\mu_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T W_0^0(t)\sin\frac{\pi kt}{T}\,dt + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \sin\frac{\pi kt}{T}\int\limits_t^T \mathtt{K}(x,t;\infty)W_0^0(x)\,dx\,dt, \quad k=\overline{0,\infty}, \tag{5.1}$$

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n+1+k}{n+1}\mu_k\sin\frac{\pi kt}{T}, \quad n=\overline{0,\infty}, \tag{5.2}$$

$$\gamma_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T V_1^0(t)\sin\frac{\pi kt}{T}\,dt + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \sin\frac{\pi kt}{T}\int\limits_t^T \mathtt{K}(x,t;0)V_1^0(x)\,dx\,dt, \quad k=\overline{0,\infty}, \tag{5.3}$$

$$u_n^1(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n+1+k}{n+1}\gamma_k\sin\frac{\pi kt}{T}, \quad n=\overline{0,\infty}. \tag{5.4}$$

Очевидно, що u_n та u_n^1 є середніми за Чезаро для часткових сум тригонометричних рядів $\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\sin\dfrac{\pi kt}{T}$ та $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\sin\dfrac{\pi kt}{T}$, $n=\overline{0,\infty}$, відповідно. Міркуючи, як і при доведенні теореми 5.1 із [18], можна прийти до висновку, що справджуються наступні теореми.

Теорема 5.1. *Нехай* $T>0$, $W^0\in\mathbb{H}_{0,o}^0(-T,T)$. *Нехай для системи* (2.1), (2.2), (3.1) *виконано умови* (3.10), (3.11), *а* $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ *визначено формулою* (5.1). *Тоді для керувань* $u_n\in L^\infty(0,T)$, *визначених за формулою* (5.2), *відповідний кінцевий стан* $(W^T)^n$ *системи* (2.1), (2.2), (3.1) *задовольняє нерівність*

$$\left|\!\left|\!\left|(W^T)^n\right|\!\right|\!\right|_0^0 \to 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty.$$

Більше того, $u_n\in C^\infty(0,T)$, $n=\overline{1,\infty}$.

Теорема 5.2. *Нехай* $T>0$, $V^0\in\mathbb{H}_{0,e}^1(-T,T)$. *Нехай для системи* (2.1), (2.3), (4.1) *виконано умови* (4.6), (4.7), *а* $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ *визначено за формулою* (5.3). *Тоді для керувань* $u_n^1\in L^\infty(0,T)$, *визначених за формулою* (5.4), *відповідний кінцевий стан* $(V^T)^n$ *системи* (2.1), (2.3), (4.1) *задовольняє нерівність*

$$\left|\!\left|\!\left|(V^T)^n\right|\!\right|\!\right|_0^1 \to 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty.$$

При цьому $u_n^1\in C^\infty(0,T)$, $n=\overline{1,\infty}$.

6. Оператори перетворення для задачі Штурма – Ліувілля та спряжені до них. Спочатку коротко нагадаємо означення та деякі властивості операторів перетворення, які було встановлено у [22] (гл. 1). Після цього розглянемо спряжені оператори у просторах Соболєва та доведемо їх неперервність. Розглянемо дві задачі Коші

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \lambda^2 y(x), \\ y(0) &= 0,\ y'(0) = 1, \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} -y''(x) + Q(x)y(x) &= \lambda^2 y(x), \\ y(0) &= 0,\ y'(0) = 1, \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.2}$$

Як відомо [22] (гл. 1), інтегральний оператор $(\mathbf{I}+\mathbf{K})\,f(x) = f(x) + \int_0^x \mathtt{K}(x,t;\infty) f(t)dt$ переводить розв'язок задачі (6.1) у розв'язок $\omega(\lambda,x)$ задачі (6.2). $\mathtt{K}(x,t;\infty)$ — ядро оператора, $x,t \in \mathbb{R}$ (див. (6.9), (6.11)). Позначимо $\mathbf{I}+\mathbf{K} = \mathcal{K}_o^*$. Згідно з [22] (гл. 1), цей оператор має обернений $\mathbf{I}+\mathbf{L}$ тієї ж форми з ядром $\mathtt{L}(x,t;\infty)$, $x,t \in \mathbb{R}$ (див. (6.10), (6.14), (6.15)). Обернений оператор позначимо через $\mathcal{L}_o^*$. Отже, $(\mathcal{L}_o^*)^{-1} = \mathcal{K}_o^*$ і

$$\omega(\lambda,x) = \left(\mathcal{K}_o^* \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right)(x) = \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int\limits_0^x \mathtt{K}(x,t;\infty)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.3}$$

$$\frac{\sin\lambda x}{\lambda} = \left(\mathcal{L}_o^*\omega(\lambda,\cdot)\right)(x) = \omega(\lambda,x) + \int\limits_0^x \mathtt{L}(x,t;\infty)\omega(\lambda,t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.4}$$

