УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля)

НАИЛУЧШЕЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ, ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Exact constants in Jackson-type inequalities are calculated in the space $L_2(\mathbb{R})$ in the case where the quantity of the best approximation $\mathcal{A}_\sigma(f)$ is estimated from above by the averaged smoothness characteristic $\Phi_2(f,t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \|\Delta_h^2(f)\|dh$. We also calculate the exact values of the average ν-widths of classes of functions defined by Φ_2.

У просторі $L_2(\mathbb{R})$ обчислено точні константи в нерівностях типу Джексона у випадку, коли величина найкращого наближення $\mathcal{A}_\sigma(f)$ оцінюється зверху осередненою характеристикою гладкості $\Phi_2(f,t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \|\Delta_h^2(f)\|dh$. Також обчислено точні значення середніх ν-поперечників класів функцій, означених за допомогою Φ_2.

1. Теория приближения функций является одним из наиболее успешно развивающихся направлений современной математики, имеющим важное значение в различных ее областях. При этом в качестве аппаратов приближения используются, например, полиномы, сплайны, целые функции, вейвлет-функции („всплески”) и т. д.

Начало исследованиям, связанным с аппроксимацией функций, заданных на всей вещественной оси, было положено в работах С. Н. Бернштейна (см., например, [1]). Средством приближения послужило подпространство целых функций конечного экспоненциального типа, к которому С. Н. Бернштейн пришел путем некоторого предельного процесса по алгебраическим полиномам. В ходе проводимых им исследований выяснилось, что рассматриваемые пространства обобщали и тригонометрические полиномы. В дальнейшем различные аспекты теории аппроксимации функций на вещественной оси целыми функциями экспоненциального типа нашли свое отражение в работах Н. И. Ахиезера, А. Ф. Тимана, М. Ф. Тимана, С. М. Никольского, И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова, В. Ю. Попова, В. К. Дзядыка, А. И. Степанца и многих других (см., например, [2 – 12]).

Пусть $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} := \{x\colon\ -\infty < x < \infty\}$ — пространство вещественных функций f, определенных и измеримых на $\mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию

$$\|f\| := \left\{ \int\limits_{-\infty}^{-\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Символом $B_{\sigma,2}$, $0 < \sigma < \infty$, обозначим подпространство целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$. Величину

$$\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf\big\{\|f-g\|\colon g \in B_{\sigma,2}\big\},$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$, называют наилучшим приближением функции f элементами подпространства $B_{\sigma,2}$.

Для решения ряда задач конструктивной теории функций в пространстве 2π-периодических функций $L_p([0,2\pi])$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Н. Н. Пустовойтов использовал вместо модуля непрерывности k-го порядка $\omega_k(f,t)_p$ усредненную конечную разность k-го порядка [13]

$$\Phi_k(f,t)_p := \frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\Delta_h^k(f)\|_p dh,$$

где $\Delta_h^k(f,x) := \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(x+jh)$ — конечная разность k-го порядка функции f в точке x с шагом h. В [13] также отмечалось, что в смысле слабой эквивалентности для 2π-периодической функции $f \in L_p([0,2\pi])$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, справедливо соотношение $\Phi_k(f,t)_p \asymp \asymp \omega_k(f,t)_p$.

Под $L_p^r([0,2\pi])$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, понимаем множество функций $f \in L_p([0,2\pi])$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_p([0,2\pi])$. В случае $r=0$ полагаем $L_p^0([0,2\pi]) \equiv L_p([0,2\pi])$. При $p=k=2$ для полиномиальной аппроксимации 2π-периодических функций в пространстве $L_2([0,2\pi])$ из результатов работы [14] получаем

$$\sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Phi_2(f^{(r)},t)_2} \colon f \in L_2^r([0,2\pi]), f \not\equiv \mathrm{const}\right\} = \left\{2\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)\right\}^{-1}, \tag{1}$$

где $0 < t \leqslant \pi/(2n)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)} \equiv f$, $E_{n-1}(f)_2$ — наилучшее приближение функции $f \in L_2([0,2\pi])$ подпространством тригонометрических полиномов порядка $n-1$ в метрике пространства $L_2([0,2\pi])$. Напомним, что отношение $0/0$ полагаем равным нулю.

