УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСИ С НЕСИММЕТРИЧНО ОГРАНИЧЕННЫМИ СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

For nonperiodic functions $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ defined on the entire real axis, we prove analogs of the Babenko inequality. The obtained inequalities estimate the norms of derivatives $\left\|x^{(k)}_\pm\right\|_{L_q[a,b]}$ on an arbitrary interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$ such that $x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0$ via local L_p-norms of the functions x and uniform nonsymmetric norms of the higher derivatives $x^{(r)}$ of these functions.

Для неперіодичних функцій $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$, що задані на всій дійсній осі, доведено аналоги нерівності В. Ф. Бабенка. Отримані нерівності оцінюють норми похідних $\left\|x^{(k)}_\pm\right\|_{L_q[a,b]}$ на довільному проміжку $[a,b] \subset \mathbf{R}$ такому, що $x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0$, через локальні L_p-норми функцій x і рівномірні несиметричні норми старших похідних $x^{(r)}$ цих функцій.

1. Введение. Пусть $G \subset \mathbf{R}$ — некоторое измеримое множество. Через $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, будем обозначать пространство измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_G |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in G} |x(t)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В качестве G будем рассматривать отрезок $[a,b]$, действительную ось $\mathbf{R}$ или окружность $\mathbf{T}$, реализованную в виде отрезка $[0,2\pi]$ с отождествленными концами. Если $x \in L_p(\mathbf{T})$, $0 < p \le$ $\le \infty$, то положим для краткости $\|x\|_p := \|x\|_{L_p(\mathbf{T})}$ и для $x \in L_\infty(\mathbf{R})$ вместо $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$ также будем писать $\|x\|_\infty$. Для $\alpha, \beta > 0$ и $x \in L_\infty(\mathbf{R})$ положим

$$\|x\|_{\infty,\alpha,\beta} := \|\alpha x_+ + \beta x_-\|_\infty,$$

где $x_\pm(t) := \max\{x_\pm(t), 0\}$.

Через $L^r_\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать пространство функций $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$. Положим

$$W^r_{\infty,\alpha,\beta}(\mathbf{R}) := \left\{x \in L^r_\infty(\mathbf{R})\colon \left\|x^{(r)}\right\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1\right\}.$$

Символом $\varphi^{\alpha,\beta}_r(t)$ обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от 2π-периодической функции $\varphi^{\alpha,\beta}_0(t)$, определенной на $[0,2\pi]$ следующим образом:

$$\varphi^{\alpha,\beta}_0(t) := \begin{cases} \alpha, & \text{если } t \in [0, 2\pi\beta/(\alpha+\beta)], \\ -\beta, & \text{если } t \in [2\pi\beta/(\alpha+\beta), 2\pi]. \end{cases}$$

Заметим, что $\varphi^{1,1}_r$ является идеальным сплайном Эйлера φ_r порядка r.

Известно и имеет ряд интересных приложений неравенство А. А. Лигуна [1] для функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \in [1,\infty)$:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{1.1}$$

В. Ф. Бабенко [2] получил следующее обобщение неравенства (1.1) для функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ с несимметричными ограничениями на старшую производную:

$$\|x_\pm^{(k)}\|_q \le \left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right\|_q \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty}\right)^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_{\infty,\,\alpha^{-1},\,\beta^{-1}}^{k/r}, \tag{1.2}$$

где $E_0(x)_\infty := \inf\left\{\|x-c\|_\infty : c \in \mathbf{R}\right\}$, а $x_\pm^{(k)} := (x^{(k)})_\pm$.

Другое обобщение неравенства (1.1) для непериодических функций на всей оси дали Б. Боянов и Н. Найденов [3]. Для произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ они нашли точные верхние грани норм производных $\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]}$, $k = 1,\ldots,r-1$, на классе функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ таких, что $\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r$, $\|x\|_\infty \le A_0$.

В [4] для произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ решена задача вычисления точных верхних граней норм функций и их производных $\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]}$, $k = 0,1,\ldots,r-1$, на классах функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$, удовлетворяющих более общим ограничениям $\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r$, $L(x)_p \le A_0$, где [5]

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} :\ a,b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\}, \quad p > 0.$$

В настоящей работе получены аналоги неравенства (1.2) для непериодических функций, определенных на всей оси (теоремы 3 и 4). Из них, в частности, следует, что для любой функции $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ и произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям

$$x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0, \qquad \int\limits_a^b x^{(k)}(t)dt = 0, \tag{1.3}$$

выполняется неравенство

$$\|x_\pm^{(k)}\|_{L_q[a,b]} \le m_\pm^{1/q}(x^{(k)}) \left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right\|_q \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty}\right)^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{k/r}, \tag{1.4}$$

где

$$m_\pm(x^{(k)}) := \min\left\{\frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})}, \frac{b-a}{2\pi}\right\},$$

$$\mu_\pm(x^{(k)}) := \mu\{t \in [a,b] \colon x_\pm^{(k)}(t) > 0\}, \tag{1.5}$$

$$\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}) := \mu\{t \in [0,2\pi] \colon (\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})_\pm(t) > 0\}.$$

Если же выполнено только первое из условий (1.3), то величину $m_\pm(x^{(k)})$ в неравенстве (1.4) следует заменить на $\dfrac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})}$.

