УДК 519.21

П. П. Чернега (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛОКАЛЬНОЕ ВРЕМЯ В НУЛЕ ДЛЯ ПОТОКА АРРАТЬЯ

We study the Arratia flow $x(u,t)$. We prove that $x(\cdot,t)$ is a Markov process whose phase space is a certain subset K of the Skorokhod space. We introduce the notion of *total local time at zero* for the Arratia flow. We prove that it is an additive, nonnegative, continuous functional of the flow and calculate its characteristic.

Вивчається потік Арратья $x(u,t)$. Доведено, що $x(\cdot,t)$ — марковський процес, фазовим простором якого є деяка підмножина K простору Скорохода. Введено поняття *сумарного локального часу в нулі* для потоку Арратья. Доведено, що воно є адитивним, невід'ємним, неперервним функціоналом від потоку, і обчислено його характеристику.

1. Введение.

Определение 1 [1]. *Поток Арратья — случайный процесс* $\{x(u), u \in \mathbb{R}\}$, *заданный на вероятностном пространстве* $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$, *со значениями в пространстве* $C([0;1])$ *и следующими свойствами*:

1) $x(u_k, \cdot)$ — *стандартный винеровский процесс, стартующий из* u_k;

2) $\forall t \in [0;1]\colon x(u_1,t) \leq \ldots \leq x(u_n,t)$, $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$;

3) *распределение* $(x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_n,\cdot))$ *совпадает с распределением стандартного* n-*мерного винеровского процесса, начинающегося в* $(u_1,\ldots,u_n)$ *на множестве* $\{f \in C([0;1],\mathbb{R}^n)\colon f_k(0) = u_k,\ k = \overline{1,n},\ f_1(t) < \ldots < f_n(t),\ t \in [0;1]\}$.

На неформальном уровне поток Арратья можно описывать как совокупность частиц, стартующих из точек вещественной прямой и движущихся независимо до момента встречи. После встречи две частицы склеиваются в одну. Каждая отдельная частица в потоке совершает броуновское движение. Настоящая статья посвящена описанию фазового пространства для потока Арратья, распространению понятия локального времени на случай многих взаимодействующих частиц и описанию его свойств.

Определение 2 [2]. *Локальным временем броуновского движения* $\{x(s), s \geq 0\}$ *называется совокупность случайных величин* $\{\varphi(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ *таких, что*:

1) $\varphi(t,x)$ *непрерывно по совокупности переменных* (t,x) *почти наверное*;

2) *для любого* $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ *имеет место равенство*

$$2\int\limits_A \varphi(t,x)dx = \int\limits_0^t 1_A(x(s))ds.$$

Величина $\varphi(t,x)$ трактуется как локальное время в точке x, проведенное броуновским движением $x(s)$ до момента времени t, и часто обозначается $\int_0^t \delta_x(x(s))ds$.

Поскольку поток Арратья состоит из частиц, совершающих броуновское движение, то естественно определить локальное время в нуле для него как сумму локальных времен, проведенных в нуле каждой частицей до момента склейки:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^{t\wedge\tau_u} \delta_0(x(u,s))ds := \lim_{\Delta\to 0+} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_k)} \delta_0(x(u_k,s))ds \quad \text{почти наверное,}$$

$$u_k = k\Delta = \frac{k}{2^m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}; \quad \tau(u_k) := \inf\{t\colon x(u_k, t) = x(u_{k-1}, t)\} \wedge 1.$$

При таком определении локальное время может служить интегральной характеристикой, описывающей совместное поведение частиц в потоке. Оно оказывается конечным для любого промежутка времени t (теорема 2).

Определение 3 [3]. *Аддитивным функционалом от марковского процесса* $(X(t), \Im_t, P_x)$ *с фазовым пространством* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ *называется случайный процесс* $\varphi(t)$ *со следующими свойствами*:

1) *для любого* t $\varphi(t)$ *является* $\Im_t$*-измеримой случайной величиной*;

2) $\varphi(t) + \theta_t\varphi(s) = \varphi(t+s)$ *почти наверное, где* θ_t — *оператор сдвига вдоль траектории процесса* [3, с. 128].

Имеет место формула восстановления аддитивного неотрицательного непрерывного функционала с помощью экспоненциальных моментов [3]:

$$\varphi(t) = P_x - \lim_{h\to 0+} \int_0^t \frac{1}{h}[1 - v_\varphi(h, x(s,\omega))]ds, \quad x \in X,$$

$$v_\varphi(t, x) := M_x \exp\{-\varphi(t).$$

Приведем основные результаты, полученные в данной работе.

Рассмотрим пространство Скорохода $D := D(-\infty; +\infty)$ [4] с метрикой

$$d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda}[\gamma(\lambda) \vee \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - y(\lambda(t))| \wedge 1],$$

$$\gamma(\lambda) = \sup_{s>t}\left|\log\frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s-t}\right|,$$

где Λ — множество возрастающих гомеоморфизмов вещественной прямой, являющихся липшицевыми, для которых $\gamma(\lambda)$ конечно.

Пусть

$$K := \left\{\varphi \in D,\ \varphi \nearrow,\ \exists \lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u} > 0,\ \int\limits_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(1)} \ln\varphi(z)dz > -\infty\right\}.$$

Для потока Арратья $x(u,t)$ имеет место независимость σ-алгебр, порожденных приращениями потока на непересекающихся интервалах времени, поэтому $x(\cdot, t)$ — марковский процесс с фазовым пространством K (теорема 3).

Определим случайную величину Φ_t (теорема 4):

$$\Phi_t := \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds =: \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^{t\wedge\tau_u}\delta_0(x(u,s))ds,$$

$$u_m^k = \frac{k}{2^m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Определение 4. *Величину Φ_t будем называть локальным временем в нуле для потока Арратья.*

Φ_t — аддитивный, неотрицательный, непрерывный функционал от потока Арратья (теорема 5).

