УДК 517.5

А. А. Кореновский (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Ин-т математики, экономики и механики)

ОБРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО И СТЕПЕННЫХ СРЕДНИХ

We establish exact bounds for the positive and negative exponents of summability of the power mean of a function in the case where this mean satisfies the reverse Jensen inequality.

Встановлено точні межі для додатного та від'ємного показників сумовності середнього степеневого порядку функції, якщо це середнє задовольняє обернену нерівність Йєнсена.

Введение. Для неотрицательной на отрезке $[0,b] \subset \mathbb{R}$ функции φ степенным средним порядка $\alpha \neq 0$ будем называть функцию

$$\mathcal{M}_\alpha \varphi(t) = \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)\, du \right)^{1/\alpha}, \quad 0 < t \leq b,$$

а средним геометрическим — функцию

$$\mathcal{M}_0 \varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \ln \varphi(t)\, dt \right), \quad 0 < t \leq b.$$

Определенные таким образом средние $\mathcal{M}_\alpha$ возрастают вместе с α (см. [1, с. 175, 184]. Для $\alpha < \beta$ через $RH^{\alpha,\beta}(B)$ обозначаем класс всех неотрицательных на $[0,b]$ функций φ, удовлетворяющих обратному неравенству

$$0 < \mathcal{M}_\beta \varphi(t) \leq B \mathcal{M}_\alpha \varphi(t) < +\infty, \quad 0 < t \leq b, \tag{1}$$

где постоянная $B > 1$ не зависит от t. Положим $RH^{\alpha,\beta} = \cup_{B>1} RH^{\alpha,\beta}(B)$. При различных значениях параметров α и β классы $RH^{\alpha,\beta}$ применяются при исследовании весовых неравенств Харди [2], в теории весовых пространств [3], при изучении квазиконформных отображений [4] и др. Особенность этих классов заключается в так называемом свойстве самоулучшения показателей суммируемости. Это свойство было также самостоятельным предметом исследования в работах многих авторов. Данная работа является продолжением таких исследований. Точнее, рассматриваются классы $RH^{\alpha,\beta}$, когда один из параметров α или β обращается в нуль.

1. Основные результаты. Для фиксированного α определим функцию

$$\sigma_\alpha(\gamma) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} & \text{при} \quad \alpha \neq 0, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{\gamma}\right) & \text{при} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

переменной $\gamma \in (-\infty, \min(0,\alpha)) \cup (\max(0,\alpha), +\infty)$. Она непрерывна, возрастает от $1+0$ до $+\infty$ на $(-\infty, \min(0,\alpha))$, на $(\max(0,\alpha), +\infty)$ возрастает от $0+$ до $1-0$ и $\sigma_\alpha(\gamma)\sigma_\alpha(\alpha-\gamma) = 1$.

***Замечание* 1.** Смысл $\sigma_\alpha(\gamma)$ состоит в том, что для функции $\varphi_0(t) = t^{-1/\gamma}$ ($\gamma \neq 0$) при любом $t > 0$ справедливо равенство $\mathcal{M}_\alpha \varphi_0(t) = \varphi_0(t)/\sigma_\alpha(\gamma)$, где $\alpha < \gamma$ при $\gamma > 0$ и $\alpha > \gamma$ при $\gamma < 0$.

Для $\alpha < \beta$ положим

$$S_{\alpha,\beta}(\gamma) = \frac{\sigma_\alpha(\gamma)}{\sigma_\beta(\gamma)}, \quad \gamma \in (-\infty, \min(0,\alpha)) \cup (\max(0,\beta), +\infty).$$

Функция $S_{\alpha,\beta}(\gamma)$ непрерывна, возрастает от $1+0$ до $+\infty$ на $(-\infty, \min(0,\alpha))$ и убывает от $+\infty$ до $1+0$ на $(\max(0,\beta), +\infty)$. Поэтому при любом $B > 1$ уравнение

$$S_{\alpha,\beta}(\gamma) = B \tag{2}$$

имеет два корня: отрицательный $\gamma_- < \min(0,\alpha)$ и положительный $\gamma_+ > \max(0,\beta)$. В терминах этих чисел $\gamma_\pm$ и будут выражаться предельные значения для параметров в дальнейших утверждениях.