2. С целью распространения результата (1) на случай наилучшей аппроксимации целыми функциями конечного экспоненциального типа на всей вещественной оси в качестве усредненной характеристики гладкости произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим величину

$$\Phi_2(f,t) := \frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\Delta_h^2(f)\| dh, \quad t > 0.$$

Через $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^r(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\| + \|f^{(r)}\|$. Полагаем $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \sigma < \infty$ и $0 < t \leqslant \pi/(2\sigma)$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{\frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Phi_2(f^{(r)},t)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} = \left\{2\left(1-\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1}. \tag{2}$$

При $r=0$ верхняя грань вычисляется на множестве функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

Доказательство. Известно [6], что для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует единственная целая функция $\Lambda_\sigma(f) \in B_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$\Lambda_\sigma(f,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau}\chi_\sigma(\tau)\mathcal{F}(f,\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ix\tau}\mathcal{F}(f,\tau)d\tau,$$

где $\mathcal{F}(f)$ — преобразование Фурье функции f, χ_σ — характеристическая функция множества $(-\sigma,\sigma)$. Для квадрата наилучшего среднеквадратического приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ подпространством $B_{\sigma,2}$ получаем (см., например, [6, 7])

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) = \|f - \Lambda_\sigma(f)\|^2 = \int\limits_{|\tau|\geqslant\sigma} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau. \tag{3}$$

Поскольку вследствие вещественности функции f функция $|\mathcal{F}(t)|$ является четной, в силу (3) запишем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) = 2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau. \tag{4}$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_2^r(\mathbb{R})$. Опираясь на фундаментальные свойства преобразования Фурье (см., например, [2, 3]), имеем

$$\mathcal{F}(\Delta_h^2(f^{(r)}),\tau) = (i\tau)^r(e^{ih\tau}-1)^2\ \mathcal{F}(f,\tau). \tag{5}$$

По теореме Планшереля, поскольку $\Delta_h^2(f^{(r)}) \in L_2(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}(\Delta_h^2(f^{(r)})) \in L_2(\mathbb{R})$ и эти функции имеют одинаковые нормы. Поэтому в силу равенства (5) получаем

$$\|\Delta_h^2(f^{(r)})\|^2 = 2^3\int\limits_0^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2\tau^{2r}(1-\cos h\tau)^2 d\tau. \tag{6}$$

Используя соотношение (4), записываем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) - 2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2\cos h\tau d\tau = 2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|\left\{|\mathcal{F}(f,\tau)|(1-\cos h\tau)\right\} d\tau. \tag{7}$$

Применяя к правой части равенства (7) неравенство Гельдера и используя соотношения (4) и (6), имеем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) - 2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2\cos h\tau d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left\{2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau\right\}^{1/2}\left\{2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2(1-\cos h\tau)^2 d\tau\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{A}_\sigma(f)\left\{\frac{2}{\sigma^{2r}}\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2\tau^{2r}(1-\cos h\tau)^2 d\tau\right\}^{1/2} \leqslant \mathcal{A}_\sigma(f)\frac{\|\Delta_h^2(f^{(r)})\|}{2\sigma^r}. \tag{8}$$

Интегрируя соотношение (8) по h в пределах от 0 до t, где $0 < t \leqslant \pi/(2\sigma)$, и умножая обе части полученного неравенства на величину $1/t$, получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) \leqslant 2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f,\tau)|^2\frac{|\sin\tau t|}{\tau t}d\tau + \mathcal{A}_\sigma(f)\frac{\Phi_2(f^{(r)},t)}{2\sigma^r}. \tag{9}$$

Поскольку при $0 < t\sigma \leqslant \pi/2$ имеем

$$\max\left\{\frac{|\sin u|}{u} : t\sigma \leqslant u\right\} = \frac{\sin\sigma t}{\sigma t},$$

из неравенства (9) получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f) \leqslant \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\mathcal{A}_\sigma^2(f) + \mathcal{A}_\sigma(f)\frac{\Phi_2(f^{(r)},t)}{2\sigma^r}.$$

Следовательно,

$$\sup\left\{\frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Phi_2(f^{(r)},t)} : f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \leqslant \left\{2\left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части неравенства (10), рассмотрим, как и в работе [10], целую функцию экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ — произвольное число, $\sigma_* := \min(\sigma, 1)$, заданную формулой

$$q_\varepsilon(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\mu_{\sigma+\varepsilon}(x) - \mu_\sigma(x)\right). \tag{11}$$