Кроме того, доказаны неравенства более общие, чем (1.4), в которых величины $E_0(x)_\infty$ заменены на $L(x_\pm)_p$. Все неравенства, полученные в данной работе, являются точными на соответствующих классах.

2. Вспомогательные утверждения. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r^{\alpha,\beta}(\lambda t)$.

Лемма 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$, $\alpha, \beta > 0$. Если для функции $W^r_{\infty,\alpha,\beta}(\mathbf{R})$ число $\lambda > 0$ выбрано так, что*

$$L(x_\pm)_p \le L\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right)_p, \tag{2.1}$$

то

$$\|x_\pm\|_\infty \le \left\|\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right\|_\infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (2.2) не выполняется. Тогда существует $\omega < \lambda$ такое, что

$$\max\left\{\frac{\|x_+\|_\infty}{\left\|\left(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\right)_+\right\|_\infty}, \frac{\|x_-\|_\infty}{\left\|\left(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\right)_-\right\|_\infty}\right\} = 1.$$

Пусть, например,

$$\|x_+\|_\infty = \left\|\left(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\right)_+\right\|_\infty, \qquad \|x_-\|_\infty \le \left\|\left(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\right)_-\right\|_\infty. \tag{2.3}$$

Выберем $t_0 \in \mathbf{R}$, удовлетворяющее условию

$$\left\|\left(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\right)_+\right\|_\infty = \varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t_0), \tag{2.4}$$

и пусть c_1 — наибольший нуль сплайна $\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}$ в промежутке $(-\infty, t_0)$, а c_2 — наименьший нуль сплайна $\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}$ в промежутке $(t_0, \infty,)$. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют точки $t_\varepsilon^1 \in (c_1, t_0)$ и $t_\varepsilon^2 \in (t_0, c_2)$, для которых

$$\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t_\varepsilon^1) = \varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t_\varepsilon^2) = \left\|\left(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\right)_+\right\|_\infty - \varepsilon.$$

Положим $\delta_1 := t_0 - t_\varepsilon^1$ и $\delta_2 := t_\varepsilon^2 - t_0$. Ясно, что $\delta_i \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $i = 1, 2$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ определим функцию $\psi_\varepsilon(t)$ на $[c_1, c_2]$ следующим образом:

$$\psi_\varepsilon(t) := \begin{cases} \varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t - \delta_1), & \text{если } t \in [c_1 + \delta_1, t_0], \\ \varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t + \delta_2), & \text{если } t \in [t_0, c_2 - \delta_2], \\ 0, & \text{если } t \in [c_1, c_1 + \delta_1] \cup [c_2 - \delta_2, c_2]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi_\varepsilon(t_0) = \|\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\|_\infty - \varepsilon$ и $\psi_\varepsilon(t) \to \varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t)$ для $t \in [c_1, c_2]$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $L(x)_p < \infty$, из (2.3) и (2.4) следует существование такого сдвига $x_\varepsilon(t) := x(t + \tau_\varepsilon)$, что $x'_\varepsilon(t_0) = 0$ и

$$|x_\varepsilon(t_0)| \ge \left\|\left(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}\right)_+\right\|_\infty - \varepsilon = \psi_\varepsilon(t_0). \tag{2.5}$$

Кроме того, в силу (2.3) функция x удовлетворяет условиям теоремы сравнения Хермандера [6] (см. также [7, с. 96]). Согласно этой теореме из (2.5) следует, что

$$|x_\varepsilon(t)| \geq \psi_\varepsilon(t), \quad t \in [c_1 + \delta_1,\, c_2 - \delta_2].$$

Поэтому

$$L(x_+)_p = L((x_\varepsilon)_+)_p \geq \|\psi_\varepsilon\|_{L_p[c_1+\delta_1,\, c_2-\delta_2]}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$L((x)_+)_p \geq L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\omega,r}\right)_+\right)_p > L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_+\right)_p,$$

что противоречит (2.1).

Лемма 1 доказана.

