УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, О. В. Коваленко (Днепропетр. нац. ун-т)

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НОРМОЙ ФУНКЦИИ И НОРМАМИ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПОРЯДКА k, $r-2$ И r, $0<k<r-2$

We establish conditions for a system of positive numbers M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}, $0=k_1<k_2<k_3=r-2$, $k_4=r$, necessary and sufficient for the existence of a function $x\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ such that $\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i}$, $i=1,2,3,4$.

Знайдені необхідні і достатні умови на систему додатних чисел M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}, $0=k_1<k_2<k_3=r-2$, $k_4=r$, які гарантують існування функції $x\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, такої, що $\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i}$, $i=1,2,3,4$.

1. Обозначения. Постановка задачи. Известные результаты. Через $L_\infty(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство измеримых и существенно ограниченных функций $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{ess\,sup}\left\{|x(t)|\colon t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Для натурального r через $L^r_\infty(\mathbb{R})$ обозначим пространство функций $x\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, что производная $x^{(r-1)}$, $x^{(0)}=x$, локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)}\in L_\infty(\mathbb{R})$. Пусть также $L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}) := L^r_\infty(\mathbb{R})\bigcap L_\infty(\mathbb{R})$.

Мы будем рассматривать один из случаев следующей общей задачи, поставленной А. Н. Колмогоровым [1–3] (в работах [4, 5] отмечено, что эта задача поставлена А. Н. Колмогоровым в 1926 г.).

Задача Колмогорова. *Пусть задана система целых чисел $0\le k_1<k_2<\ldots<k_d = r$. Найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система положительных чисел $M_{k_1},\ldots,M_{k_d}$, для того, чтобы существовала функция $x\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ такая, что*

$$\left\|x^{(k_i)}\right\| = M_{k_i},\quad i=1,\ldots,d.$$

Отметим (см. замечание в [6]), что для $d=2$, т. е. когда речь идет о зависимости между нормой функции ($k_1=0$) и нормой ее r-й производной, решение задачи тривиально: существуют функции, соответствующие любой паре положительных чисел M_0, M_r.

В [1–3] А. Н. Колмогоров привел формулировку и решение этой задачи для $d=3$, $k_1=0$, $0<k_2<r$ (для $r=2$ и $k=1$ эта задача была решена ранее Ж. Адамаром [7], а для всех случаев $r<5$, $k<r$, и случая $r=5$ и $k=2$ — Г. Е. Шиловым [8]). А. Н. Колмогоров показал, что для положительных чисел M_0, M_k, M_r, $0<k<r$, существует функция $x\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, для которой эти три числа являются значениями норм функции, ее k- и r-й производных соответственно, тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$M_k \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|}{\|\varphi_r\|^{1-k/r}} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r}, \tag{1}$$

где φ_r — эйлеров идеальный сплайн, т. е. r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$. Решение задачи Колмогорова для трех чисел с произвольным $k_1>0$ содержится, например, в [9] (§ 9.1).

Приведем известные результаты по решению задачи Колмогорова при $d>3$:

1) $k_1 = 0$, $k_2 = r - 2$, $k_3 = r - 1$, $k_4 = r$ (А. М. Родов [6]);

2) $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r - 2$, $k_4 = r - 1$, $k_5 = r$ (А. М. Родов [6]);

3) $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r - 1$, $k_4 = r$ (В. К. Дзядык, В. А. Дубовик [10]).

В [4] найдены достаточные условия для систем положительных чисел

$$M_0, M_1, M_2, M_5 \quad \text{и} \quad M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.$$

В случае произвольного $d > 3$ единственный известный результат принадлежит В. К. Дзядыку и В. А. Дубовику [10]. Ими получены достаточные условия для существования функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ с заданными значениями норм производных фиксированных порядков.

Для доказательства неравенства (1) А. Н. Колмогоровым было установлено утверждение, известное как теорема сравнения Колмогорова. Теоремами сравнения называют утверждения, которые дают оценку той или иной характеристики функции $x(t)$ из некоторого класса через соответствующую характеристику некоторой фиксированной функции. Последнюю функцию можно считать эталонной или стандартной для данного класса; ее также называют функцией сравнения для данного класса.

Отметим, что во всех приведенных частных решениях задачи Колмогорова существенно использовались идеи, связанные с теоремами сравнения. Как сама теорема сравнения Колмогорова, так и метод ее доказательства сыграли большую роль при точном решении многих экстремальных задач теории приближений (см. [11, 12]).