Здесь

$$\mu_a(x) := \frac{\sin ax}{x}, \qquad a > 0.$$

Поскольку преобразование Фурье функции μ_a имеет вид

$$\mathcal{F}(\mu_a, x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{если} \quad |x| < a, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{если} \quad |x| = a, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > a, \end{cases}$$

для целой функции q_ε в силу представления (11) получаем

$$\mathcal{F}(q_\varepsilon, x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma < |x| < \sigma + \varepsilon, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad |x| = \sigma + \varepsilon \quad \text{или} \quad |x| = \sigma, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \sigma + \varepsilon \quad \text{или} \quad |x| < \sigma. \end{cases} \tag{12}$$

Очевидно, что q_ε принадлежит пространству $L_2^r(\mathbb{R})$. На основании равенства (4) и формулы (12) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(q_\varepsilon) = 2\varepsilon. \tag{13}$$

Поскольку $\mathcal{F}(q_\varepsilon^{(r)}, x) = (ix)^r\mathcal{F}(q_\varepsilon, x)$, используя соотношения (6) и (12), получаем

$$\|\Delta_h^2(q_\varepsilon^{(r)})\|^2 = 2^3\int\limits_\sigma^{\sigma+\varepsilon}\tau^{2r}(1 - \cos h\tau)^2 d\tau \leqslant 2^3\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}(1 - \cos(\sigma+\varepsilon)h)^2, \tag{14}$$

где $0 < h \leqslant \pi/(2\sigma)$. Из неравенства (14) следует оценка сверху

$$\Phi_2(q_\varepsilon^{(r)}, t) \leqslant 2^{3/2}\sqrt{\varepsilon}(\sigma+\varepsilon)^r\left(1 - \frac{\sin(\sigma+\varepsilon)t}{(\sigma+\varepsilon)t}\right). \tag{15}$$

Используя формулы (13) и (15), записываем

$$\frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon)}{\Phi_2(q_\varepsilon^{(r)}, t)} \geqslant U_t(\sigma, \varepsilon), \tag{16}$$

где

$$U_t(\sigma, \varepsilon) := \left(\frac{\sigma}{\sigma+\varepsilon}\right)^r \left\{2\left(1 - \frac{\sin(\sigma+\varepsilon)t}{(\sigma+\varepsilon)t}\right)\right\}^{-1}. \tag{17}$$

Учитывая принадлежность функции q_ε множеству $L_2^r(\mathbb{R})$, на основании неравенства (16) получаем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Phi_2(f^{(r)}, t)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \geqslant U_t(\sigma, \varepsilon). \tag{18}$$

Из формул (10), (17) и (18) следует, что при стремлении ε к нулю справа величина $U_t(\sigma, \varepsilon)$ будет монотонно возрастать, оставаясь ограниченной сверху числом, записанным в правой части неравенства (10). Вычислим верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ от выражения, содержащегося в правой части неравенства (18). Очевидно, что указанная верхняя грань не будет превышать левую часть соотношения (18). Поскольку для любого сколь угодно малого числа $\delta > 0$ можно подобрать число $\varepsilon_* := \varepsilon(\delta) \in (0, \sigma_*)$ так, что $U_t(\sigma, \varepsilon_*) > \left\{2\left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1} - \delta$, из определения верхней грани множества имеем

$$\sup\{U_t(\sigma, \varepsilon) \colon 0 < \varepsilon < \sigma_*\} = \left\{2\left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1}. \tag{19}$$

Требуемое равенство (2) получаем, сопоставляя оценку сверху (10) и следующую из формул (18), (19) оценку снизу

$$\sup\left\{\frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Phi_2(f^{(r)}, t)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \geqslant \left\{2\left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Поскольку все промежуточные производные функции $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, $r = 2, 3, \ldots$, также принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$, определенный интерес представляет вычисление экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений промежуточных производных $f^{(r-\mu)}$, $\mu = 1, \ldots, r-1$, элементами подпространства $B_{\sigma,2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2. *Пусть* $r = 2, 3, \ldots$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leqslant \pi/(2\sigma)$, $\mu = 1, \ldots, r-1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{\frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\Phi_2(f^{(r)}, t)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} = \left\{2\left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1}. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, для которой в силу формулы (2) запишем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant \left\{2\sigma^r\left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1} \Phi_2(f^{(r)}, t). \tag{21}$$