2. Поток Арратья как марковский процесс. Поскольку в дальнейшем мы будем предполагать, что марковский процесс может стартовать из *произвольной* точки фазового пространства, для доказательства марковского свойства потока Арратья (теорема 3) нам понадобится понятие *броуновской сети*. Приведем основные определения [5].

Пусть $(\overline{\mathbb{R}^2}, \rho)$ — пополнение $\mathbb{R}^2$ по метрике ρ:

$$\rho((x_1,t_1),(x_2,t_2)) = |\Phi(x_1,t_1) - \Phi(x_2,t_2)| \vee |\Psi(t_1) - \Psi(t_2)|,$$

где

$$\Phi(x,t) := \frac{\tanh(x)}{1+|t|}; \quad \Psi(t) := \tanh(t).$$

Для $t_0 \in [-\infty; +\infty]$ пусть

$$C[t_0] := \{f\colon [t_0; +\infty] \to [-\infty; +\infty], \Phi(f(t),t) \text{ непрерывно}\}.$$

Определим

$$\Pi := \bigcup_{t_0 \in [-\infty;+\infty]} C[t_0] \times \{t_0\}.$$

Пусть $(f, t_0) \in \Pi$ обозначает траекторию в $\overline{\mathbb{R}^2}$, начинающуюся в $(f(t_0), t_0)$. Для (f, t_0) обозначим через $\widehat{f}$ продолжение f на $[-\infty; +\infty]$, определив $\widehat{f}$ значением $f(t_0)$, $t < t_0$.

Рассмотрим метрику

$$d((f_1,t_1),(f_2,t_2)) := (\sup_t |\Phi(f_1(t),t) - \Phi(f_2(t),t)|) \vee |\Psi(t_1) - \Psi(t_2)|.$$

Известно [5], что (Π, d) — полное сепарабельное метрическое пространство. Рассмотрим метрику Хаусдорфа:

$$H := \{K \in \Pi,\ K - \text{компакт}\},$$

$$d_H(K_1,K_2) := \sup_{g_1\in K_1} \inf_{g_2 \in K_2} d(g_1,g_2) \vee \sup_{g_2\in K_2} \inf_{g_1 \in K_1} d(g_1,g_2),$$

(H, d_H) — полное сепарабельное метрическое пространство. Пусть $\Im_H$ — борелевская σ-алгебра, порожденная d_H.

Определение 5. *Броуновская сеть $\overline{W}$ — $(H, \Im_H)$-значная случайная величина, распределение которой однозначно определяется следующими свойствами*:

1) *для любых $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ почти наверное существует траектория $W_{t,\cdot}(x)$, стартующая из (x,t)*;

2) *для $(x_1,t_1),\ldots,(x_n,t_n)$ совместное распределение $\{W_{t_1,\cdot}(x_1),\ldots,W_{t_n,\cdot}(x_n)\}$ совпадает с распределением склеивающихся броуновских движений* (*независимо движущихся до момента встречи*);

3) *для любого счетного всюду плотного множества D в $\mathbb{R}^2$ почти наверное $\overline{W}$ является замыканием в (H, d_H) $\{W_{t,\cdot}(x), (x,t) \in D\}$.*

Существование броуновской сети доказано в [5]. Заметим, что поток Арратья можно получить, если рассматривать частицы броуновской сети, стартующие в момент времени $t = 0$, и справедливо соотношение

$$(x(u_1, t+s), \ldots, x(u_n, t+s)) \stackrel{d}{=} (W_{s,t}(x(u_1, s)), \ldots, W_{s,t}(x(u_n, s))).$$

Имеет место независимость на непересекающихся временных интервалах σ-алгебр, порожденных приращениями броуновской сети как элемента пространства всех отображений $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ — цилиндрическая σ-алгебра в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$\mathfrak{L} := \sigma\{f \in \ \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ (f(t_1, \ldots, f(t_n))) \in \Delta_n,\ \Delta_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_n)\}.$$

Пусть

$$H_{s,t} := \mathfrak{a}\{\omega\colon W_{u,s}(r_1, \omega) - W_{u,s}(r_2, \omega) \in \Delta,\ u \in \mathbb{R},\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ s \leq r_2 \leq r_1 \leq t\}$$

— алгебра в пространстве $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$.

Теорема 1. $H_{s_1,t_1} \perp H_{s_2,t_2}$, $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$.

Доказательство. Для доказательства независимости алгебр используем случайное блуждание со склеиванием:

$$\varphi_{0,n}(u) := u + \xi_{u,1} + \ldots + \xi_{\varphi_{0,n-1}(u),n}, \quad u \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\{\xi_{x,k}\}_{x,k\in\mathbb{Z}}$ — набор независимых в совокупности случайных величин

$$\xi_{x,k} = \begin{cases} +1, & \dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\mathrm{P}\{\xi_{\varphi_{0,n-1}(u),n} = 1,\ \varphi_{0,n-1}(u) = v\} = \mathrm{P}\{\xi_{v,n} = 1,\ \varphi_{0,n-1}(u) = v\} =$$

$$= \mathrm{P}\{\xi_{v,n} = 1\}\mathrm{P}\{\varphi_{0,n-1}(u) = v\}.$$

Суммируя по всем возможным значениям v, получаем

$$\mathrm{P}\{\xi_{\varphi_{0,n-1}(u),n} = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Докажем, что $\{\varphi_{0,n}(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ является симметричным целочисленным блужданием. Для этого подсчитаем, например, вероятность события $\{\xi_{\varphi_{0,n}(u),n+1} = 1,\ \xi_{\varphi_{0,m}(u),m+1} = -1\}$, $n < m$:

$$\mathrm{P}\{\xi_{\varphi_{0,n}(u),n+1} = 1,\ \xi_{\varphi_{0,m}(u),m+1} = -1\} =$$

$$= \sum \mathrm{P}\{\xi_{u,1} = x_1, \xi_{u+x_1,2} = x_2, \ldots, \xi_{u+x_1+\ldots+x_{n-1},n} = x_n,$$

$$\xi_{u+x_1+\ldots+x_n,n+1} = 1, \xi_{u+x_1+\ldots+x_{n+1},n+2} = x_{n+2}, \ldots$$

$$\ldots, \xi_{u+x_1+\ldots+x_{m-1},m} = x_m, \xi_{u+x_1+\ldots+x_m,m+1} = -1\} =$$

$$= \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1} \cdot \frac{1}{2} = \sum \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{4}.$$

Здесь рассматриваются суммы по всевозможным наборам чисел $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+2}, \ldots, x_m\}$ из ± 1.

Применим следующую конструкцию: пусть $\{\xi_{x,n}\}$, $\{\eta_{y,k}\}$ — два независимых случайных поля. Определим

$$\varphi_{0,n}(u_1) := u_1 + \xi_{u_1,1} + \ldots + \xi_{\varphi_{0,n-1}(u_1),n},$$

$$\widetilde{\varphi}_{0,n}(u_2) := u_1 + \xi_{u_2,1} + \ldots + \xi_{\varphi_{0,n-1}(u_2),n}$$

для $n \le \tau$, где

$$\tau := \inf\{k\colon \varphi_{0,k}(u_1) = \varphi_{0,k}(u_2)\}.$$

Для $\tau > n$ $\varphi_{0,n}(u_1)$ определяется таким же образом (по случайному полю $\{\xi_{x,n}\}$), а

$$\widetilde{\varphi}_{0,n}(u_2) := u_1 + \xi_{u_2,1} + \ldots + \xi_{\varphi_{0,\tau-1}(u_2),\tau} + \eta_{\varphi_{0,\tau}(u_2),\tau+1} + \eta_{\varphi_{0,n-1}(u_2),n}.$$

Нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Докажем независимость конечномерных распределений $\varphi_{0,n}(u_1)$ и $\widetilde{\varphi}_{0,n}(u_2)$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{P}\{\varphi_{0,n_1}(u_1) = a_1, \ldots, \varphi_{0,n_k}(u_1) = a_k;\ \widetilde{\varphi}_{0,m_1}(u_2) = b_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_{0,m_n}(u_2) = b_n\} =$$

$$= \mathrm{P}\{\varphi_{0,n_1}(u_1) = a_1, \ldots, \varphi_{0,n_k}(u_1) = a_k\}\mathrm{P}\{\widetilde{\varphi}_{0,m_1}(u_2) = b_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_{0,m_n}(u_2) = b_n\}.$$

Доказательство. Вероятность в условии леммы равна

$$\sum_{N\in\mathbb{N}} \mathrm{P}\{\varphi_{0,n_1}(u_1) = a_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_{0,m_n}(u_2) = b_n \cap \tau = N\}.$$

Вероятность под знаком суммы можно записать следующим образом:

$$\sum \mathrm{P}\{\xi_{u_1,1} = x_1 - u_1, \xi_{x_1,2} = x_2 - x_1, \ldots, \xi_{x_{n_k-1},n_k} = a_k - x_{n_k-1};$$

$$\xi_{u_2,1} = y_1 - u_2, \xi_{y_{N-1},N} = y_N - y_{N-1}, \eta_{y_N,N+1} = y_{N+1} - y_N, \ldots$$

$$\ldots, \eta_{y_{m_n-1},m_n} = b_m - y_{m_n-1}\}.$$

Здесь рассматривается сумма по всем возможным наборам целых чисел

$$x_1, \ldots, x_{n_k-1};\ y_1, \ldots, y_{m_n-1}.$$

Последняя вероятность равна произведению отдельных вероятностей. Производя соответствующее суммирование, получаем утверждение леммы.

Рассмотрим *случайные ломаные*:

$$x_n^u(t) := \frac{\frac{i}{n} - t}{\frac{1}{n}} \frac{\varphi_{0,i-1}([u\sqrt{n}])}{\sqrt{n}} + \frac{t - \frac{i-1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{\varphi_{0,i}([u\sqrt{n}])}{\sqrt{n}},$$

$$t \in \left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right], \quad i \in \{1, \ldots, n\}; \quad x_n^u(\cdot) \in C([0;1], \mathbb{R}) \quad \forall u \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Используя условия слабой сходимости в $C([0;1], \mathbb{R})$, можно утверждать, что

$$x_n^u(\cdot) \Rightarrow w^u(\cdot), \quad n \to \infty,$$

где $w^u(\cdot)$ — винеровский процесс, стартующий из точки u.

Рассмотрим функцию $x_n^{u_1}(\cdot)$, построенную по случайному блужданию $\varphi_{0,n}(u_1)$, и функцию $x_n^{u_2}(\cdot)$, построенную по $\widetilde{\varphi}_{0,n}(u_2)$.

Случайная вектор-функция $\overrightarrow{X_n}(t) := (x_n^{u_1}(t); x_n^{u_2}(t))$ слабо сходится в $C([0;1], \mathbb{R}^2)$ к двумерному винеровскому процессу $\overrightarrow{W}(t) = (w^{u_1}(t); w^{u_2}(t))$, компоненты которого — независимые винеровские процессы [6].