Цель данной статьи — решение задачи Колмогорова для системы положительных чисел M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{k_4}, $0 = k_1 < k_2 < k_3 = r - 2$, $k_4 = r$.

В следующем пункте мы введем некоторое семейство сплайнов и изучим их свойства. В пункте 3 докажем аналог теоремы сравнения Колмогорова для случая, когда заданы норма функции и нормы ее производных порядков $r - 2$ и r. Эта теорема не только используется при решении задачи Колмогорова, но и представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Здесь же в качестве следствия из теоремы сравнения мы приведем неравенство типа Колмогорова, включающее норму функции и нормы ее производных порядков k, $r - 2$ и r. Наконец, в пункте 4 будет приведено решение задачи Колмогорова для случая $0 = k_1 < k_2 < k_3 = r - 2$, $k_4 = r$.

2. Функции сравнения и их свойства. Пусть $a \ge 0$. Определим функцию $\psi_1(a;t)$ следующим образом. На отрезке $[0, a+2]$ положим

$$\psi_1(a;t) := \begin{cases} t - 1, & t \in [0,1], \\ 0, & t \in [1, a+1], \\ t - a - 1, & t \in [a+1, a+2]. \end{cases}$$

Продолжим функцию $\psi_1(a;t)$ четным образом на отрезок $[-(a+2), 0]$, а затем периодически с периодом $4 + 2a$ на всю ось. Заметим, что $\psi_1(a;t) \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ и

$$\left\|\psi_1'(a;\cdot)\right\| = 1. \tag{2}$$

Для $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_r(a;t)$ $(r-1)$-ю $(4+2a)$-периодическую первообразную функции $\psi_1(a;t)$ с нулевым средним на периоде (так что, в частности, $\psi_r'(a;t) = \psi_{r-1}(a;t)$).

Приведем свойства функции $\psi_r(a;t)$, которые нетрудно установить либо непосредственно, либо по аналогии со свойствами эйлеровых идеальных сплайнов φ_r (см., например, [11] (гл. 5), [12] (гл. 3)). Отметим, прежде всего, что функция $\psi_2(a;t)$ нечетна, имеет период $4+2a$,

$$\psi_2(a;t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}(t-1)^2 - \dfrac{1}{2}, & t \in [0,1], \\ -\dfrac{1}{2}, & t \in [1, a+1], \\ \dfrac{1}{2}(t-a-1)^2 - \dfrac{1}{2}, & t \in [a+1, a+2], \end{cases}$$

и

$$\|\psi_2(a;\cdot)\| = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Кроме того, функция $\psi_2(a;t)$ имеет ровно два нуля на периоде: точки 0 и $a+2$. Следовательно, функция $\psi_r(a;t)$ при $r \geq 2$ также имеет ровно два нуля на периоде: для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\psi_{2k}(a;0) = \psi_{2k}(a;a+2) = 0, \tag{4}$$

$$\psi_{2k+1}\left(a; 1+\frac{a}{2}\right) = \psi_{2k+1}\left(a; 3+\frac{3a}{2}\right) = 0. \tag{5}$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что при $r \geq 3$ функция $\psi_r(a;t)$ строго монотонна между нулями своей производной, а график функции $\psi_r(a;t)$ является выпуклым на каждом промежутке знакопостоянства. Кроме того, как легко видеть, график $\psi_r(a;t)$ симметричен относительно ее нулей, а также относительно прямых вида $t = t_0$, где t_0 — нуль $\psi_r'(a;t)$. Наконец отметим, что если $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$ для $\lambda > 0$, то $\psi_r(0;t) = \varphi_{\pi/2,r}(t)$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r-2$ *и заданы положительные числа* M_k, M_{r-2}, M_r *такие, что выполняется неравенство Колмогорова*

$$M_{r-2} \leq \frac{\|\varphi_2\|}{\|\varphi_{r-k}\|^{\frac{2}{r-k}}} M_k^{\frac{2}{r-k}} M_r^{\frac{r-k-2}{r-k}}. \tag{6}$$

Тогда существуют числа $a, b, \lambda > 0$ *такие, что для функции* $\Psi_{a,b,\lambda}(t) := b\psi(a;\lambda t)$ *выполняются равенства*

$$\left\|\Psi_{a,b,\lambda}^{(s)}\right\| = M_s, \quad s \in \{k, r-2, r\}. \tag{7}$$