Розглянемо наступні задачі Коші з іншими початковими умовами

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \lambda^2 y(x), \\ y(0) &= 1,\ y'(0) = 0, \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} -y''(x) + Q(x)y(x) &= \lambda^2 y(x), \\ y(0) &= 1,\ y'(0) = 0, \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.6}$$

У цьому випадку, згідно з [22] (гл. 1), оператори перетворення мають інші ядра, які позначено через $\mathtt{K}(x,t;0)$ та $\mathtt{L}(x,t;0)$, $x,t \in \mathbb{R}$ (див. (6.9)–(6.11), (6.16), (6.17)). Будемо позначати ці оператори через $\mathcal{K}_e^*$ та $\mathcal{L}_e^*$. Нехай $\nu(\lambda,x)$ — розв'язок задачі (6.6). Отже, згідно з [22] (гл. 1), $(\mathcal{L}_e^*)^{-1} = \mathcal{K}_e^*$ і

$$\nu(\lambda,x) = \left(\mathcal{K}_e^* \cos\lambda t\right)(x) = \cos\lambda x + \int\limits_0^x \mathtt{K}(x,t;0)\cos\lambda t dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{6.7}$$

$$\cos\lambda x = \left(\mathcal{L}_e^*\nu(\lambda,\cdot)\right)(x) = \nu(\lambda,x) + \int\limits_0^x \mathtt{L}(x,t;0)\nu(\lambda,t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6.8}$$

Легко показати, що $\omega(\lambda,x)$ є непарним по x, а $\nu(\lambda,x)$ — парним по x за умови, що Q є парним. Враховуючи цей факт, легко довести наступне:

$$\mathtt{K}(-x,-t;\infty) = -\mathtt{K}(x,t;\infty), \quad \mathtt{K}(-x,-t;0) = -\mathtt{K}(x,t;0), \quad x,t \in \mathbb{R}, \tag{6.9}$$

$$\mathtt{L}(-x,-t;\infty) = -\mathtt{L}(x,t;\infty), \quad \mathtt{L}(-x,-t;0) = -\mathtt{L}(x,t;0), \quad x,t \in \mathbb{R}. \tag{6.10}$$

Для ядер $\mathtt{K}(x,t;\infty)$ і $\mathtt{K}(x,t;0)$ із [22] (гл. 1) маємо

$$\mathtt{K}(x,t;\infty) = \mathtt{K}(x,t) - \mathtt{K}(x,-t), \quad \mathtt{K}(x,t;0) = \mathtt{K}(x,t) + \mathtt{K}(x,-t), \quad x,t \in \mathbb{R}, \tag{6.11}$$

де функція $\mathtt{K}(x,t) = 0$, $|t| > |x|$, і є розв'язком системи [22] (гл. 1)

$$\mathtt{K}_{xx}(x,t) - \mathtt{K}_{tt}(x,t) = Q(x)\mathtt{K}(x,t), \quad x,t \in \mathbb{R}, \quad |t| < |x|, \tag{6.12}$$

$$\mathtt{K}(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x Q(\xi)\,d\xi, \quad \mathtt{K}(x,-x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.13}$$

Автором також доведено, що якщо Q має $n \geq 0$ неперервних похідних, то $\mathtt{K}(x,t)$ має $n+1$ неперервну похідну за обома змінними.

***Зауваження* 6.1.** Підставляючи (6.3) у (6.4) та (6.7) у (6.8) і враховуючи, що $\mathtt{K}(x,t;\infty) = \mathtt{K}(x,t;0) = 0$, $|t| > |x|$, неважко одержати $\mathtt{L}(x,t;\infty) = \mathtt{L}(x,t;0) = 0$, $|t| > |x|$.