Для $f \in L_1[a,b]$ символом $r(f,t)$, $t \in [0, b-a]$, обозначим убывающую перестановку функции f [8] (см. также [9]) и положим $r(f,t) = 0$ для $t > b - a$.

Лемма 2. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \geq 1$, $p > 0$, $\alpha, \beta > 0$. Если для функции $W^r_{\infty,\alpha,\beta}(\mathbf{R})$ число $\lambda > 0$ выбрано так, что*

$$L(x_\pm)_p \leq L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r}\right)_\pm\right)_p, \tag{2.6}$$

то

$$L(x^{(k)}_\pm)_q \leq L\left(\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_\pm\right)_q. \tag{2.7}$$

Кроме того, для любого отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$ такого, что

$$x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0, \qquad |x^{(k)}(t)| > 0, \quad t \in (a,b), \tag{2.8}$$

выполнены неравенства

$$\left\|x^{(k)}_\pm\right\|_{L_q[a,b]} \leq \left(\frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k})}\right)^{1/q} \left\|\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_\pm\right\|_q, \tag{2.9}$$

где $\mu_\pm(x^{(k)}) := \mu\{t \in [a,b] \colon x^{(k)}_\pm(t) > 0\}$, $\mu_\pm(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}) := \mu\Big\{t \in [0, 2\pi/\lambda] \colon (\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k})_\pm(t) > 0\Big\}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу леммы 1 из (2.6) следует неравенство (2.2). Из (2.2) и неравенства Хермандера [6] (см. также [7, с. 101]) вытекает, что для любого $m = 0, 1, 2, \ldots, r-1$

$$\|x^{(m)}_\pm\|_\infty \leq \left\|\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-m}\right)_\pm\right\|_\infty. \tag{2.10}$$

Докажем сначала (2.7) для $q = 1$. Пусть $[a,b]$ — произвольный отрезок такой, что $x^{(k)}_+(t) > 0$, $t \in (a,b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b x^{(k)}_+(t)dt = x^{(k-1)}(b) - x^{(k-1)}(a) \leq \|x^{(k-1)}_+\|_\infty + \|x^{(k-1)}_-\|_\infty.$$

Применяя далее (2.10) (при $m = k-1$), получаем

$$\int\limits_a^b x^{(k)}_+(t)dt \leq \left\|\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k+1}\right)_+\right\|_\infty + \left\|\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k+1}\right)_-\right\|_\infty =$$

$$= \varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k+1}(c_2) - \varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k+1}(c_1) = \int\limits_{c_1}^{c_2} \left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_+ (t)dt,$$

где c_1 — точка минимума $\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k+1}$, а c_2 — ближайшая к ней справа точка максимума $\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k+1}$. Отсюда следует неравенство (2.7) (при $q = 1$) для $x^{(k)}_+$. Справедливость (2.7) (при $q = 1$) для $x^{(k)}_-$ проверяется аналогично.

Докажем теперь (2.7) для любого $q > 1$. Как и в случае $q = 1$, ограничимся доказательством (2.7) для $x^{(k)}_+$. Зафиксируем произвольный отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющий условию (2.8), и пусть $x^{(k)}_+(t) > 0$, $t \in (a, b)$. Для доказательства (2.7) достаточно проверить выполнение неравенства

$$\int\limits_a^b x^{(k)}_+(t)^q dt \le \int\limits_c^{c+2\pi/\lambda} \left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)^q_+ (t)dt, \tag{2.11}$$

где c — точка локального минимума $\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k+1}$. Для краткости через $\bar{x}$ обозначим сужение функции $x^{(k)}_+$ на $[a, b]$, а через $\bar{\varphi}$ — сужение $\left(\varphi^{\alpha,\beta}_{\lambda,r-k}\right)_+$ на $[c, c+2\pi/\lambda]$. В силу теоремы Харди – Литтлвуда – Полиа (см., например, [9] теорема 1.3.11) (2.11) будет следовать из неравенства

$$\int\limits_0^\xi r(\bar{x}, t)dt \le \int\limits_0^\xi r(\bar{\varphi}, t)dt, \quad \xi > 0. \tag{2.12}$$