В работах [5, 6] было показано, что при $\alpha \cdot \beta \neq 0$ из условия (1) следует, что $\mathcal{M}_\beta\varphi \in RH^{\alpha,\gamma}$, $\mathcal{M}_\alpha\varphi \in RH^{\beta,\gamma}$ при любом $0 \neq \gamma < \gamma_+$ и $\mathcal{M}_\beta\varphi \in RH^{\gamma,\alpha}$, $\mathcal{M}_\alpha\varphi \in RH^{\gamma,\beta}$ при любом $0 \neq \gamma > \gamma_-$. В данной работе доказываются подобные утверждения при $\alpha \cdot \beta = 0$. В этом случае при $0 = \alpha < \beta$ условие (1) принимает вид

$$\left(\frac{1}{t}\int_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right)^{1/\beta} \le B\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln\varphi(u)\,du\right), \quad 0 < t \le b, \tag{3}$$

а уравнение (2) —

$$\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\right) = B\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/\beta}. \tag{4}$$

Если же $\alpha < 0 = \beta$, то условие (1) принимает вид

$$\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln\varphi(u)\,du\right) \le B\left(\frac{1}{t}\int_0^t \varphi^\alpha(u)\,du\right)^{1/\alpha}, \quad 0 < t \le b, \tag{5}$$

а уравнение (2) —

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} = B\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\right). \tag{6}$$

Полученные результаты сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha = 0 < \beta$, $B > 1$, *числа* $\gamma_\pm$ — *корни уравнения* (4) *и неотрицательная на* $[0,b]$ *функция* φ *удовлетворяет условию* (3). *Если* $0 < \gamma < \gamma_+$, *то*

$$\mathcal{M}_\beta\varphi \in RH^{0,\gamma}\left(\frac{\sigma_0(\gamma_-)}{\sigma_\gamma(\gamma_+)}\right). \tag{7}$$

Если же $0 > \gamma > \gamma_-$, *то*

$$\mathcal{M}_\beta\varphi \in RH^{\gamma,0}\left(\frac{\sigma_\gamma(\gamma_-)}{\sigma_0(\gamma_+)}\right). \tag{8}$$

При этом условия $\gamma < \gamma_+$ *и* $\gamma > \gamma_-$ *на параметр* γ *не могут быть улучшены.*

Теорема 2. *Пусть* $\alpha < 0 = \beta$, $B > 1$, *числа* $\gamma_\pm$ — *корни уравнения* (6) *и неотрицательная на* $[0, b]$ *функция* φ *удовлетворяет условию* (5). *Если* $0 < \gamma < \gamma_+$, *то*

$$\mathcal{M}_\alpha \varphi \in RH^{0,\gamma}\left(\frac{\sigma_0\left(\gamma_-\right)}{\sigma_\gamma\left(\gamma_+\right)}\right).$$

Если же $0 > \gamma > \gamma_-$, *то*

$$\mathcal{M}_\alpha \varphi \in RH^{\gamma,0}\left(\frac{\sigma_\gamma\left(\gamma_-\right)}{\sigma_0\left(\gamma_+\right)}\right).$$

При этом условия $\gamma < \gamma_+$ *и* $\gamma > \gamma_-$ *на параметр* γ *не могут быть улучшены.*

2. Доказательства теорем 1 и 2. Сначала приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть функции* $f, g \geq 0$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(u)g(u)\,du \geq \exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln f(u)\,du\right)\exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln g(u)\,du\right). \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку функция натурального логарифма выпукла вверх, в силу неравенства Йенсена [1, с. 184] имеем

$$\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(u)g(u)\,du\right) \geq \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(f(u)g(u)\right)\,du = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln f(u)\,du + \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln g(u)\,du.$$

Отсюда, очевидно, следует (9).