В частности, для любой функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ *существуют числа* $a, b, \lambda > 0$ *такие, что*

$$\left\|\Psi_{a,b,\lambda}^{(s)}\right\| = \|x^{(s)}\|, \quad s \in \{k, r-2, r\}.$$

Доказательство. Положим

$$b := \frac{M_r}{\lambda^r}, \quad \lambda := \frac{\sqrt{M_r}}{\sqrt{2M_{r-2}}}. \tag{8}$$

Везде ниже в ходе данного доказательства считаем, что b и λ выбраны в соответствии с (8). Тогда в силу (2) и (3) получаем, что при всех $a \geq 0$ будет

$$\left\|\Psi^{(r)}_{a,b,\lambda}\right\| = M_r, \quad \left\|\Psi^{(r-2)}_{a,b,\lambda}\right\| = M_{r-2}.$$

Ясно, что для всех $k = 1, 2, \ldots, r-3$ функция $\left\|\Psi^{(k)}_{a,b,\lambda}\right\|$ непрерывно зависит от $a \in [0, \infty)$, возрастает на этом промежутке, причем

$$\lim_{a\to+\infty}\left\|\Psi^{(k)}_{a,b,\lambda}\right\| = \infty.$$

Поскольку неравенство (6) обращается в равенство для функции $\Psi^{(k)}_{0,b,\lambda}$, получаем

$$\left\|\Psi^{(k)}_{0,b,\lambda}\right\| = \left(\frac{\|\varphi_{r-k}\|^{\frac{2}{r-k}}}{\|\varphi_2\|}\frac{M_{r-2}}{M_r^{\frac{r-k-2}{r-k}}}\right)^{\frac{r-k}{2}} \le M_k.$$

Следовательно, существует $a \ge 0$ такое, что

$$\left\|\Psi^{(k)}_{a,b,\lambda}\right\| = M_k.$$

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Для чисел M_k, M_{r-2}, M_r, удовлетворяющих неравенству (6), будем обозначать через $\Psi_r(M_k, M_{r-2}, M_r; t)$ функцию $\Psi_{a,b,\lambda}(t)$ из теоремы 1, параметры a, b, λ которой выбраны так, что выполняются соотношения (7).

3. Теорема сравнения и аналог неравенства Колмогорова. Следующая теорема является аналогом теоремы сравнения Колмогорова в случае, когда заданы норма функции, ее $(r-2)$- и r-й производных.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $0 = k_1 < k_2 < k_3 = r-2$, $k_4 = r$ и $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть числа $a, b, \lambda > 0$ таковы, что для функции $\Psi_{a,b,\lambda}(t)$ выполняются соотношения*

$$\left\|x^{(k_i)}\right\| \le \left\|\Psi^{(k_i)}_{a,b,\lambda}\right\|, \quad i = 1, 3, 4. \tag{9}$$

Если точки τ и ξ таковы, что $x(\tau) = \Psi_{a,b,\lambda}(\xi)$, то

$$\left|x'(\tau)\right| \le \left|\Psi'_{a,b,\lambda}(\xi)\right|. \tag{10}$$

Доказательство. Для сокращения записей в ходе данного доказательства будем писать $\Psi(t)$ вместо $\Psi_{a,b,\lambda}(t)$. Рассматривая при необходимости функцию $-x(t)$ вместо функции $x(t)$ и функцию $-\Psi(t)$ вместо $\Psi(t)$, можем считать, что $x'(\tau) > 0$ и

$$\Psi'(\tau) > 0. \tag{11}$$

Кроме того, рассматривая подходящий сдвиг $\Psi(\cdot + \alpha)$ функции Ψ, можем считать, что и $\tau = \xi$, т. е.

$$x(\tau) = \Psi(\tau). \tag{12}$$

Предположим, что (12) имеет место, но при этом вместо неравенства (10) (с $\xi = \tau$) имеет место неравенство

$$\left|x'(\tau)\right| > \left|\Psi'(\tau)\right|.$$

Обозначим через (τ_1, τ_2) наименьший интервал монотонности Ψ, содержащий точку τ и такой, что $\Psi'(\tau_1) = \Psi'(\tau_2) = 0$. В силу сделанного предположения существует число $\delta > 0$ такое, что $x'(t) > \Psi'(t)$ для всех $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$, а значит, в силу (12) $x(\tau + \delta) > \Psi(\tau + \delta)$ и $x(\tau - \delta) < \Psi(\tau - \delta)$.