***Зауваження* 6.2.** У роботі [22] (гл. 1) одержано систему для знаходження ядра $\mathtt{L}(x,t;0)$. За аналогією можна знайти відповідну систему для знаходження ядра $\mathtt{L}(x,t;\infty)$. Отже, ядро $\mathtt{L}(x,t;\infty)$ оператора $\mathcal{L}_o^*$ є розв'язком системи

$$\mathtt{L}_{xx}(x,t;\infty) = \mathtt{L}_{tt}(x,t;\infty) - Q(t)\mathtt{L}(x,t;\infty), \quad x,t \in \mathbb{R}, \quad |t| < |x|, \tag{6.14}$$

$$\mathtt{L}(x,x;\infty) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x Q(\xi)\,d\xi, \quad \mathtt{L}(x,0;\infty) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

Ядро $\mathtt{L}(x,t;0)$ оператора $\mathcal{L}_e^*$ є розв'язком системи

$$\mathtt{L}_{xx}(x,t;0) = \mathtt{L}_{tt}(x,t;0) - Q(t)\mathtt{L}(x,t;0), \quad x,t \in \mathbb{R}, \quad |t| < |x|, \tag{6.16}$$

$$\mathtt{L}(x,x;0) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x Q(\xi)\,d\xi, \quad \mathtt{L}_t(x,0;0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.17}$$

Також аналогічно до [22] (гл. 1, теорема 1.2.2) можна довести, що якщо Q має $n \geq 0$ неперервних похідних, то $\mathtt{L}(x,t;\infty)$ та $\mathtt{L}(x,t;0)$ мають $n+1$ неперервну похідну за обома змінними і виконуються нерівності

$$|\mathtt{L}(x,t;\infty)| \leq \sigma_0((x+t)/2)\exp\{2\sigma_1((x+t)/2)\}, \tag{6.18}$$

$$|\mathtt{L}(x,t;0)| \leq \sigma_0((x+t)/2)\exp\{2\sigma_1((x+t)/2)\}, \tag{6.19}$$

де $\sigma_0(x) = \int_0^x |Q(\xi)|\,d\xi$, $\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(y)dy$.

***Зауваження* 6.3.** Враховуючи (2.4) – (2.6) та (6.9), (6.10), достатньо знайти функції $\mathtt{K}(x,t)$, $\mathtt{L}(x,t;\infty)$ та $\mathtt{L}(x,t;0)$ лише для $x > 0$ і $t > 0$.

Далі ми розглянемо оператори $\mathcal{L}_o, \mathcal{K}_o$ та $\mathcal{L}_e, \mathcal{K}_e$ у просторах Соболєва.

Лема 6.1. *Оператори* $\mathcal{L}_o, \mathcal{K}_o \colon H^0_{0,o}(-T,T) \to H^0_{0,o}(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_o) = D(\mathcal{K}_o) = H^0_{0,o}(-T,T)$, *визначені за формулами* (2.4), *неперервні з* $H^0_{0,o}(-T,T)$ *у* $H^0_{0,o}(-T,T)$ *і* $R(\mathcal{L}_o) = R(\mathcal{K}_o) = H^0_{0,o}(-T,T)$.

Доведення. Нехай $f \in H^0_{0,o}(-T,T)$. З (2.4) видно, що $\operatorname{supp}\mathcal{L}_o f \subset (-T,T)$. З непарності f випливає непарність $\mathcal{L}_o f$. Розглянемо норму $\|\cdot\|^0_0$ другого доданка у $\mathcal{L}_o f$. Оскільки $Q \in C(\mathbb{R})$, то існує $C_L > 0$ таке, що $|\mathtt{L}(x,|t|;\infty)| \le C_L$ на $(-T,T)\times(-T,T)$. Враховуючи, що $\operatorname{supp} f \subset (-T,T)$, і застосовуючи нерівність Коші – Буняковського, маємо

$$\left\| \int\limits_{|t|}^{T} \mathtt{L}(x,t;\infty) f(x)dx \right\|^0_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\int\limits_{-T}^{T} \left| \int\limits_{-T}^{T} |\mathtt{L}(x,|t|;\infty)| \cdot |f(x)|\, dx \right|^2 dt} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{\int\limits_{-T}^{T} \left(\int\limits_{-T}^{T} |\mathtt{L}(x,|t|;\infty)|^2 dx \int\limits_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx \right) dt} \le TC_L \|f\|^0_0 . \tag{6.20}$$

Отже, множення на $\operatorname{sign} t$ у (2.4) є коректним і $\|\mathcal{L}_o f\|^0_0 \le \|f\|^0_0 (1 + TC_L)$. Твердження про оператор $\mathcal{K}_o$ і його неперервність з $H^0_{0,o}(-T,T)$ у $H^0_{0,o}(-T,T)$ доводиться аналогічно. З неперервності операторів випливає, що $R(\mathcal{L}_o) = R(\mathcal{K}_o) = H^0_{0,o}(-T,T)$.