Лемма доказана.

Следующие две леммы играют ключевую роль в доказательстве теорем 1 и 2. Возможно, они представляют и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть* $\beta > 0$, $B > 1$, *числа* $\gamma_\pm$ — *корни уравнения* (4) *и неотрицательная на* $[0, b]$ *функция* φ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда выполняется неравенство*

$$\exp\left(-\frac{1}{\gamma_+}\right) \leq \frac{\mathcal{M}_\beta\varphi(t)}{\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t)} \leq \exp\left(-\frac{1}{\gamma_-}\right), \quad 0 < t \leq b, \tag{10}$$

причем постоянные $\exp\left(-1/\gamma_\pm\right)$ *являются точными.*

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\int\limits_0^t \frac{d}{du}\left(u\ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\beta(v)dv\right)\right)du = t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)du\right), \quad 0 < t \leq b. \tag{11}$$

Ясно, что (11) следует из равенства

$$\lim_{t\to 0+} t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right) = 0. \tag{12}$$

Для доказательства (12) воспользуемся монотонностью средних $\mathcal{M}_\beta\varphi$ и условием $\varphi \in RH^{0,\beta}(B)$. Тогда получим

$$\exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\varphi(u)\,du\right) \le \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right)^{1/\beta} \le B\exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\varphi(u)\,du\right).$$

Отсюда следует, что

$$\beta\int\limits_0^t \ln\varphi(u)\,du \le t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right) \le \beta\left(t\ln B + \int\limits_0^t \ln\varphi(u)\,du\right).$$

Поскольку $\int_0^b \ln\varphi(u)\,du$ сходится, левая и правая части последнего неравенства стремятся к нулю при $t\to 0+$, что и доказывает (12).

Для доказательства (10) проинтегрируем от 0 до t тождество

$$\frac{d}{dt}\left(t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)du\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)du\right) + \frac{\varphi^\beta(t)}{\frac{1}{t}\int_0^t \varphi^\beta(u)du} - 1.$$

Тогда с учетом (11) имеем

$$\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\beta(v)\,dv\right)\,du + \frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\varphi^\beta(u)}{\frac{1}{u}\int_0^u \varphi^\beta(v)\,dv}\,du - 1.$$

Ко второму слагаемому справа применим неравенство (9):

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\varphi^\beta(u)}{\frac{1}{u}\int_0^u \varphi^\beta(v)\,dv}\,du \ge \exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\varphi^\beta(u)du\right)\exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\frac{1}{\frac{1}{u}\int_0^u \varphi^\beta(v)\,dv}du\right) =$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln\varphi^\beta(u)\,du\right)}{\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int_0^u \varphi^\beta(v)\,dv\right)du\right)}.$$

Оценивая числитель в правой части этого неравенства с помощью условия (3), получаем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\varphi^\beta(u)}{\frac{1}{u}\int_0^u \varphi^\beta(v)\,dv}\,du \ge B^{-\beta}\frac{\frac{1}{t}\int_0^t \varphi^\beta(u)du}{\exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\beta(v)\,dv\right)\,du\right)} =$$

$$= B^{-\beta}\exp\left(\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right) - \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\beta(v)\,dv\right)\,du\right).$$

В результате имеем

$$\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right) \geq \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\beta(v)\,dv\right)\,du+$$

$$+B^{-\beta}\exp\left(\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\beta(u)\,du\right) - \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\beta(v)dv\right)du\right) - 1.$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{\beta}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int_0^u \varphi^\beta(v)dv\right)du - \ln\left(\frac{1}{t}\int_0^t \varphi^\beta(u)du\right)}.$$

Тогда последнее неравенство примет вид

$$-\frac{\beta}{\gamma} \geq B^{-\beta}\exp\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) - 1,$$