Рассмотрим теперь отображение Φ:

$$\Phi : C([0;1], \mathbb{R}^2) \to C([0;1], \mathbb{R}^2),$$

$$\Phi(f_1(\cdot); f_2(\cdot))(t) := (f_1(t) * 1_{\{t \le \tau\}}; f_2(t) * 1_{\{t \le \tau\}}) + (f_1(t) * 1_{\{t > \tau\}}; f_1(t) * 1_{\{t > \tau\}}),$$

где $\tau := \inf\{t : f_1(t) = f_2(t)\} \wedge 1$.

Докажем, что винеровская мера точек разрыва отображения Φ равна 0.

Лемма 2. *Пусть*:

1) $\overrightarrow{F}(t) := (f_1(t);\ f_2(t)) \in C([0;1], \mathbb{R}^2)$;

2) $\tau_F := \inf\{t : f_1(t) = f_2(t)\} \wedge 1$;

3) $f_1(0) > f_2(0)$;

4) $\exists \{t_n\}$: $t_n \searrow \tau$, $f_1(t_n) < f_2(t_n)$.

Тогда $\overrightarrow{F}(\cdot)$ *— точка непрерывности отображения* Φ.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Укажем $\delta > 0$ такое, что $\|\Phi(\overrightarrow{F}) - \Phi(\overrightarrow{G})\| < \varepsilon$, как только $\|\overrightarrow{F} - \overrightarrow{G}\| < \delta$. Рассмотрим случай $\tau_F < \tau_G$ (случай $\tau_F \ge \tau_G$ рассматривается аналогично):

$$\|\Phi(\overrightarrow{F}) - \Phi(\overrightarrow{G})\| = \max_{0 \le t \le \tau_F} \sqrt{(f_1(t) - g_1(t))^2 + (f_2(t) - g_2(t))^2} +$$

$$+ \max_{\tau_F < t \le \tau_G} \sqrt{(f_1(t) - g_1(t))^2 + (f_1(t) - g_2(t))^2} + \max_{\tau_G < t \le 1} \sqrt{2(f_1(t) - g_1(t))^2} \le$$

$$\le \|f_1(\cdot) - g_1(\cdot)\| + \|f_2(\cdot) - g_2(\cdot)\| + \|f_1(\cdot) - g_1(\cdot)\| + \max_{\tau_F < t \le \tau_G} |f_1(t) - g_2(t)| +$$

$$+ \sqrt{2}\|f_1(\cdot) - g_1(\cdot)\| \le (2 + \sqrt{2})\|f_1(\cdot) - g_1(\cdot)\| + 2\|f_2(\cdot) - g_2(\cdot)\| + \max_{\tau_F < t \le \tau_G} |f_1(t) - f_2(t)|.$$

Выберем $g_1(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$ так, чтобы

$$\|f_1(\cdot) - g_1(\cdot)\| \leq \frac{\varepsilon}{3(2+\sqrt{2})}, \quad \|f_2(\cdot) - g_2(\cdot)\| \leq \frac{\varepsilon}{6}, \quad g_1(0) > g_2(0).$$

Такой выбор можно сделать в силу условия 3 теоремы.

Выберем t_0:

$$\forall t \in [\tau_F, t_0]\colon |f_1(t) - f_2(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad f_1(t_0) - f_2(t_0) < 0.$$

Такой выбор возможен в силу непрерывности f_1 и f_2. Докажем, что $\tau_G < t_0$ при дополнительных предположениях относительно g_1 и g_2:

$$\|f_1(\cdot) - g_1(\cdot)\| < \frac{f_2(t_0) - f_1(t_0)}{3}, \quad \|f_2(\cdot) - g_2(\cdot)\| < \frac{f_2(t_0) - f_1(t_0)}{3}.$$

Действительно,

$$g_1(t_0) - g_2(t_0) = g_1(t_0) - f_1(t_0) + f_1(t_0) - f_2(t_0) + f_2(t_0) - g_2(t_0) \leq \frac{f_1(t_0) - f_2(t_0)}{3} < 0.$$

Значит, при таком выборе g_1 и g_2 $\tau_G < t_0$ и $\max_{\tau_F < t \leq \tau_G} |f_1(t) - f_2(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\delta := \frac{\varepsilon}{3(2+\sqrt{2})} \wedge$ $\wedge\ \frac{f_2(t_0) - f_1(t_0)}{3}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть*

$$C_1 := \{(f_1(\cdot);\ f_2(\cdot)) \in C([0;1], \mathbb{R}^2)\colon f_1(\cdot) \text{ и } f_2(\cdot)$$

$$\text{пересекаются на } (0;1) \text{ и } \exists\{t_n\}:\ t_n \searrow \tau,\ f_1(t_n) < f_2(t_n)\},$$

$$C_2 := \{(f_1(\cdot);\ f_2(\cdot)) : f_1(\cdot) \text{ и } f_2(\cdot) \text{ не пересекаются на } (0;1)\}.$$

Тогда

$$W(C_1 \cup C_2) = 1,$$

где W — слабый предел последовательности мер, соответствующих распределениям случайных векторов $\overrightarrow{X}_n(t) = (x_n^{u_1}(t);\ x_n^{u_2}(t))$ на $C([0;1], \mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Имеет место равенство

$$W(C_1 \cup C_2) = \mathrm{P}\{(w^{u_1}(t); w^{u_2}(t)) \in C_1 \cup C_2\} = 1 - \mathrm{P}\{w^{u_1}(\cdot) \text{ и } w^{u_2}(\cdot)$$

$$\text{встречаются на } (0;1),\ \text{но } !\exists\{t_n\}:\ t_n \searrow \tau \text{ и } w^{u_1}(t_n) < w^{u_2}(t_n)\}.$$

Последняя вероятность равна 0 в силу строго марковского свойства винеровского процесса и закона повторного логарифма:

$$\mathrm{P}\left\{\varliminf_{t \to 0+} \frac{\frac{w^{u_1}(t) - w^{u_2}(t)}{\sqrt{2}}}{\sqrt{t \cdot \operatorname{lln}\frac{1}{t}}} = -1\right\} = 1.$$

Поэтому $W(C_1 \cup C_2) = 1$.