Для доказательства (2.12) покажем сначала, что разность $\delta(t) := r(\bar{x}, t) - r(\bar{\varphi}, t)$, $t > 0$, меняет знак с $-$ на $+$ не более одного раза. Для этого заметим, что из неравенства (2.10) при $m = k$ вытекает неравенство

$$r(\bar{x}, 0) \le r(\bar{\varphi}, 0). \tag{2.13}$$

Далее, в силу (2.10) (при $m = k$) и равенств $\bar{x}(a) = \bar{x}(b) = 0$, $\bar{\varphi}(c) = \bar{\varphi}(2\pi/\lambda) = 0$ для любого $z \in (0, \|\bar{x}\|_{L_\infty[a,b]})$ существуют точки $t_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, m$, $m \ge 2$, и две точки $y_j \in [c, c + 2\pi/\lambda]$, $j = 1, 2$, такие, что

$$z = |\bar{x}(t_i)| = |\bar{\varphi}(y_j)|,$$

причем $\bar{\varphi}'(y_1) > 0$, $\bar{\varphi}'(y_2) < 0$, а среди точек t_i найдутся точки t^1_i и t^2_i, удовлетворяющие условию

$$\bar{x}'(t^1_i) \ge 0, \qquad \bar{x}'(t^2_i) \le 0.$$

Тогда согласно теореме сравнения Хермандера [6] (см. также [7, с. 96]) выполнены неравенства

$$|\bar{x}'(t^1_i)| \le |\bar{\varphi}'(y_1)|, \qquad |\bar{x}'(t^2_i)| \le |\bar{\varphi}'(y_2)|.$$

Поэтому если точки θ_1 и θ_2 выбраны так, что

$$z = r(\bar{x}, \theta_1) = r(\bar{\varphi}, \theta_2), \tag{2.14}$$

то согласно теореме о производной перестановки (см., например, [9], предложение 1.3.2)

$$|r'(\bar{x},\theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^{m} |\bar{x}'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} |\bar{\varphi}'(y_j)|^{-1}\right]^{-1} = \big|r'(\bar{\varphi},\theta_2)\big|. \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что разность $\delta(t) := r(\bar{x},t) - r(\overline{\varphi},t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с $-$ на $+$). Рассмотрим интеграл

$$I(\xi) := \int_0^{\xi} \delta(t)dt.$$

Ясно, что $I(0) = 0$. Поскольку (2.7) уже доказано для $q = 1$, для достаточно больших ξ

$$I(\xi) = \|\bar{x}\|_{L_1[a,b]} - \|\bar{\varphi}\|_{L_1[0,2\pi/\lambda]} \le L\left(x_+^{(k)}\right)_1 - L\left(\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_+\right)_1 \le 0.$$

Кроме того, производная $I'(t) = \delta(t)$ меняет знак на $[0,\infty)$ не более одного раза (с $-$ на $+$). Следовательно, $I(\xi) \le 0$ для всех $\xi \ge 0$. Таким образом, неравенства (2.12), (2.11) и (2.7) доказаны.

Осталось доказать (2.9). Для этого зафиксируем произвольный отрезок $[a,b] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющий условию (2.8), и пусть для определенности $x^{(k)}(t) > 0$, $t \in (a,b)$. Перепишем доказанное ниже неравенство (2.11) в терминах перестановок. Поскольку перестановка сохраняет L_q-норму, (2.11) эквивалентно неравенству

$$\int_0^{b-a} r^q(\bar{x},t)dt \le \int_0^{\mu(\bar{\varphi})} r^q(\bar{\varphi},t)dt,$$

где $\mu(\bar{\varphi}) := \mu\big\{t \in [0,2\pi/\lambda]\colon \bar{\varphi}(t) > 0\big\}$. Из последнего неравенства следует существование точки $y \in [0,\mu(\bar{\varphi})]$, для которой

$$\int_0^{b-a} r^q(\bar{x},t)dt = \int_y^{\mu(\bar{\varphi})} r^q(\bar{\varphi},t)dt.$$

При этом из (2.13)–(2.15) вытекает неравенство $b-a \ge \mu(\bar{\varphi}) - y$. Кроме того, нетрудно видеть, что функция

$$\frac{1}{\mu(\bar{\varphi}) - y}\int_y^{\mu(\bar{\varphi})} r^q(\bar{\varphi},t)dt$$

убывает на $[0,\mu(\bar{\varphi})]$. Поэтому

$$\frac{1}{b-a}\int_0^{b-a} r^q(\bar{x},t)dt \le \frac{1}{\mu(\bar{\varphi}) - y}\int_y^{\mu(\bar{\varphi})} r^q(\bar{\varphi},t)dt \le \frac{1}{\mu(\bar{\varphi})}\int_0^{\mu(\bar{\varphi})} r^q(\bar{\varphi},t)dt.$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству (2.9) для функции $x_+^{(k)}$.

Лемма 2 доказана.