Лему доведено.

***Зауваження* 6.4.** Застосуємо спряжені оператори $\mathcal{K}^*_o, \mathcal{L}^*_o$, що визначені за формулами (6.3), (6.4), до $\psi, \varphi \in H^0_{0,o}(-T,T)$ відповідно. З попередньої леми випливає, що спряжені оператори неперервні з $H^0_{0,o}(-T,T)$ у $H^0_{0,o}(-T,T)$. А звідси випливає, що $R(\mathcal{L}^*_o) = R(\mathcal{K}^*_o) = H^0_{0,o}(-T,T)$. Оскільки $(\mathcal{L}^*_o)^{-1} = \mathcal{K}^*_o$, то $(\mathcal{L}_o)^{-1} = \mathcal{K}_o$.

Лема 6.2. *Оператори* $\mathcal{L}_o, \mathcal{K}_o \colon H^{-1}_{0,o}(-T,T) \to H^{-1}_{0,o}(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_o) = D(\mathcal{K}_o) = H^{-1}_{0,o}(-T,T)$, *визначені за формулами* (2.5), *неперервні з* $H^{-1}_{0,o}(-T,T)$ *у* $H^{-1}_{0,o}(-T,T)$ *і* $R(\mathcal{L}_o) = R(\mathcal{K}_o) = H^{-1}_{0,o}(-T,T)$.

Доведення. Достатньо довести, що звужені на $H^1_{0,o}(-T,T)$ спряжені оператори неперервні з $H^1_{0,o}(-T,T)$ у $H^1_{0,o}(-T,T)$ і їхньою областю значень є $H^1_{0,o}(-T,T)$. Нехай $\varphi \in H^1_{0,o}(-T,T)$. Маємо $(\mathcal{L}^*_o\varphi) = \varphi(x) + \int\limits_0^x \mathtt{L}(x,t;\infty)\varphi(t)dt$. Непарність $\mathcal{L}^*_o\varphi$ є очевидною завдяки (6.10). Очевидно також, що $\operatorname{supp}\mathcal{L}^*_o\varphi \subset (-T,T)$. Як відомо, $\|y\|^1_0 \le \|y\|^0_0 + \|y'\|^0_0$ для будь-якої $y \in H^1_0$. Отже,

$$\|\mathcal{L}^*_o\varphi\|^1_0 \le \|\varphi\|^1_0 + \left\| \int\limits_0^x \mathtt{L}(x,t;\infty)\varphi(t)dt \right\|^0_0 + \left\| \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \mathtt{L}(x,t;\infty)\varphi(t)dt \right\|^0_0 . \tag{6.21}$$

Оскільки $\|\varphi\|^0_0 \le \|\varphi\|^1_0$, то аналогічно до (6.20) одержуємо $\left\| \int_0^x \mathtt{L}(x,t;\infty)\varphi(t)dt \right\|^0_0 \le TC_L \|\varphi\|^1_0$. Розглянемо останній доданок у (6.21). Маємо

$$\left\| \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \mathtt{L}(x,t;\infty)\varphi(t)dt \right\|^0_0 \le \left\| \int\limits_0^x \mathtt{L}_x(x,t;\infty)\varphi(t)dt \right\|^0_0 + \|\mathtt{L}(x,x;\infty)\varphi(x)\|^0_0 .$$

Із того, що $Q \in C(\mathbb{R})$, випливає, що існує $C_L^1 > 0$ таке, що $|\mathtt{L}_x(x,t;\infty)| \leq C_L^1$ на $(-T,T) \times \times (-T,T)$. Тому аналогічно до (6.20) одержуємо $\left\| \int_0^x \mathtt{L}_x(x,t;\infty)\varphi(t)dt \right\|_0^0 \leq TC_L^1 \|\varphi\|_0^1$. Із того, що $Q \in C(\mathbb{R})$, випливає, що $\left| \int_0^{|t|} Q(\xi)d\xi \right| \leq C_Q^1$ на $(-T,T)$, де $C_Q^1 > 0$. Використовуючи (6.15), одержуємо $\|\mathtt{L}(x,x;\infty)\varphi(x)\|_0^0 = 1/2 \left\| \varphi(x) \int_0^x Q(\xi)d\xi \right\|_0^0 \leq 1/2C_Q^1 \|\varphi\|_0^1$.