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для функции $x_\varepsilon(t) := (1 - \varepsilon)x(t)$ выполнялись неравенства $x_\varepsilon(\tau + \delta) > \Psi(\tau + \delta)$ и $x_\varepsilon(\tau - \delta) < \Psi(\tau - \delta)$. В силу (9) и (11) будет

$$x_\varepsilon(\tau_1) > \Psi(\tau_1), \quad x_\varepsilon(\tau_2) < \Psi(\tau_2).$$

Таким образом, на промежутке (τ_1, τ_2) разность $\Delta_\varepsilon(t) := x_\varepsilon(t) - \Psi(t)$ будет иметь не менее трех перемен знака.

Как легко видеть, существует проследовательность функций $\mu_N \in C^\infty(\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

1) $\mu_N(t) = 1$ на промежутке $[\tau_1, \tau_2]$, $\|\mu_N\| = 1$;

2) $\mu_N(t) = 0$ для всех t вне промежутка $\left[\tau_1 - N\dfrac{2+a}{\lambda}; \tau_1 + N\dfrac{2+a}{\lambda}\right]$;

3) для всех $k = 1, 2, \ldots, r$

$$\max_{j=\overline{1,k}} \left\|\mu_N^{(j)}\right\| < \varepsilon \|x_\varepsilon^{(k)}\| \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i \left\|x_\varepsilon^{(k-i)}\right\|\right)^{-1},$$

если N достаточно велико.

Ниже считаем, что N выбрано настолько большим, что свойство 3 выполнено.

Положим

$$x_N(t) := x_\varepsilon(t)\mu_N(t),$$

и

$$\Delta_N(t) := \Psi(t) - x_N(t).$$

Тогда

$$\begin{gathered} x_N(t) = x_\varepsilon(t), \quad \text{если} \quad t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \Delta_N(t) = \Psi(t), \quad \text{если} \quad |t - \tau_1| \geq N\frac{a+2}{\lambda}, \end{gathered} \tag{13}$$

и

$$\|x_N\| \leq \|x_\varepsilon\| = (1 - \varepsilon)\|x\| \leq (1 - \varepsilon)\|\Psi\|.$$

Кроме того для $k = 1, \ldots, r$

$$\left|x_N^{(k)}(t)\right| = \left|[x_\varepsilon(t)\mu_N(t)]^{(k)}\right| = \left|\sum_{i=0}^{k} C_k^i x_\varepsilon^{(k-i)}(t)\mu_N^{(i)}(t)\right| \leq$$

$$\leq \left\|x_\varepsilon^{(k)}\right\| + \sum_{i=1}^{k} C_k^i \left\|x_\varepsilon^{(k-i)}\right\| \|\mu_N^{(i)}\|.$$

Отсюда, с учетом свойства 3 функции μ_N и выбора числа N, получаем

$$\left\|x_N^{(k)}\right\| < \left\|x_\varepsilon^{(k)}\right\| + \varepsilon\left\|x_\varepsilon^{(k)}\right\| = (1-\varepsilon)\left\|x^{(k)}\right\| + \varepsilon\left\|x^{(k)}\right\| = \left\|x^{(k)}\right\|.$$

Для $t \in [\tau_1, \tau_2]$ имеем $\Delta_N = \Psi(t) - x_\varepsilon(t)$, а значит, функция $\Delta_N(t)$ имеет не менее трех перемен знака на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. На каждом из остальных промежутков монотонности функции Ψ функция Δ_N имеет не менее одной перемены знака. Таким образом, на промежутке $\left[\tau_1 - N\dfrac{a+2}{\lambda}, \tau_1 + N\dfrac{a+2}{\lambda}\right]$ функция $\Delta_N(t)$ имеет не менее $2N+2$ перемен знака. Кроме того, в силу (4), (5) и (13) для всех $i = 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{r-1}{2}\right]$ справедливы равенства

$$\Delta_N^{(2i-1)}\left(\tau_1 - N\frac{a+2}{\lambda}\right) = \Delta_N^{(2i-1)}\left(\tau_1 + N\frac{a+2}{\lambda}\right) = 0. \tag{14}$$