Лемма доказана.

Используя лемму 3 и основную теорему о слабой сходимости в пространстве непрерывных функций [6], получаем

$$\Phi(\overrightarrow{X}_n(\cdot)) \Rightarrow \Phi(\overrightarrow{W}(\cdot)),$$

т. е. слабую сходимость случайных блужданий со склеиванием к склеивающимся винеровским процессам. Действуя аналогичным образом в случае не двух, а N случайных блужданий, и переопределяя надлежащим образом отображение Φ, можно доказать слабую сходимость N склеивающихся случайных блужданий к N склеивающимся винеровским процессам. Для независимости $\{\varphi_{0,n}(u_i)\}_{n\geq 1}$, $i = \overline{1,N}$, в этом случае необходимо N независимых случайных полей $\{\xi^i_{x,k}\}$, $i = \overline{1,N}$. Случайные блуждания будем строить следующим образом: до момента первой встречи любых двух блужданий все $\varphi_{0,n}(u_i)$ строятся по полю $\{\xi^1_{x,k}\}$. После встречи двух блужданий одно из них строится дальше без изменений, а второе — по полю $\{\xi^2_{x,k}\}$.

В дальнейшем при встрече двух блужданий, эволюционирующих по полям $\{\xi^1_{x,k}\}$, $\{\xi^2_{x,k}\}$, одно из них не изменяем, а второе заставляем эволюционировать по еще „не занятому" полю $\{\xi^j_{x,k}\}$, $j \in \overline{3,\ldots,N}$. Перенесем теперь рассмотренную выше конструкцию на случай произвольных моментов старта s и точки старта u:

$$x^u_{n,s}(t) := \frac{\dfrac{i}{n} - t}{\dfrac{1}{n}} \frac{\varphi_{[ns],i-1}([u\sqrt{n}])}{\sqrt{n}} + \frac{t - \dfrac{i-1}{n}}{\dfrac{1}{n}} \frac{\varphi_{[ns],i}([u\sqrt{n}])}{\sqrt{n}},$$

$$t \in \left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right], \quad i - 1 \geq [ns], \quad i \leq n, \quad s, u \in \mathbb{Q}.$$

Здесь

$$\varphi_{m,n}(u) := u + \xi_{u,m+1} + \ldots + \xi_{\varphi_{m,n-1}(u),n}, \quad m \leq n-1,$$

$$\varphi_{m,m}(u) := u, \quad \varphi_{m,m+1}(u) := u + \xi_{u,m+1}.$$

Но при таком определении $x^u_{n,s}(t)$ определены, вообще говоря, на разных интервалах вида $\left[\dfrac{[ns]}{n}; 1\right]$. Для определения $x^u_{n,s}(t)$ на интервале $[s;1]$ рассмотрим последовательность

$$\{\widetilde{x}^u_{l,s}\}_{l=1}^{\infty} := \{x^u_{lm,s}\}_{l=1}^{\infty},$$

где m определяется равенством $s = \dfrac{k}{m}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ (напомним, что $s \in \mathbb{Q} \cap [0;1]$).

Таким образом можно получить произвольное число склеивающихся винеровских процессов, стартующих из точек (s,u), $s, u \in \mathbb{Q}$, т. е. броуновскую сеть.

Замечание. Для $\varphi_{m_1,n}(u_1)$ и $\varphi_{m_2,n}(u_2)$ момент первой встречи определяется так:

$$\tau := \inf\{n \geq m_2 \vee m_1 \colon \varphi_{m_1,n}(u_1) = \varphi_{m_2,n}(u_2)\}.$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Для $r_1 > r_2$ определим отображение

$$f\colon C([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad f(x^u_{n,s}(\cdot)) := x^u_{n,s}(r_1) - x^u_{n,s}(r_2);$$

f — непрерывное отображение, следовательно, $f(x^u_{n,s}) \Rightarrow f(w^u_s)$, где $w^u_s(\cdot)$ — винеровский процесс, стартующий в момент времени s из точки u. В силу определения $x^u_{n,s}(t)$ и случайных блужданий $\varphi_{m,n}(u)$ приращения $X^u_{n,s}(r_1) - X^u_{n,s}(r_2)$ будут независимыми для отделенных друг от друга временных интервалов $[s_1;t_1]$ и $[s_2;t_2]$, содержащих точки $r_1,\ r_2$. В силу слабой сходимости указанная независимость переносится на случай склеивающихся винеровских процессов. Значит, $H_{s_1,t_1} \perp H_{s_2,t_2}$, $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$.

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\Im_{s,t} := \sigma\{H_{s,t}\}$. *Тогда* $\Im_{s_1,t_1} \perp \Im_{s_2,t_2}$.

Доказательство следует из достаточного условия независимости σ-алгебр [7, с. 60].

Поскольку известно, что поток Арратья имеет cadlag-модификацию как случайный процесс, заданный на $\mathbb{R}$ и принимающий значения в $C([0;1])$ [8], в качестве фазового пространства для $x(\cdot,t)$ можно выбрать некоторое подмножество K пространства Скорохода D (см. введение) с индуцированной метрикой

$$K := \left\{ \varphi \in D, \varphi \nearrow,\ \exists \lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u} > 0, \int\limits_{\varphi^{-1}(0)}^{\varphi^{-1}(1)} \ln\varphi(z)dz > -\infty \right\}.$$

Лемма 4. *В любой момент времени* t *поток находится во множестве* K.

Доказательство. Проверим для произвольного момента времени t сохранение: 1) асимптотики на бесконечности и 2) локального условия в нуле.

1. Воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 1 [9]. *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ — *одинаково распределенные случайные величины с* $\mathrm{M}|\xi_n|^\alpha < \infty$, $\alpha > 0$. *Тогда имеет место соотношение* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\xi_n}{n^{1/\alpha}} = 0$ *почти наверное.*

Поскольку для потока Арратья в произвольный момент времени имеет место упорядоченность частиц, выполняются неравенства

$$\varphi(u) + w_{\varphi(u)}(t) \le \varphi(n+1) + w_{\varphi(n+1)}(t),$$

$$\varphi(n) + w_{\varphi(n)}(t) \le \varphi(u) + w_{\varphi(u)}(t), \quad u \in [n;n+1].$$

Здесь $w_x(t)$ — стандартный винеровский процесс, соответствующий точке x.

Так как имеют место оценки

$$\frac{|w_{\varphi(u)}(t)|}{n+1} \le \frac{|w_{\varphi(u)}(t)|}{u} \le \frac{|w_{\varphi(u)}(t)|}{n}, \quad u \in [n;n+1], \quad n > 0,$$

и обратные неравенства при $n+1 < 0$, то $\dfrac{w_{\varphi(u)}(t)}{u} \to 0,\ u \to \infty$ для любого $t > 0$.

Значит,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{x(\varphi(u),t)}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{\varphi(u)}{u}.$$

2. Проверим, что

$$\mathrm{M}\int\limits_{x(\varphi(0),t)^{-1}}^{x(\varphi(1),t)^{-1}} \ln x(\varphi(u),t)du > -\infty. \tag{1}$$

Поскольку выражение под знаком математического ожидания неположительное, тем самым будет доказано выполнение локального условия в нуле для произвольного момента времени $t \geq 0$.

Выполним замену переменных в (1) и оценим сверху получившееся выражение с противоположным знаком.

Обозначим $y(\cdot,t) := x(\varphi(\cdot),t)$, $t \geq 0$. Имеют место следующие соотношения:

$$\mathrm{M}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\lambda\left\{u\colon y(u,t)\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right\} = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\mathrm{M}\lambda\left\{u\colon y(u,t)\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\int\limits_{\mathbb{R}}dv\int\limits_{1/(n+1)}^{1/n}dx\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\varphi(v))^2}{2t}\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\int\limits_{\mathbb{R}}dv\int\limits_{1/(n+1)}^{1/n}dx\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{\varphi(v)^2}{2t}+\frac{2x^2}{t}\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\frac{1}{t}\right\}\int\limits_{\mathbb{R}}dv\exp\left\{-\frac{\varphi(v)^2}{2t}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) < +\infty.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Поток Арратья имеет измеримую модификацию как случайный процесс в пространстве K.*

Доказательство. Проверим непрерывность справа потока Арратья как случайного процесса в пространстве K [3]:

$$\mathrm{P}\{d(x(\cdot,t),x(\cdot,t_0))\to 0, t\searrow t_0\} =$$

$$\mathrm{P}\{\forall U\geq 0\ \exists\{\lambda^U_{t,\omega}\}\subset\Lambda'\colon \lim_{t\searrow t_0}\sup_{|u|\leq U}|x(\lambda^U_{t,\omega}(u),t)-x(u,t_0)| = 0,$$

$$\lim_{t\searrow t_0}\sup_{|u'|\leq U}|\lambda^U_{t,\omega}(u')-u'| = 0\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\bigcap_{U\geq 0}\bigcup_{\{\lambda^U_{t,\omega}\}\subset\Lambda'}\{\lim_{t\searrow t_0}\sup_{|u|\leq U}|x(\lambda^U_{t,\omega}(u),t)-x(u,t_0)| = 0\}\right.$$

$$\left.\bigcap\{\lim_{t\searrow t_0}\sup_{|u'|\le U}|\lambda^U_{t,\omega}(u')-u'|=0\}\right\}\ge$$

$$\ge \mathrm{P}\left\{\bigcap_{U\ge 0}\{\lim_{t\searrow t_0}\sup_{|u|\le U}|x(u,t)-x(u,t_0)|=0\}\right\}.$$

Известно, что [10]

$$\sup_{|u|\le U}|x(u,t)-x(u,t_0)|\sim\sqrt{(t-t_0)\ln(t-t_0)^{-1}},\quad t>t_0.$$

Поскольку $t\ln\dfrac{1}{t}\to 0$, $t\to 0+$, получаем

$$\{\sup_{|u|\le U}|x(u,t)-x(u,t_0)|\to 0, t\searrow t_0\}\supseteq$$

$$\supseteq\{\sup_{|u|\le U}|x(u,t)-x(u,t_0)|\sim\sqrt{(t-t_0)\ln(t-t_0)^{-1}}, t\searrow t_0\}.$$

Поэтому

$$\forall U\colon \mathrm{P}\{\sup_{|u|\le U}|x(u,t)-x(u,t_0)|\to 0, t\searrow t_0\}=1.$$

Здесь Λ' — множество строго возрастающих гомеоморфизмов вещественной прямой.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Процесс $x(\cdot,t)$ является марковским в пространстве (K,d), где d — метрика в пространстве Скорохода.*

Доказательство. Пусть $W_{s,t}(\cdot)$ — броуновская сеть. Справедливо равенство $W_{s,t}(x(\cdot,s))\overset{d}{=}$ $\overset{d}{=}x(\cdot,t)$. Действительно, в случае одномерных распределений получаем $u+w_1(s)+w_2(t-s)\overset{d}{=}$ $\overset{d}{=}u+w_1(t)$. Последнее же равенство заведомо выполняется, так как w_1 и w_2 — независимые винеровские процессы. Записав n-мерные распределения для левой и правой частей, получим случайные векторы $(x_{i_1},\ldots,x_{i_{k_1}},\ldots,x_{i_m},\ldots,x_{i_{k_m}})$, $k_1+\ldots+k_m=n$, компоненты которых имеют гауссовские распределения с равными параметрами и либо совпадают, либо независимы: $x_{i_j}=\ldots=x_{i_{k_j}}$, $j=\overline{1,m}$.