Поскольку $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$, на основании соотношения (2), в котором в качестве функции f использована ее производная r-го порядка $f^{(r)}$, получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r)}) \leqslant \left\{2\left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1} \Phi_2(f^{(r)}, t). \tag{22}$$

В работе [12] для $f \in L_2^r(\mathbb{R})$ было установлено неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)}) \leqslant \mathcal{A}_\sigma^{1-\mu/r}(f^{(r)}) \cdot \mathcal{A}_\sigma^{\mu/r}(f). \tag{23}$$

Используя соотношения (21), (22), из (23) имеем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\Phi_2(f^{(r)},t)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \leqslant \left\{2\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1}. \tag{24}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части неравенства (24), рассмотрим функцию $q_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, введенную при доказательстве теоремы 1. С учетом формулы (12) получаем

$$\mathcal{A}_\sigma^2(q_\varepsilon^{(r-\mu)}) = 2\int\limits_\sigma^\infty |\mathcal{F}(q_\varepsilon,\tau)|^2 \tau^{2(r-\mu)} d\tau = 2\int\limits_\sigma^{\sigma+\varepsilon} \tau^{2(r-\mu)} d\tau \geqslant 2\varepsilon\sigma^{2(r-\mu)}. \tag{25}$$

Используя неравенства (15) и (25), имеем

$$\frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(q_\varepsilon^{(r-\mu)})}{\Phi_2(q_\varepsilon^{(r)},t)} \geqslant U_t(\sigma,\varepsilon), \tag{26}$$

где величина $U_t(\sigma,\varepsilon)$ определена формулой (17). Проводя рассуждения, аналогичные имевшим место при завершении доказательства теоремы 1, записываем

$$\sup\left\{\frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\Phi_2(f^{(r)},t)} \colon f \in L_2^r(\mathbb{R})\right\} \geqslant \left\{2\left(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)\right\}^{-1}. \tag{27}$$

Требуемое равенство (20) получаем из сравнения оценок сверху (24) и снизу (27), что и завершает доказательство теоремы 2.

4. Напомним, что введение Г. Г. Магарил-Ильяевым в работах [15, 16] определения средней размерности, являющегося модификацией соответствующего понятия, данного ранее В. М. Тихомировым, дало возможность определить аппроксимационные характеристики, подобные n-поперечникам. При этом роль размерности играла средняя размерность. В результате этого значительно расширился круг экстремальных задач теории приближения функций, имеющих оптимизационное содержание, которые стало возможным решать на всей вещественной оси $\mathbb{R}$. Прежде чем ввести необходимые экстремальные характристики, приведем ряд необходимых определений и понятий из работы [16].

Пусть $BL_2(\mathbb{R})$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$; $\mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$ — совокупность всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$;

$$\mathrm{Lin}_n(L_2(\mathbb{R})) := \Big\{\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R}))\colon \dim\mathcal{L} \leqslant n\Big\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$d(Q,A,L_2(\mathbb{R})) := \sup\Big\{\inf\{\|x-y\|\colon y \in A\}\colon x \in Q\Big\}$$

— наилучшее приближение множества $Q \subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A \subset L_2(\mathbb{R})$. Под $A_T, T > 0$, понимаем сужение множества $A \subset L_2(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T,T]$, а через $\mathrm{Lin}_C L_2(\mathbb{R})$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_2([-T,T])$ при любом $T > 0$.

Если $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $T, \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M} \in \mathrm{Lin}_n(L_2(\mathbb{R}))$, для которых

$$d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon.$$

Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \min\Big\{n \in \mathbb{Z}_+ \colon \exists\, \mathcal{M} \in \mathrm{Lin}_n(L_2([-T,T])),$$

$$d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R})_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon\Big\}.$$

Данная функция не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \lim\Big\{\liminf\{D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R}))/(2T) \colon T \to \infty\} \colon \varepsilon \to 0\Big\},$$

где $\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Из [15] следует, что

$$\overline{\dim}(B_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) = \frac{\sigma}{\pi}\,. \tag{28}$$

Пусть Q — центрально-симметричное подмножество из $L_2(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ — произвольное конечное число. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \inf\Big\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\| \colon \varphi \in \mathcal{L}\} \colon f \in Q\} \colon$$

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu\Big\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется экстремальным.