Продовжуючи (6.21), маємо $\|\mathcal{L}_o^*\varphi\|_0^1 \leq \|\varphi\|_0^1 (1 + TC_L + TC_L^1 + 1/2C_Q^1)$. Неперервність оператора $\mathcal{K}_o^*$ із $H_{0,o}^1(-T,T)$ у $H_{0,o}^1(-T,T)$ доводиться аналогічно. Звідси випливає, що $R(\mathcal{L}_o^*) = = R(\mathcal{K}_o^*) = H_{0,o}^1(-T,T)$.

Лему доведено.

Лема 6.3. *Оператори* $\mathcal{L}_e, \mathcal{K}_e \colon H_{0,e}^0(-T,T) \to H_{0,e}^0(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_e) = D(\mathcal{K}_e) = H_{0,e}^0(-T, T)$, *визначені за формулами* (2.6), *неперервні з* $H_{0,e}^0(-T,T)$ *у* $H_{0,e}^0(-T,T)$ *і* $R(\mathcal{L}_e) = R(\mathcal{K}_e) = = H_{0,e}^0(-T,T)$.

Доведення леми аналогічне доведенню леми 6.1 із заміною непарних функцій на парні.

Зауваження 6.5. Розглянемо дію спряжених операторів $\mathcal{K}_e^*$, $\mathcal{L}_e^*$, визначених за формулами (6.7), (6.8), на $\psi, \varphi \in H_{0,e}^0(-T,T)$ відповідно. З леми 6.3 випливає, що ці оператори неперервні з $H_{0,e}^0(-T,T)$ у $H_{0,e}^0(-T,T)$. Звідси в свою чергу випливає, що $R(\mathcal{L}_e^*) = R(\mathcal{K}_e^*) = H_{0,e}^0(-T,T)$. Оскільки $(\mathcal{L}_e^*)^{-1} = \mathcal{K}_e^*$, то $(\mathcal{L}_e)^{-1} = \mathcal{K}_e$.

Лема 6.4. *Оператори* $\mathcal{L}_e, \mathcal{K}_e \colon H_{0,e}^1(-T,T) \to H_{0,e}^1(-T,T)$, $D(\mathcal{L}_e) = D(\mathcal{K}_e) = H_{0,e}^1(-T, T)$, *визначені за формулами* (2.6), *неперервні з* $H_{0,e}^1(-T,T)$ *у* $H_{0,e}^1(-T,T)$ *і* $R(\mathcal{L}_e) = R(\mathcal{K}_e) = = H_{0,e}^1(-T,T)$.

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 6.2 (замість спряженого оператора потрібно розглядати основний) із заміною непарних функцій на парні та врахуванням того, що

$$\left\| \int\limits_{|t|}^{T} \mathtt{L}(x,|t|;0)h(x)\,dx \right\|_0^1 \leq \left\| \int\limits_{|t|}^{T} \mathtt{L}(x,|t|;0)h(x)\,dx \right\|_0^0 + \left\| \frac{d}{dt} \int\limits_{|t|}^{T} \mathtt{L}(x,|t|;0)h(x)\,dx \right\|_0^0.$$

Лема 6.5. *Нехай* $f, g \in H_{0,o}^0(-T,T)$ *такі, що* $f, g \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Тоді* $\mathcal{K}_o f$, $\mathcal{L}_o g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Доведення. Нехай $C_f > 0$, $C_g > 0$ такі, що $|f| \leq C_f$ і $|g| \leq C_g$ на $\mathbb{R}$. Оскільки $Q \in C(\mathbb{R})$, то існують такі $C_K > 0$, $C_L > 0$, що $|\mathtt{K}(x,t;\infty)| \leq C_K$ і $|\mathtt{L}(x,t;\infty)| \leq C_L$ на $(-T,T) \times (-T,T)$, $T > 0$. Використовуючи (2.4), одержуємо

$$|\mathcal{K}_o f| \leq C_f(1 + 2TC_K), \quad |\mathcal{L}_o g| \leq C_g(1 + 2TC_L).$$

Лему доведено.