или, что то же самое,

$$\sigma_0(\gamma) \leq B\sigma_\beta(\gamma).$$

Если $\gamma_\pm$ — корни уравнения (4), то последнее неравенство выполняется для $\gamma\,(-\infty, \gamma_-] \cup$ $\cup\,[\gamma_+, +\infty)$. Учитывая свойства функции $\sigma_0(\gamma)$, имеем

$$\sigma_0\left(\gamma_+\right) \leq \sigma_0\left(\gamma\right) \leq \sigma_0\left(\gamma_-\right).$$

Но поскольку $\sigma_0(\gamma) = \exp(-1/\gamma) = \mathcal{M}_\beta\varphi(t)/\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t)$, то тем самым доказано (10).

Осталось убедиться в точности постоянных $\exp\left(-1/\gamma_\pm\right)$ в (10). Учитывая замечание 1, легко проверить, что функции $\varphi_\pm(t) = t^{-1/\gamma_\pm}$ принадлежат классу $RH^{0,\beta}(B)$. При этом для φ_+ левое, а для φ_- правое неравенство в (10) обращаются в равенства.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha < 0$, $B > 1$, *числа* $\gamma_\pm$ *— корни уравнения* (6) *и неотрицательная на* $[0, b]$ *функция* φ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда выполняется неравенство*

$$\exp\left(-\frac{1}{\gamma_+}\right) \leq \frac{\mathcal{M}_\alpha\varphi(t)}{\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\alpha\varphi\right)(t)} \leq \exp\left(-\frac{1}{\gamma_-}\right), \quad 0 < t \leq b, \tag{13}$$

причем постоянные $\exp\left(-1/\gamma_\pm\right)$ *являются точными.*

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\int\limits_0^t \frac{d}{du}\left(u\ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\alpha(v)dv\right)\right)du = t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)du\right), \quad 0 < t \leq b. \tag{14}$$

Ясно, что (14) следует из равенства

$$\lim_{t\to 0+} t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)\,du\right) = 0. \tag{15}$$

Для доказательства (15) воспользуемся монотонностью средних $\mathcal{M}_\alpha\varphi$ и условием $\varphi \in RH^{\alpha,0}(B)$. Тогда получим

$$\frac{1}{B}\exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\varphi(u)\,du\right) \le \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)du\right)^{1/\alpha} \le \exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\varphi(u)du\right).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha\left(\int\limits_0^t \ln\varphi(u)\,du - t\ln B\right) \ge t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)\,du\right) \ge \alpha\int\limits_0^t \ln\varphi(u)\,du.$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^b \ln\varphi(u)\,du$ сходится, левая и правая части последнего неравенства стремятся к нулю при $t\to 0+$, что и доказывает (15).

Для доказательства (13) проинтегрируем от 0 до t тождество

$$\frac{d}{dt}\left(t\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)du\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)du\right) + \frac{\varphi^\alpha(t)}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \varphi^\alpha(u)du} - 1.$$

Тогда с учетом (14) имеем

$$\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)\,du\right) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\alpha(v)\,dv\right)\,du + \frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\varphi^\alpha(u)}{\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u \varphi^\alpha(v)dv}du - 1.$$

Ко второму слагаемому справа применим неравенство (9):

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\varphi^\alpha(u)}{\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u \varphi^\alpha(v)\,dv}du \ge \exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\varphi^\alpha(u)du\right)\exp\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\frac{1}{\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u \varphi^\alpha(v)dv}du\right) =$$

$$= \frac{\exp\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \ln\varphi^\alpha(u)du\right)}{\exp\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \ln\left(\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u \varphi^\alpha(v)dv\right)du\right)}.$$

Оценивая числитель в правой части этого неравенства с помощью условия (5), получаем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\varphi^\alpha(u)}{\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u \varphi^\alpha(v)dv}du \ge B^\alpha\frac{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \varphi^\alpha(u)du}{\exp\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \ln\left(\dfrac{1}{u}\displaystyle\int_0^u \varphi^\alpha(v)\,dv\right)du\right)} =$$

$$= B^\alpha\exp\left(\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)du\right) - \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\alpha(v)dv\right)du\right).$$