Средним линейным ν-поперечником множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \inf\Big\{\sup\{\|f - \Lambda(f)\| \colon f \in Q\} \colon (X, \Lambda)\Big\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, Λ) таким, что X — нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_2(\mathbb{R})$, $Q \subset X$, $\Lambda \colon X \to L_2(\mathbb{R})$ — непрерывный линейный оператор, для которого $\mathrm{Im}\Lambda \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $\overline{\dim}(\mathrm{Im}\Lambda, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu$. Здесь $\mathrm{Im}\Lambda$ — образ оператора Λ. Пару, на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \sup\Big\{\sup\{\rho > 0 \colon \mathcal{L} \cap \rho BL_2(\mathbb{R}) \subset Q\} \colon$$

$$\mathcal{L} \in \mathrm{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > \nu, \overline{d}_\nu(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1\Big\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества Q в $L_2(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{L}$ при вычислении внешней верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых справедлив аналог теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике шара. Этому требованию удовлетворяет, например, подпространство $B_{\sigma,2}$, если $\sigma > \nu\pi$, т. е. $\overline{d}_\nu(B_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Между перечисленными экстремальными характеристиками множества Q имеют место следующие неравенства:

$$\overline{b}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{d}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})). \tag{29}$$

5. Непрерывную и неубывающую на $[0,\infty)$ функцию $\Psi = \Psi(t)$ называют мажорантой, если $\Psi(0) = 0$ (см., например, [17, с. 24]). Через $W^r(\Phi_2, \Psi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, обозначим класс функций $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию $\Phi_2(f^{(r)}, t) \leqslant \Psi(t)$ для любых $t > 0$. При этом полагаем $W(\Phi_2, \Psi) := W^0(\Phi_2, \Psi)$.

Обозначим через $\mathcal{A}_\sigma(W^r(\Phi_2, \Psi)) := \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f) \colon f \in W^r(\Phi_2, \Psi)\}$ величину наилучшего приближения класса $W^r(\Phi_2, \Psi)$ элементами подпространства $B_{\sigma,2}$ в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 3. *Пусть для любого $\sigma > \nu\pi$, где $0 < \nu < \infty$ — произвольное число, мажоранта Ψ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi(t)}{\Psi(t/(2\sigma))} \geqslant \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin \sigma t}{\sigma t}, & \text{если} \quad 0 < t \leqslant \pi/\sigma, \\[2ex] 2 - \dfrac{\pi}{\sigma t}, & \text{если} \quad t \geqslant \pi/\sigma. \end{cases} \tag{30}$$

Тогда для произвольного $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\overline{\mathrm{diam}}_\nu(W^r(\Phi_2, \Psi); L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\Phi_2, \Psi)) = \frac{\pi^{1-r}}{2(\pi - 2)\nu^r} \Psi\left(\frac{1}{2\nu}\right), \tag{31}$$

где $\overline{\mathrm{diam}}_\nu$ — любой из средних ν-поперечников: колмогоровский $\overline{d}_\nu$, линейный $\overline{\delta}_\nu$, бернштейновский $\overline{b}_\nu$. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi})$, где линейный оператор $\Lambda_{\nu\pi}$ определяется из условия $\mathcal{F}(\Lambda_{\nu\pi}(f), \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)\mathcal{F}(f, \cdot)$ (здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, а $\chi_{\nu\pi}$ — характеристическая функция множества $(-\nu\pi, \nu\pi)$), является экстремальной для среднего линейного ν-поперечника $\overline{\delta}_\nu(W^r(\Phi_2, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$, а подпространство $B_{\nu\pi,2}$ — экстремальным для среднего ν-поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W^r(\Phi_2, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию (30), *не пусто.*

Доказательство. Использовав формулу (28), вычислим среднюю размерность подпространства целых функций $B_{\nu\pi,2}$, а именно, $\overline{\dim}(B_{\nu\pi,2}; L_2(\mathbb{R})) = \nu$. Полагая в связи с этим в формуле (2) $\sigma := \nu\pi$, $t := \pi/(2\sigma) = 1/(2\nu)$, используя соотношение (29) и определения среднего линейного ν-поперечника и класса $W^r(\Phi_2, \Psi)$, получаем оценки сверху

$$\overline{\mathrm{diam}}_\nu(W^r(\Phi_2, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(W^r(\Phi_2, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \sup\big\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\| \colon$$

$$f \in W^r(\Phi_2, \Psi)\big\} = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\Phi_2, \Psi)) \leqslant \frac{\pi^{1-r}}{2(\pi - 2)\nu^r} \Psi\left(\frac{1}{2\nu}\right), \tag{32}$$