3. Неравенства для локальных норм. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, \alpha, \beta, \lambda > 0$. Для функции x такой, что $L(x)_p < \infty$, положим

$$M_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(x)_p := \max \left\{ \frac{L(x_+)_p}{L\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_+\right)_p}, \; \frac{L(x_-)_p}{L\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_-\right)_p} \right\}. \tag{3.1}$$

Вместо $M_{1,r}^{\alpha,\beta}(x)_p$ будем писать $M_r^{\alpha,\beta}(x)_p$. Заметим, что из очевидных равенств

$$L\left(\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right)_p = \lambda^{-(r+1/p)} L\left(\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right)_p \tag{3.2}$$

следует

$$M_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(x)_p = \lambda^{r+1/p} M_r^{\alpha,\beta}(x)_p. \tag{3.3}$$

Теорема 1. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \geq 1$, $p > 0$, $\alpha, \beta > 0$. Для любой функции $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ такой, что $L(x)_p < \infty$, выполнено неравенство*

$$L(x_\pm^{(k)})_q \leq L\left(\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right)_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^\gamma \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\gamma}, \tag{3.4}$$

где $\gamma = (r-k+1/q)/(r+1/p)$.

Кроме того, для любого отрезка $[a,b] \subset \mathbf{R}$, для которого

$$x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0, \qquad |x^{(k)}(t)| > 0, \quad t \in (a,b), \tag{3.5}$$

выполняются неравенства

$$\left\| x_\pm^{(k)} \right\|_{L_q[a,b]} \leq \left(\frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})} \right)^{1/q} \left\| \left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm \right\|_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^\delta \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\delta}, \tag{3.6}$$

где $\delta = (r-k)/(r+1/p)$, а $\mu_\pm(x^{(k)})$ и $\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})$ определены в (1.5).

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ такую, что $L(x)_p < < \infty$. В силу однородности неравенств (3.4) и (3.6) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1. \tag{3.7}$$

Тогда x принадлежит $W_{\infty,\alpha,\beta}^r(\mathbf{R})$.

Сначала покажем выполнение неравенства (3.4). В силу (3.7) для этого достаточно доказать, что

$$L(x_\pm^{(k)})_q \leq L\left(\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right)_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^\gamma. \tag{3.8}$$

Выберем $\lambda > 0$, удовлетворяющее условию

$$M_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(x)_p = 1. \tag{3.9}$$

Согласно определению (3.1) из (3.9) следует (2.6). Тогда по лемме 2

$$L(x_\pm^{(k)})_q \leq L\left(\left(\varphi_{\lambda,r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right)_q. \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) получаем

$$L(x_{\pm}^{(k)})_q \le L\left(\left(\varphi_{\lambda,r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right)_q M_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(x)_p^{\gamma}.$$

Учитывая (3.2), (3.3) и определение γ, отсюда выводим оценку

$$L(x_{\pm}^{(k)})_q \le \lambda^{-(r-k)-1/q} L\left(\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right)_q \left[\lambda^{r+1/p} M_r^{\alpha,\beta}(x)_p\right]^{\gamma} = L\left(\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right)_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\gamma}.$$

Тем самым доказаны неравенства (3.8) и (3.4).

Осталось доказать неравенство (3.6). Зафиксируем отрезок $[a,b] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющий условиям (3.5). Пусть, как и ранее, λ выбрано из условия (3.9). В силу (3.3) это условие можно записать в виде

$$M_r^{\alpha,\beta}(x)_p = \lambda^{-(r+1/p)}. \tag{3.11}$$

Кроме того, в силу леммы 2 из (3.9) и (3.1) следует неравенство (2.9). Используя (3.2) и равенство $\mu_{\pm}(\varphi_{\lambda,r-k}^{\alpha,\beta}) = \lambda^{-1}\mu_{\pm}(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})$, записываем (2.9) в виде

$$\left\|x_{\pm}^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \lambda^{-(r-k+1/q)} \left(\frac{\mu_{\pm}(x^{(k)})}{\lambda^{-1}\mu_{\pm}(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})}\right)^{1/q} \left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_q.$$

В силу (3.11) и определения δ отсюда непосредственно следует (3.6), если учесть (3.7).

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1

$$L(x_{\pm}^{(k)})_q \le L\left(\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right)_q \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty}\right)^{\gamma} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\gamma},$$

где $\gamma = (r-k+1/q)/r$.

Доказательство. Для $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ выберем число $c \in \mathbf{R}$ так, чтобы для функции $\bar{x} := x - c$ выполнялось равенство

$$\frac{\|\bar{x}_+\|_\infty}{\|(\varphi_r^{\alpha,\beta})_+\|_\infty} = \frac{\|\bar{x}_-\|_\infty}{\|(\varphi_r^{\alpha,\beta})_-\|_\infty}.$$

Тогда

$$M_r^{\alpha,\beta}(\bar{x})_\infty = \frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty}.$$

Поэтому, применяя (3.4) с $p=\infty$ к функции $\bar{x}$, получаем утверждение следствия 1.