В результате имеем

$$\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi^\alpha(u)du\right) \ge \frac{1}{t}\int\limits_0^t \ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u \varphi^\alpha(v)dv\right)du +$$

$$+B^{\alpha}\exp\left(\ln\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\varphi^{\alpha}(u)du\right)-\frac{1}{t}\int\limits_0^t\ln\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u\varphi^{\alpha}(v)dv\right)du\right)-1.$$

Обозначим

$$\gamma=\frac{\alpha}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t\ln\left(\frac{1}{u}\int_0^u\varphi^{\alpha}(v)dv\right)du-\ln\left(\frac{1}{t}\int_0^t\varphi^{\alpha}(u)du\right)}.$$

Тогда последнее неравенство примет вид

$$-\frac{\alpha}{\gamma}\geq B^{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)-1,$$

или, что то же самое,

$$\sigma_{\alpha}(\gamma)\leq B\sigma_0(\gamma).$$

Если $\gamma_{\pm}$ — корни уравнения (6), то последнее неравенство выполняется для $\gamma\,(-\infty,\gamma_-]\cup$ $\cup\,[\gamma_+,+\infty)$. Учитывая свойства функции $\sigma_0(\gamma)$, имеем

$$\sigma_0\left(\gamma_+\right)\leq\sigma_0\left(\gamma\right)\leq\sigma_0\left(\gamma_-\right).$$

Но поскольку $\sigma_0(\gamma)=\exp(-1/\gamma)=\mathcal{M}_{\alpha}\varphi(t)/\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\alpha}\varphi\right)(t)$, то тем самым доказано (13).

Остается убедиться в точности постоянных $\exp\left(-1/\gamma_{\pm}\right)$ в (13). Как и при доказательстве леммы 2, учитывая замечание 1, легко проверить, что функции $\varphi_{\pm}(t)=t^{-1/\gamma_{\pm}}$ принадлежат классу $RH^{\alpha,0}(B)$. При этом для φ_+ левое, а для φ_- правое неравенство в (13) обращаются в равенства.

Лемма доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\beta>0$, $B>1$, *числа* $\gamma_{\pm}$ — *корни уравнения* (4) *и неотрицательная на* $[0,b]$ *функция* φ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда функция* $t^{1/\gamma_+}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)$ *не убывает, а функция* $t^{1/\gamma_-}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)$ *не возрастает на* $(0,b]$.

Доказательство. Логарифмируя левое неравенство в (10), имеем

$$\frac{1}{\gamma_+}+\ln\mathcal{M}_{\beta}\varphi(t)-\ln\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)\geq 0.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(t^{1/\gamma_+}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)\right)=$$

$$=t^{1/\gamma_+-1}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)\left(\frac{1}{\gamma_+}+\ln\mathcal{M}_{\beta}\varphi(t)-\ln\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)\right)\geq 0,$$

и тем самым доказано, что функция $t^{1/\gamma_+}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)$ не убывает.

Аналогично, из правого неравенства в (10) следует, что функция $t^{1/\gamma_-}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_{\beta}\varphi\right)(t)$ не возрастает.

Следствие доказано.

Точно так же из леммы 3 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть* $\alpha < 0,\ B > 1$, *числа* $\gamma_\pm$ *— корни уравнения* (6) *и неотрицательная на* $[0,b]$ *функция* φ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда функция* $t^{1/\gamma_+}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\alpha\varphi\right)(t)$ *не убывает, а функция* $t^{1/\gamma_-}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\alpha\varphi\right)(t)$ *не возрастает на* $(0,b]$.