где

$$\Lambda_{\nu\pi}(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\nu\pi}^{\nu\pi} e^{ix\tau} \mathcal{F}(f, \tau) d\tau.$$

Перейдем к оценке снизу рассматриваемых средних ν-поперечников. Из пункта 4 следует, что подпространство целых функций $B_{\widehat{\sigma},2}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1 + \varepsilon)$, ε — произвольное бесконечно малое положительное число, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подпространствам, участвующим в определении среднего ν-поперечника по Бернштейну. При этом, согласно формуле (28), имеем $\overline{\dim}(B_{\widehat{\sigma},2}; L_2(\mathbb{R})) = \nu(1+\varepsilon)$, а в соответствии с [15] получаем

$$\overline{d}_\nu(B_{\widehat{\sigma},2} \cap BL_2(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = 1.$$

Рассмотрим далее множество $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$, являющееся результатом пересечения шара $\rho BL_2(\mathbb{R})$ радиуса

$$\rho := \frac{\pi}{2(\pi-2)(\widehat{\sigma})^r}\Psi\left(\frac{\pi}{2\widehat{\sigma}}\right) \tag{33}$$

с подпространством целых функций $B_{\widehat{\sigma},2}$, т. е.

$$\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho) := B_{\widehat{\sigma},2} \cap \rho BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in B_{\widehat{\sigma},2} \colon \|g\| \leqslant \rho\}.$$

Произвольный элемент $g \in B_{\widehat{\sigma},2}$ в силу теоремы Винера – Пели, как целую функцию, имеющую конечную степень $\widehat{\sigma}$, можно представить в виде

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \varphi(\tau)e^{ix\tau}d\tau, \tag{34}$$

где φ — некоторая функция с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля на отрезке $[-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$ (см., например, [3, с. 212]). Используя формулу (34), записываем

$$\Delta_h^2(g,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} (e^{i\tau h}-1)^2\varphi(\tau)e^{ix\tau}d\tau. \tag{35}$$

Поскольку

$$\|g\|^2 = \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |\varphi(\tau)|^2 d\tau, \tag{36}$$

из равенства (35) получаем

$$\|\Delta_h^2(g)\|^2 = 2^2\int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} (1-\cos\tau h)^2|\varphi(\tau)|^2 d\tau. \tag{37}$$

Полагаем $(1-\cos\sigma h)_* := \{1-\cos\sigma h,$ если $0 \leqslant h \leqslant \pi/\sigma;\ 2,$ если $\pi/\sigma \leqslant h\}$. Поскольку из чисто геометрических соображений следует, что для любого $\tau \in [-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$ выполняется неравенство

$$1-\cos\tau h \leqslant (1-\cos\widehat{\sigma}h)_*,$$

в силу равенств (36), (37) имеем

$$\|\Delta_h^2(g)\| \leqslant 2(1-\cos\widehat{\sigma}h)_*\|g\|. \tag{38}$$

Используя неравенство С. Н. Бернштейна для целых функций $g \in B_{\widehat{\sigma},2}$, получаем (см., например, [3])

$$\|g^{(r)}\| \leqslant (\widehat{\sigma})^r\|g\|. \tag{39}$$

Тогда из неравенств (38), (39) имеем

$$\|\Delta_h^2(g^{(r)})\| \leqslant 2(\widehat{\sigma})^r(1-\cos\widehat{\sigma}h)_*\|g\|. \tag{40}$$

Следовательно,

$$\Phi_2(g^{(r)},t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t\|\Delta_h^2(g^{(r)})\|dh\leqslant 2(\widehat{\sigma})^r\|g\|\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-\cos\widehat{\sigma}h)_*dh. \tag{41}$$