Заметим далее, что если число r нечетное, то функция $\varphi_r^{\alpha,\beta}$ нечетная относительно точек $t_k = \pi\beta/(\alpha+\beta) + 2k\pi$. Следовательно,

$$L\left(\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_+\right)_p = L\left(\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_-\right)_p = L\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_p. \tag{3.12}$$

В этом случае выполнено равенство

$$M_r^{\alpha,\beta}(x)_p = \frac{L(x)_p}{L(\varphi_r^{\alpha,\beta})_p}. \tag{3.13}$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Если в условиях теоремы* 1 *число* r *нечетное, то*

$$L(x_{\pm}^{(k)})_q \le L\left(\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right)_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r^{\alpha,\beta})_p}\right)^{\gamma} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\gamma},$$

где $\gamma = (r-k+1/q)/(r+1/p)$. *Если же число* $r-k$ *является нечетным, то*

$$L(x_{\pm}^{(k)})_q \le L\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\gamma} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\gamma}$$

с тем же показателем γ.

Учитывая, что при $\alpha = \beta$ равенства (3.12) и (3.13) справедливы для любого $r \in \mathbf{N}$, получаем еще одно следствие.

***Следствие* 3.** *В условиях теоремы* 1

$$L(x^{(k)})_q \le L\left(\varphi_{r-k}\right)_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\gamma} \|x^{(r)}\|_{\infty}^{1-\gamma},$$

где $\gamma = (r-k+1/q)/(r+1/p)$.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$, $\alpha, \beta > 0$. *Для любой функции* $x \in L_{\infty}^{r}(\mathbf{R})$ *такой, что* $L(x)_p < \infty$, *имеет место неравенство*

$$\|x_{\pm}\|_{\infty} \le \left\|\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{\infty} M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\gamma} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\gamma}, \tag{3.14}$$

где $\gamma = r/(r+1/p)$. *В частности,*

$$E_0(x)_{\infty} \le E_0\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_{\infty} M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\gamma} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\gamma}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L_{\infty}^{r}(\mathbf{R})$ такую, что $L(x)_p < < \infty$. Вследствие однородности доказываемых неравенств можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1. \tag{3.16}$$

Тогда $x \in W_{\infty,\alpha,\beta}^{r}(\mathbf{R})$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$M_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(x)_p = 1.$$

Теперь для функции x выполнены условия леммы 1, согласно которой

$$\|x_{\pm}\|_{\infty} \le \left\|\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{\infty}.$$

Таким образом,

$$\|x_{\pm}\|_{\infty} \le \left\|\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{\infty} M_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}(x)_p^{\gamma}.$$

Учитывая (3.3), очевидное равенство $\left\|\left(\varphi_{\lambda,r}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{\infty} = \lambda^{-r}\left\|\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{\infty}$ и определение γ, отсюда получаем

$$\|x_{\pm}\|_{\infty} \le \lambda^{-r}\left\|\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{\infty}\left[\lambda^{r+1/p} M_r^{\alpha,\beta}(x)_p\right]^{\gamma} = \left\|\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{\infty} M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\gamma},$$

что в силу (3.16) и завершает доказательство (3.14). Неравенство (3.15) непосредственно следует из (3.14).

Теорема 2 доказана.

Замечание. Неравенство (3.15) является непериодическим аналогом следующего неравенства для функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$ [10]:

$$E_0(x)_\infty \le E_0\left(\varphi_r^{\alpha,\beta}\right)_\infty \left(\frac{E_0(x)_p}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_p}\right)^{r/(r+1/p)} \|x^{(r)}\|^{1/p/(r+1/p)}_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}},$$

где $E_0(x)_p := \inf\{\|x-c\|_p \colon c \in \mathbf{R}\}$.

4. Основные результаты.

Теорема 3. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \ge 1$, $p > 0$, $\alpha, \beta > 0$. *Для любой функции* $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющей условию* $L(x)_p < \infty$, *и произвольного отрезка* $[a,b] \subset \mathbf{R}$ *такого, что*

$$x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0, \tag{4.1}$$

выполняются неравенства

$$\|x^{(k)}_\pm\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})}\right)^{1/q} \left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right\|_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^\delta \|x^{(r)}\|^{1-\delta}_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}, \tag{4.2}$$

где $\delta = (r-k)/(r+1/p)$, *а* $\mu_\pm(x^{(k)})$ *и* $\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})$ *определены в* (1.5).