Зададим переходные вероятности: $\mathrm{P}(s,x,t,\Gamma):=\mathrm{P}\{W_{s,t}(x)\in\Gamma\}$, $x\in K$, $\Gamma\in\mathfrak{L}|_K$ — сужение цилиндрической σ-алгебры $\mathfrak{L}$ на множество K, $s<t$. Проверим выполнение марковского свойства [11]:

$$\mathrm{P}\{x(\cdot,t)\in\Gamma/\mathfrak{F}_s\}=\mathrm{P}\{W_{s,t}(x(\cdot,s))\in\Gamma/\mathfrak{F}_s\}=\mathrm{M}\{1_\Gamma(W_{s,t}(x(\cdot,s)))/\mathfrak{F}_s\}.\qquad(2)$$

Поскольку $W_{s,t}(\cdot)\perp\mathfrak{F}_s, x(\cdot,s)$ является $\mathfrak{F}_s$-измеримым, (2) можно записать так: $\mathrm{M}1_\Gamma(W_{s,t}(y))|_{y=x(\cdot,s)}=\mathrm{P}\{W_{s,t}(y)\in\Gamma\}|_{y=x(\cdot,s)}=\mathrm{P}(s,x,t,\Gamma)|_{y=x(\cdot,s)}=\mathrm{P}(s,x(\cdot,s),t,\Gamma)$. Здесь $\mathfrak{F}_s:=\sigma\{x(u,r),u\in\mathbb{R},r\le s\}$.

3. Локальное время в нуле для потока Арратья.

Лемма 5. *Существует*

$$L_2 - \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_0^{t \wedge \tau(u_k)} f_\varepsilon(x(u_k, s))ds =: \int\limits_0^{t \wedge \tau(u_k)} \delta_0(x(u_k, s))ds,$$

где $\tau(u_k) := \inf\{t\colon x(u_k, t) = x(u_{k-1}, t)\} \wedge 1$, $u_{k-1} < u_k$.

Доказательство. Рассмотрим функции $\varphi_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f_\varepsilon(x)dxds$, $\varphi_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$. Используем формулу Ито

$$\varphi_\varepsilon(x(u_k, s)) - \varphi_\varepsilon(u_k) - \int\limits_0^t \varphi_\varepsilon'(x(u_k, s))dx(u_k, s) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t f_\varepsilon(x(u_k, s))ds.$$

Имеют место следующие сходимости:

$$\varphi_\varepsilon'(\cdot) \to \frac{1}{2}1_{[0,+\infty)}(\cdot); \quad \varphi_\varepsilon(t) \to \frac{1}{2}t^+, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Переходя в формуле Ито к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получаем

$$x(u_k, s)^+ - u_k^+ - \int\limits_0^t 1_{[0;+\infty)}(x(u_k, s))dx(u_k, s) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to 0+}\int\limits_0^t f_\varepsilon(x(u_k, s))ds =:$$

$$=: \frac{1}{2}\int\limits_0^t \delta_0(x(u_k, s))ds.$$

Заметим, что выражение в левой части совпадает с локальным временем в нуле для броуновского движения $x(u_k, \cdot)$ [2].

Чтобы доказать утверждение леммы, нужно применить формулу Ито к остановленному случайному процессу $\tilde{x}(u_k, t) = x(u_k, t \wedge \tau(u_k))$. При этом заметим, что $\langle \tilde{x}(u_k, \cdot)\rangle_t = \langle (x(u_k, \cdot)\rangle_{t \wedge \tau(u_k)}$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Для каждого* $t \in [0; 1]$ *почти наверное существует предел*

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{t \wedge \tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds =: \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^{t \wedge \tau(u)} \delta_0(x(u, s))ds,$$

$$u_m^k = \frac{k}{2^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность неотрицательных случайных величин

$$S_m(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{t \wedge \tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds, \quad S_m(t) \in [0; +\infty], \quad S_m(t) \nearrow.$$

Пусть $S(t) := \lim_{m\to\infty} S_m(t)$. Докажем, что $S(t) < \infty$ почти наверное, $t \in [0;1]$.

По теореме Лебега о монотонной сходимости

$$\mathrm{M}S(t) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{M}S_m(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{M} \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{M} \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} f_{\frac{s}{2}}\left(\frac{w_2(s)}{\sqrt{2}} + u_m^k\right) ds =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^t dr \int\limits_0^{+\infty} dy f_{\frac{r}{2}}\left(\frac{y}{\sqrt{2}} + k\Delta - \frac{\Delta}{\sqrt{2}}\right) n_r\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}}, y\right), \tag{3}$$

где $n_r(x,y) = f_r(x-y) - f_r(x+y)$ — переходная плотность винеровского процесса с убыванием в нуле, $\Delta = \dfrac{1}{2^m}$.

В последнем равенстве использовано соотношение

$$\mathrm{M}\left[\int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds / w_2\right] = \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} f_{\frac{s}{2}}\left(\frac{w_2(s)}{\sqrt{2}} + u_m^k\right) ds.$$

Окончательно (3) можно записать так:

$$(3) = -\sqrt{2} \int\limits_0^t dr \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz f_{\frac{r}{2}}\left(\frac{y}{\sqrt{2}} + z\right) f_r'(y).$$

Поэтому $\mathrm{M}S(t) < +\infty$ и $S(t) < +\infty$ P-почти наверное, $t \in [0;1]$.