Покажем, что множество $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$ принадлежит классу $W^r(\Phi_2,\Psi)$. При этом рассмотрим два случая: $0<t\leqslant\pi/\widehat{\sigma}$ и $\pi/\widehat{\sigma}\leqslant t<\infty$. Пусть вначале $0<t\leqslant\pi/\widehat{\sigma}$. Тогда в силу определения класса $W^r(\Phi_2,\Psi)$, неравенства (41) и первого неравенства из условия (30) для произвольного элемента $g\in\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$ с учетом (33) имеем

$$\Phi_2(g^{(r)},t)\leqslant\frac{\pi}{\pi-2}\left(1-\frac{\sin\widehat{\sigma}t}{\widehat{\sigma}t}\right)\Psi\left(\frac{\pi}{2\widehat{\sigma}}\right)\leqslant\Psi(t). \tag{42}$$

Пусть теперь $\pi/\widehat{\sigma}\leqslant t<\infty$. Используя второе неравенство из условия (30) и аналогичные соображения, записываем

$$\Phi_2(g^{(r)},t)\leqslant 2(\widehat{\sigma})^r\|g\|\left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^{\pi/\widehat{\sigma}}(1-\cos\widehat{\sigma}h)dh+2\left(1-\frac{\pi}{\widehat{\sigma}t}\right)\right\}=$$

$$=2(\widehat{\sigma})^r\left(2-\frac{\pi}{\widehat{\sigma}t}\right)\|g\|\leqslant\frac{\pi}{\pi-2}\left(2-\frac{\pi}{\widehat{\sigma}t}\right)\Psi\left(\frac{\pi}{2\widehat{\sigma}}\right)\leqslant\Psi(t). \tag{43}$$

Из формул (42), (43) получаем $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)\subset W^r(\Phi_2,\Psi)$. Отсюда, используя определение среднего ν-поперечника по Бернштейну, находим

$$\overline{b}_\nu(W^r(\Phi_2,\Psi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\overline{b}_\nu(\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\rho. \tag{44}$$

Из формул (29) и (44) с учетом обозначения (33) получаем неравенство

$$\mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\Phi_2,\Psi))\geqslant\overline{\mathrm{diam}}_\nu(W^r(\Phi_2,\Psi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\frac{\pi^{1-r}}{2(\pi-2)\nu^r}G(\Psi;\nu,\varepsilon), \tag{45}$$

где $\overline{\mathrm{diam}}_\nu$ — любой из средних ν-поперечников, рассмотренных в пункте 4,

$$G(\Psi;\nu,\varepsilon):=\frac{1}{(1+\varepsilon)^r}\Psi\left(\frac{1}{2\nu(1+\varepsilon)}\right). \tag{46}$$

Из соотношений (44), (45) следует, что величина $G(\Psi;\nu,\varepsilon)$ при стремлении ε к нулю справа будет монотонно возрастать, оставаясь ограниченной сверху. Проводя далее рассуждения, аналогичные имевшим место при завершении доказательства теоремы 1, получаем $\sup\{G(\Psi;\nu,\varepsilon):0<\varepsilon<\sigma_*\}=\Psi(1/(2\nu))$. Тогда с учетом (45) имеем

$$\overline{\mathrm{diam}}_\nu(W^r(\Phi_2,\Psi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\frac{\pi^{1-r}}{2(\pi-2)\nu^r}\Psi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{47}$$

Сопоставляя оценки сверху (32) и снизу (47), получаем требуемые равенства (31). В заключение отметим, что условию (30) удовлетворяет, например, мажоранта $\Psi_*(t):=t^\alpha$, где $\alpha:=2/(\pi-2)$ (см., например, [14]).

Теорема 3 доказана.

6. Определенный интерес представляет также изучение поведения величин наилучших приближений $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})$ промежуточных производных $f^{(r-\mu)}$, где $r=2,3,\ldots,\ \mu=1,\ldots,r-1$, на классе $W^r(\Phi_2,\Psi)$.

Теорема 4. *Пусть* $r = 2, 3, \ldots,\ \mu = 1, \ldots, r-1,\quad 0 < \nu < \infty$ — *произвольное число и мажоранта* Ψ *удовлетворяет условию* (30). *Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f \in W^r(\Phi_2, \Psi)\right\} = \frac{\pi^{1-\mu}}{2(\pi-2)\nu^{\mu}}\Psi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{48}$$