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ и отрезок $[a,b] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющие условиям теоремы. Рассмотрим совокупности $I_\pm$ всех отрезков $[a_j^\pm, b_j^\pm] \subset$ $\subset [a,b]$ таких, что

$$x^{(k)}(a_j^\pm) = x^{(k)}(b_j^\pm) = 0, \qquad x^{(k)}_\pm(t) > 0, \quad t \in (a_j^\pm, b_j^\pm).$$

Ясно, что

$$\sum_{j\in I_\pm}(b_j^\pm - a_j^\pm) = \mu_\pm(x^{(k)}), \qquad \left\|x^{(k)}_\pm\right\|^q_{L_q[a,b]} = \sum_{j\in I_\pm}\int\limits_{a_j^\pm}^{b_j^\pm}\left|x^{(k)}_\pm(t)\right|^q dt. \tag{4.3}$$

Оценим интегралы $\int_{a_j^\pm}^{b_j^\pm}\left|x^{(k)}_\pm(t)\right|^q dt$ в (4.3) с помощью неравенства (3.6). Полагая для краткости

$$S_\pm := \frac{1}{\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})}\left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right\|_q^q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\delta q}\|x^{(r)}\|^{(1-\delta)q}_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}},$$

из (4.3) выводим оценку

$$\left\|x^{(k)}_\pm\right\|^q_{L_q[a,b]} \le \sum_{j\in I_\pm}(b_j^\pm - a_j^\pm)S_\pm = \mu_\pm(x^{(k)})S_\pm,$$

которая эквивалентна (4.2).

Теорема 3 доказана.

Исходя из тех же соображений, с помощью которых из теоремы 1 были выведены следствия 1 – 3, из теоремы 3 получаем следующие утверждения.

***Следствие* 4.** *В условиях теоремы* 3

$$\left\|x^{(k)}_\pm\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{\mu_\pm(x^{(k)})}{\mu_\pm(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})}\right)^{1/q} \left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_\pm\right\|_q \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty}\right)^{1-(k/r)} \|x^{(r)}\|^{k/r}_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}.$$

***Следствие* 5.** *Если в условиях теоремы* 3 *число* r *нечетное, то*

$$\left\|x_{\pm}^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{\mu_{\pm}(x^{(k)})}{\mu_{\pm}(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})}\right)^{1/q} \left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r^{\alpha,\beta})_p}\right)^{\delta} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\delta},$$

где $\delta = (r-k)/(r+1/p)$. *Если же число* $r-k$ *является нечетным, то*

$$\left\|x_{\pm}^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{\mu_{\pm}(x^{(k)})}{2\pi}\right)^{1/q} \left\|\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right\|_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\delta}\|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\delta}$$

и

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^{1/q} \left\|\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right\|_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\delta}\|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\delta}$$

с тем же показателем δ.

***Следствие* 6.** *В условиях теоремы* 3

$$\left\|x_{\pm}^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{\mu_{\pm}(x^{(k)})}{2\pi}\right)^{1/q} \|\varphi_{r-k}\|_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\delta} \|x^{(r)}\|_{\infty}^{1-\delta}$$

и

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^{1/q} \|\varphi_{r-k}\|_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\delta} \|x^{(r)}\|_{\infty}^{1-\delta},$$

где $\delta = (r-k)/(r+1/p)$.

В случае 2π-периодических функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ и отрезка $[a,b]$ длиной 2π последнее неравенство было доказано в [11]. Для таких функций и отрезка это неравенство (при $p=\infty$) трансформируется в (1.1).

Теорема 4. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \ge 1$, $p > 0$, $\alpha, \beta > 0$. *Если функция* $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ *и отрезок* $[a,b] \subset \mathbf{R}$ *таковы, что*

$$x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0, \qquad \int_a^b x^{(k)}(t)dt = 0, \tag{4.4}$$

а также $L(x)_p < \infty$, *то*

$$\left\|x_{\pm}^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^{1/q} \left\|\left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^{\delta}\|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\delta}, \tag{4.5}$$

где $\delta = (r-k)/(r+1/p)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ и отрезок $[a,b] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющие условиям теоремы. Положим $\omega := \dfrac{2\pi}{b-a}$. Тогда функция $\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t)$ имеет период $2\pi/\omega = b-a$. Повторяя дословно рассуждения, использованные при доказательстве теорем 6.1.2 и 6.2.2 из [7] и заменяя в этих рассуждениях функцию $\varphi_r^{\alpha,\beta}(t)$ функцией $\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta}(t)$, получаем неравенство

$$\left\|x_{\pm}^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left\|\left(\varphi_{\omega,r-k}^{\alpha,\beta}\right)_{\pm}\right\|_{L_q[0,\frac{2\pi}{\omega}]} \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta})_\infty}\right)^{1-(k/r)} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{k/r}. \tag{4.6}$$

При этом условие (4.4) заменяет условие периодичности функции x в упомянутых теоремах, ибо в этих теоремах от свойства периодичности функции x используется лишь второе из условий (4.4), а выполнение первого условия достигается за счет перехода к подходящему сдвигу функции x.