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 6.6. *Нехай* $h, r \in H_{0,e}^0(-T,T)$ *такі, що* $h, r \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Тоді* $\mathcal{K}_e h$, $\mathcal{L}_e r \in L^\infty(\mathbb{R})$ *і*

$$|\mathcal{K}_e h| \leq C_h(1 + 2TB_K), \quad |\mathcal{L}_e r| \leq C_r(1 + 2TB_L),$$

де $C_h > 0$, $B_K > 0$, $C_r > 0$, $B_L > 0$ *такі, що* $|h| \leq C_h$, $|r| \leq C_r$ *на* $\mathbb{R}$ *і* $|\mathtt{K}(x,t;0)| \leq B_K$, $|\mathtt{L}(x,t;0)| \leq B_L$ *на* $(-T,T) \times (-T,T)$.

7. Додаток.

Лема 7.1. *Нехай* $y \in H^s_{0,o}(-T,T)$, $s = 0, -1$. *Тоді* $\dfrac{\mathcal{F}y}{i\lambda} \in H^0_{s+1,e}(\mathbb{R})$.

Доведення. Оскільки ∂^{-1} — взаємно однозначний оператор, то існує $z \in H^{s+1}_{0,e}(-T,T)$ таке, що $z = \partial^{-1}y$. Тоді $\mathcal{F}z \in H^0_{s+1,e}(\mathbb{R})$. Як відомо, $\mathcal{F}\partial z = i\lambda\mathcal{F}z$. Тому $\dfrac{\mathcal{F}y}{i\lambda} = \dfrac{\mathcal{F}\partial z}{i\lambda} = \mathcal{F}z \in$ $\in H^0_{s+1,e}(\mathbb{R})$.

Лему доведено.

Лема 7.2. *Нехай* $f_1 \in H^0_{0,o}(-T,T)$, $f_2 \in H^{-1}_{0,o}(-T,T)$. *Нехай також* $F^{[\omega]}_j(\lambda) = (f_j, \omega(\lambda,\cdot))$, $j = 1,2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тоді* $F^{[\omega]}_j(\lambda) = -\dfrac{\sqrt{2\pi}}{i\lambda}(\mathcal{F}\mathcal{K}_o f_j)(\lambda)$, $j = 1,2$, *і* ω*-перетворення є неперервним із* $H^s_{0,o}(-T,T)$ *у* $H^0_{s+1,e}(\mathbb{R})$.

Доведення. Як відомо, $(\mathcal{F}f)(\lambda) = -\dfrac{i}{\sqrt{2\pi}}(f, \sin\lambda t)$ для будь-якої непарної $f \in \mathcal{S}'$.

Застосуємо ω-перетворення до f_j, $j = 1,2$. Враховуючи (6.3), маємо

$$F^{[\omega]}_j(\lambda) = (f_j,\omega)(\lambda) = \left(f_j, \mathcal{K}^*_o\left(\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right)\right) = \left(\mathcal{K}_o f_j, \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{i\lambda}(\mathcal{F}\mathcal{K}_o f_j)(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Відомо [21] (гл. 1), що $\mathcal{F}H^s_{l,p}(-a,a) \subset H^l_{s,p}(\mathbb{R})$ і $\|f\|^s_l = {}'\|\mathcal{F}f\|^l_s$ для $f \in H^s_{l,p}(-a,a)$, $p =$ $= o, e$. Тому, використовуючи лему 7.1, одержуємо $F^{[\omega]}_1 \in H^0_{1,e}(\mathbb{R})$, $F^{[\omega]}_2 \in H^0_{0,e}(\mathbb{R})$. Враховуючи неперервність оператора $\mathcal{K}_o$, легко бачити, що ω-перетворення є неперервним.

Лему доведено.