Обозначим $\Phi_t := \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t\wedge\tau(u)} \delta_0(x(u,s))ds$.

Теорема 5. Φ_t — *аддитивный, неотрицательный, непрерывный функционал от потока Арратья.*

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\varphi_t := \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} f_\varepsilon(x(u_m^k, s))ds, \quad u_m^k = \frac{k}{2^m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\varphi_{t+s} - \varphi_s := \int\limits_{s\wedge\tau(u_m^k)}^{(t+s)\wedge\tau(u_m^k)} f_\varepsilon(x(u_m^k, r))dr.$$

Согласно определению действия оператора сдвига [3, с. 128]

$$\theta_s(\{\omega\colon x(u_m^k, t) \in A\}) = \{\omega\colon x(u_m^k, t+s) \in A\},\ t \geq 0,\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Поэтому

$$\theta_s\varphi_t = \theta_s \int\limits_0^t f_\varepsilon(x(u_m^k, r))1_{\{r\le\tau(u_m^k)\}}dr = \int\limits_0^t f_\varepsilon(x(u_m^k, r+s))1_{\{r\le\tau(u_m^k)-s\}}dr =$$

$$= \int\limits_s^{t+s} f_\varepsilon(x(u_m^k, r'))1_{\{r'\le\tau(u_m^k)\}}dr' = \int\limits_{s\wedge\tau(u_m^k)}^{(t+s)\wedge\tau(u_m^k)} f_\varepsilon(x(u_m^k, r))dr.$$

Поэтому

$$\varphi_{t+s} - \varphi_s = \theta_s\varphi_t. \tag{4}$$

Переходя в (4) к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получаем, что $\int_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds$ — аддитивный неотрицательный функционал. Суммируя по k и переходя к пределу по m, доказываем, что $\int_{\mathbb{R}}\int_0^{t\wedge\tau(u)} \delta_0(x(u,s))ds$ — аддитивный неотрицательный функционал.

Проверим непрерывность. Заметим, что в силу неотрицательности

$$\sup_{0\le t\le 1} \sum_{k=n+1}^{l} \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds \le \sum_{k=n+1}^{l} \int\limits_0^{1\wedge\tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds \to 0, \quad n,\ l\to\infty,$$

как остаток сходящегося P-почти наверное ряда. Поэтому ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{t\wedge\tau(u_m^k)} \delta_0(x(u_m^k, s))ds$$

сходится равномерно по t. Обозначим его сумму $S_m(t), S_m(\cdot) \in C([0;1])$.

В силу вложенности разбиений

$$\sup_{s\in[0;t]} [S_n(s) - S_m(s)] = S_n(t) - S_m(t), \quad n \ge m.$$

Поскольку $\{S_n(t)\}_{n\ge1}$ — сходящаяся почти наверное последовательность, $S_n(t) - S_m(t) \to 0$, $n, m \to +\infty$. Значит, $S_n(\cdot) \rightrightarrows S(\cdot)$, $n \to +\infty$. Отсюда $S(\cdot) \in C([0;1])$.

Вычислим характеристику Φ_t.

Лемма 6. *Пусть $\varphi \in K$. Тогда*

$$M_\varphi\Phi_t = -\sqrt{2}\int\limits_0^t dr \int\limits_0^{+\infty} dy f_r'(y) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz f_{\frac{r}{2}}\left(\varphi(z) + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)\varphi'(z).$$

Доказательство. Согласно формуле (3)

$$M_\varphi\Phi_t = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^t dr \int\limits_0^{+\infty} dy f_{\frac{r}{2}} \left(\frac{y}{\sqrt{2}} + \varphi\left(\frac{k}{2^m}\right) - \frac{\varphi\left(\frac{k}{2^m}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{2^m}\right)}{\sqrt{2}}\right) \times$$

$$\times n_r \left(\frac{\varphi\left(\frac{k}{2^m}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{2^m}\right)}{\sqrt{2}}, y \right).$$

Заметив в последнем выражении интегральную сумму Римана, окончательно получаем

$$M_\varphi \Phi_t = -\sqrt{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_0^t dr \int\limits_0^{+\infty} dy f_r'(y) f_{\frac{r}{2}} \left(\varphi(z) + \frac{y}{\sqrt{2}} \right) \varphi'(z). \tag{5}$$

Применив теорему Фубини, получим утверждение леммы.

Вывод. Таким образом, построенное локальное время в нуле для потока Арратья является аддитивным, неотрицательным, непрерывным функционалом от потока как марковского процесса в фазовом пространстве K. Его характеристика имеет вид (5).

1. *Дороговцев А. А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.
2. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
3. *Портенко Н. И., Скороход А. В., Шуренков В. М.* Марковские процессы. – М.: Наука, 1989. – 248 с.
4. *Ethier S. N., Kurtz T. G.* Markov processes. Characterization and convergence. — Hoboken, New Jersey: John Willey & Sons, 2002. – 534 p.
5. *Fontes L. R. G., Isopi M., Newman C. N., Ravishankar K.* The Brownian web: characterization and convergence // Ann. Probab. – 2004. – **32**. – № 4.
6. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1997. – 352 с.
7. *Скороход А. В.* Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления // ВИНИТИ. – 1989. – **43**. – С. 5 – 145.
8. *Дороговцев А. А.* Некоторые замечания о винеровском потоке со склеиванием // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1327 – 1333.
9. *Дороговцев А. Я., Сильвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко Н. И.* Теория вероятностей. Сборник задач. – Киев: Вища шк., 1980. – 432 с.
10. *Shamov A.* On short-time asymptotics of one-dimensional Harris flows // arXiv$\hat{1}$010.5349V1.[mathPR] 26 Oct 2010.
11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.

Получено 21.07.11