Используя (3.2), очевидное равенство $E_0(\varphi_{\omega,r}^{\alpha,\beta})_\infty = \omega^{-r} E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty$ и определение ω, записываем (4.6) в виде

$$\left\| x_\pm^{(k)} \right\|_{L_q[a,b]} \le \omega^{-(r-k+\frac{1}{q})} \left\| \left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta} \right)_\pm \right\|_q \left(\frac{E_0(x)_\infty}{\omega^{-r} E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty} \right)^{1-(k/r)} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{k/r} =$$

$$= \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^{1/q} \left\| \left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta} \right)_\pm \right\|_q \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty} \right)^{1-(k/r)} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{k/r}.$$

Оценивая далее $E_0(x)_\infty$ с помощью неравенства (3.15), имеем

$$\left\| x_\pm^{(k)} \right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^{1/q} \left\| \left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta} \right)_\pm \right\|_q \left[M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^\gamma \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\gamma} \right]^{1-(k/r)} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{k/r},$$

где $\gamma = r/(r+1/p)$. Отсюда непосредственно следует (4.5).

Теорема 4 доказана.

Замечание. Чтобы сравнить оценки, даваемые теоремами 3 и 4, положим для краткости $\Delta := \mu_+(x^{(k)}) + \mu_-(x^{(k)})$, $\delta := \mu_+(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta}) + \mu_-(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})$, $M = \mu_+(x^{(k)})$, $m = \mu_+(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta})$. Ясно, что $\Delta \le b-a$, $\delta = 2\pi$ и для любых $M \in [0,\Delta]$, $m \in (0,\delta)$ выполняются неравенства

$$\min\left\{ \frac{M}{m}, \frac{\Delta - M}{\delta - m} \right\} \le \frac{\Delta}{\delta}, \qquad \max\left\{ \frac{M}{m}, \frac{\Delta - M}{\delta - m} \right\} \ge \frac{\Delta}{\delta}.$$

Поэтому одна из оценок (4.2) для норм функций $x_+^{(k)}$ и $x_-^{(k)}$ лучше (не хуже), чем соответствующая оценка (4.5). При этом если $\Delta = b-a$, то другая из оценок (4.2) хуже (не лучше), чем соответствующая оценка (4.5).

Аналогично следствиям из теорем 1 и 3 получаем такие утверждения.

***Следствие* 7.** *В условиях теоремы* 4

$$\left\| x_\pm^{(k)} \right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^{1/q} \left\| \left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta} \right)_\pm \right\|_q \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\varphi_r^{\alpha,\beta})_\infty} \right)^{1-(k/r)} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{k/r}.$$

В случае 2π-периодических функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ и отрезка $[a,b]$ длиной 2π данное неравенство трансформируется в (1.2).

***Следствие* 8.** *Если в условиях теоремы* 4 *число* r *нечетное, то*

$$\left\| x_\pm^{(k)} \right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^{1/q} \left\| \left(\varphi_{r-k}^{\alpha,\beta} \right)_\pm \right\|_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r^{\alpha,\beta})_p} \right)^{\delta} \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\delta},$$

где $\delta = (r-k)/(r+1/p)$. *Если же число* $r-k$ *является нечетным, то*

$$\left\| x_\pm^{(k)} \right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{4\pi} \right)^{1/q} \left\| \varphi_{r-k}^{\alpha,\beta} \right\|_q M_r^{\alpha,\beta}(x)_p^\delta \|x^{(r)}\|_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}^{1-\delta}$$

с тем же показателем δ.

***Следствие* 9.** *В условиях теоремы* 4

$$\left\| x_{\pm}^{(k)} \right\|_{L_q[a,b]} \leq \left(\frac{b-a}{4\pi} \right)^{1/q} \|\varphi_{r-k}\|_q \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^{\delta} \|x^{(r)}\|_{\infty}^{1-\delta},$$

где $\delta = (r-k)/(r+1/p)$.

1. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
2. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // Докл. АН. СССР. – 1983. – **269**, № 3. – С. 521 – 524.
3. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. d'Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
4. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 969 – 984.
5. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.
6. *Hörmander L.* A new proof and generalization of inequality of Bohr // Math. scand. – 1954. – **2**. – P. 33 – 45.
7. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
8. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр., лит., 1948. – 456 с.
9. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
10. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
11. *Kofanov V. A.* Some exact inequalities of Kolmogorov type // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 3. – С. 1 – 8.

Получено 06.12.11