Лема 7.3. *Нехай* $g_1 \in H^1_{0,e}(-T,T)$, $g_2 \in H^0_{0,e}(-T,T)$. *Нехай також* $F^{[\nu]}_j(\lambda) = (g_j, \nu(\lambda,\cdot))$, $j = 1,2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тоді* $F^{[\nu]}_j(\lambda) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}\mathcal{K}_e g_j)(\lambda)$, $j = 1,2$, *і* ν*-перетворення є неперервним із* $H^s_{0,e}(-T,T)$ *у* $H^0_{s,e}(\mathbb{R})$.

Ця лема доводиться аналогічно до попередньої з урахуванням того, що $(\mathcal{F}f)(\lambda) =$ $= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(f, \cos\lambda t)$ для будь-якої парної $f \in \mathcal{S}'$, та (6.7).

1. *Krabs W., Leugering G.* On boundary controllability of one-dimension vibrating systems by $W^{1,p}_0$-controls for $p \in [0,\infty)$ // Math. Methods Appl. Sci. – 1994. – **17**, № 2. – P. 77 – 93.
2. *Gugat M.* Analytic solutions of L^∞-optimal control problems for the wave equation // J. Optim. Theor. Appl. – 2002. – **114**, № 2. – P. 397 – 421.
3. *Gugat M., Leugering G.* Solutions of L^p-norm-minimal control problems for the wave equation // Comput. Appl. Math. – 2002. – **21**, № 1. – P. 227 – 244.
4. *Negreanu M., Zuazua E.* Convergence of multigrid method for the controllability of a 1-d wave equation // C. r. Math. Acad. sci. Paris. – 2004. – **338**, № 5. – P. 413 – 418.
5. *Gugat M., Leugering G., Sklyar G.* L^p-optimal boundary control for the wave equation // SIAM J. Control Optim. – 2005. – **44**, № 1. – P. 49 – 74.
6. *Gugat M.* Optimal boundary control of a string to rest in a finite time with continuous state // ZAMM. – 2006. – **86**, № 2. – P. 134 – 150.
7. *Фардигола Л. В., Халіна К. С.* Проблеми керованості для рівняння струни // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 7. – С. 939 – 952.
8. *Gugat M., Leugering G.* L^∞-norm minimal control of the wave equation: on the weakness of the bang-bang principle // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. – 2008. – **14**, № 2. – P. 254 – 283.
9. *Эмануилов О. Ю.* Граничная управляемость гиперболическими уравнениями // Сиб. мат. журн. – 2000. – **41**, № 4. – С. 944 – 959.

10. *Russell D. L.* Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions // SIAM Rev. – 1978. – **20**, № 4. – P. 639 – 739.
11. *Vancostenoble J., Zuazua E.* Hardy inequalities, observability, and control for the wave and Schrödinger equations with singular potentials // SIAM J. Math. Anal. – 2009. – **41**, № 4. – P. 1508 – 1532.
12. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. АН. – 2002. – **387**, № 5. – С. 600 – 603.
13. *Khalina K. S.* Controllability problems for the non-homogeneous string that is fixed at the right end point and has the Dirichlet boundary control at the left end point // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2011. – **7**, № 1. – P. 34 – 58.
14. *Khalina K. S.* On the Neumann boundary controllability for the non-homogeneous string on a segment // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2011. – **7**, № 4. – P. 333 – 351.
15. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half–axis // J. Math. Anal. and Appl. – 2002. – **276**, № 1. – P. 109 – 134.
16. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov trigonometric moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis // Mat. Fizika, Analiz, Geometriya. – 2002. – **9**, № 2. – P. 233 – 242.
17. *Фардигола Л. В.* Проблема керованості крайовими умовами Неймана для рівняння струни на півосі // Доп. НАН України. – 2009. – Вип. 10. – С. 36 – 41.
18. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the string equation on a half-axis with a boundary control bounded by a hard constant // SIAM J. Control Optim. – 2008. – **47**. – P. 2179 – 2199.
19. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the $1 - D$ wave equation on a half-axis with the Dirichlet boundary control // ESAIM: Control Optim. Calc. Var./ E–first, DOI:10.1051/cocv/2011169.
20. *Schwartz L.* Théorie des distributions, I, II. – Paris: Hermann, 1950–1951.
21. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. – М.: Физматлит, 1994. – 336 с.
22. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
23. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1981. – 512 с.
24. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Вып. 3. Обобщенные функции. – М.: Физматгиз, 1958. – 275 с.

Одержано 30.11.11,
після доопрацювання — 21.03.12