Применяя теперь теорему Ролля и учитывая (14), получаем, что функция $\Delta_N^{(r-2)}(t)$ имеет не менее $2N+2$ нуля на промежутке $\left[\tau_1 - N\dfrac{a+2}{\lambda}, \tau_1 + N\dfrac{a+2}{\lambda}\right]$. Отсюда следует, что на некотором промежутке монотонности $\left[\alpha, \alpha + \dfrac{2+a}{\lambda}\right] \subset \left[\tau_1 - N\dfrac{a+2}{\lambda}, \tau_1 + N\dfrac{a+2}{\lambda}\right]$ $\left(\alpha := \dfrac{1}{\lambda} + \right.$ $\left. + k\dfrac{a+2}{\lambda},\ k \in \mathbb{N}\right)$ функции $\Psi^{(r-2)}(t) = b\lambda^{-2}\psi(a, \lambda t)$ функция $\Delta_N^{(r-2)}(t)$ меняет знак не менее трех раз. Но тогда и разность

$$b\lambda^{-2}\psi(0, \lambda t) - x_N^{(r-2)}(t)$$

на некотором промежутке монотонности функции $b\lambda^{-2}\psi(0, \lambda t)$ меняет знак не менее трех раз. Однако это противоречит теореме сравнения Колмогорова (см., например, [12], предложение 5.5.3), так как эйлеров сплайн $b\lambda^{-2}\psi(0, \lambda t)$ является функцией сравнения для функции $x_N^{(r-2)}(t)$.

Как следствие из теоремы 2 получаем следующую теорему, которую можно рассматривать как неравенство типа Колмогорова, оценивающее норму k-й производной функции через норму самой функции и нормы ее $(r-2)$- и r-й производных.

Теорема 3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $0 = k_1 < k_2 < k_3 = r-2$, $k_4 = r$ и $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть числа $a, b, \lambda > 0$ таковы, что для функции $\Psi_{a,b,\lambda}(t)$ выполняются соотношения* (9). *Тогда*

$$\left\|x^{(k_2)}\right\| \le \left\|\Psi_{a,b,\lambda}^{(k_2)}\right\|.$$

4. Решение задачи Колмогорова для случая $0 = k_1 < k_2 < k_3 = r-2$, $k_4 = r$.

Теорема 4. *Пусть заданы натуральные числа $r \ge 4$, $0 = k_1 < k_2 < k_3 = r-2$, $k_4 = r$ и действительные числа M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, $M_{k_4} > 0$. Существует функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ такая, что*

$$\left\|x^{(k_i)}\right\| = M_{k_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{15}$$

тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

a) $M_{r-2} \le \dfrac{\|\varphi_2\|}{\|\varphi_{r-k}\|^{\frac{2}{r-k}}} M_k^{\frac{2}{r-k}} M_r^{\frac{r-k-2}{r-k}}$,

b) $M_0 \ge \|\Psi_r(M_{k_2}, M_{r-2}, M_r)\|$,

где функция Ψ_r определена в замечании 1.

Необходимость условия a) следует из неравенства Колмогорова, необходимость условия b) — из теоремы 3.

Для доказательства достаточности заметим, что в случае выполнения условий a) и b) для функции

$$x(t) := \Psi_r(M_{k_2}, M_{r-2}, M_r; t) + M_0 - \|\Psi_r(M_{k_2}, M_{r-2}, M_r)\|$$

выполняются равенства (15).

Теорема доказана.

1. *Kolmogorov A. N.* Une generalization de l'inegalite de M. J. Hadamard entre les bornes superieures des derivees successives d'une function // C. r. Acad. sci. Paris. – 1938. – **207**. – P. 764 – 765.
2. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. Моск. гос. ун-та. – 1939. – **30**. – С. 3 – 16.
3. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
4. *Родов А.М.* Достаточные условия существования функции действительного переменного с заданными верхними гранями модулей самой функции и ее пяти последовательных производных // Уч. зап. БГУ им. В. И. Ленина. Сер. физ.-мат. – 1954. – **19**. – С. 65 – 72.
5. *Дзядык В. К., Дубовик В. А.* К проблеме А. Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 300 – 317.
6. *Родов А.М.* Зависимость между верхними гранями производных функций действительного переменного // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 257 – 270.
7. *Hadamard J.* Sur le maximum d'une fonction et de ses derivees // C. r. Soc. Math. France. – 1914. – **41**. – P. 68 – 72.
8. *Шилов Г. Е.* О неравенствах между производными // Сб. работ студ. науч. кружков МГУ. – 1937. – **1**. – С. 17 – 27.
9. *Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
10. *Дзядык В. К., Дубовик В. А.* К неравенствам А. Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 3. – С. 291 – 299.
11. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
12. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.

Получено 31.12.11