Доказательство. Из соотношения (20), в котором полагаем $t := \pi/(2\sigma)$ и $\sigma := \nu\pi$, в силу определения класса $W^r(\Phi_2, \Psi)$ получаем оценку сверху

$$\sup\left\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f \in W^r(\Phi_2, \Psi)\right\} \leqslant \frac{\pi^{1-\mu}}{2(\pi-2)\nu^{\mu}}\Psi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{49}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, представленной в левой части неравенства (49), рассмотрим целую функцию $q_{\widetilde{\varepsilon}}$ экспоненциального типа $\sigma + \widetilde{\varepsilon}$, заданную формулой (11), где $\widetilde{\varepsilon}$ — произвольное бесконечно малое положительное число. Полагая $\varepsilon := := \widetilde{\varepsilon}/(\nu\pi)$, записываем

$$\sigma + \widetilde{\varepsilon} = \nu\pi(1+\varepsilon) = \widehat{\sigma}. \tag{50}$$

Поскольку на основании равенства (12)

$$\|q_{\widetilde{\varepsilon}}\|^2 = 2\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\widetilde{\varepsilon}} |\mathcal{F}(q_{\widetilde{\varepsilon}}, \tau)|^2 d\tau = 2\widetilde{\varepsilon}, \tag{51}$$

то, как следует из формул (33), (50) и (51), целая функция

$$q^*_{\widetilde{\varepsilon}}(x) := \frac{\rho}{\sqrt{2\widetilde{\varepsilon}}} q_{\widetilde{\varepsilon}}(x) \tag{52}$$

является элементом множества $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$, которое согласно рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы 3, принадлежит классу $W^r(\Phi_2, \Psi)$. Используя соотношение (25), в котором полагаем $\sigma = \nu\pi$, и применяя формулы (52) и (33), получаем

$$\mathcal{A}_{\nu\pi}((q^*_{\widetilde{\varepsilon}})^{(r-\mu)}) \geqslant \rho(\nu\pi)^{r-\mu} = \frac{\pi^{1+r-\mu}\nu^{r-\mu}}{2(\pi-2)(\widehat{\sigma})^r}\Psi\left(\frac{\pi}{2\widehat{\sigma}}\right). \tag{53}$$

Учитывая принадлежность функции $q^*_{\widetilde{\varepsilon}}$ классу $W^r(\Phi_2, \Psi)$, а также используя соотношение (50), из (53) находим

$$\sup\left\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f \in W^r(\Phi_2, \Psi)\right\} \geqslant \frac{\pi^{1-\mu}}{2(\pi-2)\nu^{\mu}} G(\Psi; \nu, \varepsilon), \tag{54}$$

где выражение $G(\Psi; \nu, \varepsilon)$ определяется формулой (46). Проводя рассуждения, связанные с вычислением верхней грани от правой части неравенства (54) по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$, которые аналогичны по смыслу имевшим место при завершении доказательства теоремы 3, получаем

$$\sup\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)})\colon f \in W^r(\Phi_2, \Psi)\} \geqslant \frac{\pi^{1-\mu}}{2(\pi-2)\nu^{\mu}}\Psi\left(\frac{1}{2\nu}\right). \tag{55}$$

Требуемое равенство (48) следует из сопоставления оценок сверху (49) и снизу (55), что и завершает доказательство теоремы 4.

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени (1912) // Собр. соч. – М.: АН СССР, 1952. – Т. 2. – С. 371 – 375.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 324 с.

3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Тиман М. Ф.* Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 2. – С. 89 – 101.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
6. *Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г.* Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. – 1970. – **194**, № 5. – С. 1013 – 1016.
7. *Попов В. Ю.* О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 6. – С. 65 – 73.
8. *Дзядик В. К.* Про точні верхні грані найкращих наближень на деяких класах неперервних функцій, визначених на дійсній осі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1975. – № 7. – С. 589 – 592.
9. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.
10. *Vakarchuk S. B.* Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximatiuon on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approxim. – 2004. – **10**, № 1-2. – С. 27 – 39.
11. *Лигун А. А., Доронин В. Г.* Точные константы в неравенствах типа Джексона для L_2-аппроксимации на прямой // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 92 – 98.
12. *Вакарчук С. Б., Доронин В. Г.* Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 8. – С. 1032 – 1043.
13. *Пустовойтов Н. Н.* Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 10. – С. 95 – 108.
14. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О неравенствах типа Джексона и поперечниках классов периодических функций в пространстве L_2 // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 37 – 48.
15. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 1. – С. 35 – 38.
16. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 11. – С. 1635 – 1656.
17. *Шевчук А. И.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев : Наук. думка, 1992. – 225 с.

Получено 28.11.11