***Доказательство теоремы* 1.** Возведем правое неравенство в (10) в степень $\gamma > 0$ и запишем его в виде

$$\mathcal{M}_\beta^\gamma\varphi(u) \le \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_-}\right)\mathcal{M}_0^\gamma\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(u).$$

Для оценки правой части воспользуемся полученной в следствии 1 монотонностью функции $t^{1/\gamma_+}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t)$ и учтем, что $\exp\left(-\gamma/\gamma_+\right) = \sigma_0^\gamma\left(\gamma_+\right)$. Тогда для $0 < u \le t \le b$ получим

$$\mathcal{M}_\beta^\gamma\varphi(u) \le \sigma_0^\gamma\left(\gamma_-\right)u^{-\gamma/\gamma_+}\left(u^{1/\gamma_+}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(u)\right)^\gamma \le \sigma_0^\gamma\left(\gamma_-\right)u^{-\gamma/\gamma_+}\left(t^{1/\gamma_+}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t)\right)^\gamma.$$

Если $\gamma < \gamma_+$, то, интегрируя по u от 0 до t, приходим к неравенству

$$\mathcal{M}_\gamma^\gamma\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t) \le \frac{\sigma_0^\gamma\left(\gamma_-\right)}{1-\dfrac{\gamma}{\gamma_+}}\mathcal{M}_0^\gamma\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t),$$

что и доказывает (7).

Аналогично, возведем левое неравенство в (10) в степень $\gamma < 0$, воспользуемся монотонностью функции $t^{1/\gamma_-}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t)$ и учтем, что $\exp\left(-\gamma/\gamma_-\right) = \sigma_0^\gamma\left(\gamma_-\right)$. Тогда для $0 < u \le t \le b$ получим

$$\mathcal{M}_\beta^\gamma\varphi(u) \le \sigma_0^\gamma\left(\gamma_+\right)u^{-\gamma/\gamma_-}\left(u^{1/\gamma_-}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(u)\right)^\gamma \le \sigma_0^\gamma\left(\gamma_+\right)u^{-\gamma/\gamma_-}\left(t^{1/\gamma_-}\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t)\right)^\gamma.$$

Если $\gamma > \gamma_-$, то, интегрируя по u от 0 до t, приходим к неравенству

$$\mathcal{M}_\gamma^\gamma\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t) \le \frac{\sigma_0^\gamma\left(\gamma_+\right)}{1-\dfrac{\gamma}{\gamma_-}}\mathcal{M}_0^\gamma\left(\mathcal{M}_\beta\varphi\right)(t),$$

а возведение в степень $\gamma < 0$ приводит к (8).

Осталось убедиться в точности ограничений на параметр γ. Принимая во внимание замечание 1, видим, что для функций $\varphi_\pm(t) = t^{-1/\gamma_\pm}$ выполняется $\mathcal{M}_0\left(\mathcal{M}_\beta\varphi_\pm\right)(t) = t^{-1/\gamma_\pm}/\left(\sigma_0\left(\gamma_\pm\right)\sigma_\beta\left(\gamma_\pm\right)\right)$, $\mathcal{M}_{\gamma_+}\left(\mathcal{M}_\beta\varphi_+\right)(t) = +\infty$, $\mathcal{M}_{\gamma_-}\left(\mathcal{M}_\beta\varphi_-\right)(t) = 0$ и, таким образом, при $\gamma = \gamma_+$ утверждение (7), а при $\gamma = \gamma_-$ утверджение (8) теряют силу.

Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 2** аналогично доказательству теоремы 1. Применение леммы 3 вместо леммы 2 и следствия 2 вместо следствия 1 позволяет повторить доказательство теоремы 1, в котором всюду β следует заменить на α.

1. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
2. *Ariño M. A., Muckenhoupt B.* Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – **320**, № 2. – P. 727 – 735.
3. *Muckenhoupt B.* Weighted inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 533 – 565.
4. *Gehring F. W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. – 1973. – **130**. – P. 265 – 273.
5. *Didenko V. D., Korenovskyi A. A.* Power means and the reverse Hölder inequality // Stud. Math. – 2011. – **207**, № 1. – P. 85 – 95.
6. *Диденко В. Д., Кореновский А. А.* Обратное неравенство Гельдера для степенных средних // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 1. – С. 18 – 31.

Получено 19.12.11