УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ И СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ – ЛАПЛАСА НА СФЕРЕ

We investigate the behavior of quantities that characterize the strong summability of Fourier – Laplace series. On this basis, we establish some properties of the Fourier – Laplace series of functions of the class $L_2(S^{m-1})$.

Досліджується поведінка величин, що характеризують сильну сумовність рядів Фур'є – Лапласа, і на їх основі наведено деякі властивості рядів Фур'є – Лапласа функцій класу $L_2(S^{m-1})$.

1. Введение. Пусть $S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m |x_i|^2 = 1 \right\}$, $m \geq 3$, — единичная сфера в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $L_p(S^{m-1})$, $p = 1, 2$, — пространство измеримых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(S^{m-1})} = \left(\int\limits_{S^{m-1}} |f(x)|^p \, dS(x) \right)^{1/p}, \qquad \int\limits_{S^{m-1}} dS(x) = 1,$$

где $dS(x)$ — элемент площади поверхности S^{m-1}, $L(S^{m-1}) \overset{\text{df}}{=} L_1(S^{m-1})$,

$$(f, g) = \int\limits_{S^{m-1}} f(x) g(x) dS(x)$$

— скалярное произведение вещественнозначных функций класса $L_2(S^{m-1})$.

Функцию $x^\alpha \overset{\text{df}}{=} \sum_{\nu=1}^m x_\nu^{\alpha_\nu}$, $\alpha_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu = k$ называют алгебраическим мономом порядка k от m переменных.

Линейная комбинация мономов k-го порядка называется однородным полиномом k-го порядка. Если однородный полином k-го порядка $P_k(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta P_k(x) = 0,$$

то он называется m-мерным гармоническим однородным полиномом k-го порядка.

Множество сужений на S^{m-1} всех гармонических однородных полиномов $P_k(x)$ порядка k (сферических гармоник) образует пространство H_k размерности

$$a_k = \binom{m+k+1}{k} - \binom{m+k-3}{k-2}.$$

Через $Y_j^{(k)}(x)$, $1 \leq j \leq a_k$, будем обозначать элементы ортонормированного базиса в H_k.

Пусть $f \in L(S^{m-1})$ и

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_j^{(k)} Y_j^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(f,x), \tag{1}$$

где

$$c_j^{(k)} = c_j^{(k)}(f) = (f, Y_j^{(k)}) = \int_{S^{m-1}} f(x) Y_j^{(k)}(x)\, dS(x)$$

— коэффициенты Фурье — Лапласа функции $f(x)$, $Y_k(f,x)$ — проекция $f(x)$ на пространство H_k сферических гармоник степени k.

Подробная информация о сферических гармониках содержится в работах [1 – 3].

Пусть, далее,

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} Y_k(f,x)$$

— суммы Фурье – Лапласа порядка n, $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 0,1,\ldots$, — некоторая последовательность неотрицательных чисел, $\Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$, $k = 0,1,\ldots$. Введем в рассмотрение величину

$$H_2(x) = H_2(f,x,\lambda) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k \left| f(x) - S_k(f,x) \right|^2, \tag{2}$$

характеризующую сильную суммируемость с показателем 2 ряда Фурье – Лапласа (1).

Изучение свойств суммы ряда (2) является одним из аспектов теории сильной суммируемости рядов.

Подобные величины для ортонормированных на конечном отрезке систем функций рассматривались ранее Г. А. Фоминым [4]. Часть приводимых ниже результатов являются, в известном смысле, сферическими аналогами соответствующих результатов работ Г. А. Фомина [4], С. Н. Бернштейна [6], О. Саса [7], Г. Харди [8], Г. Вейля [9].

2. Сильная суммируемость на сфере и теоремы вложения.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$, $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 0,1,2,\ldots$, — *некоторая неубывающая последовательность неотрицательных чисел. Для того чтобы ряд* (2) *сходился почти всюду на сфере* S^{m-1} *к некоторой функции* $H_2(x) \in L\,(S^{m-1})$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_j^{(k)} \right|^2 < \infty, \tag{3}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left\| Y_k(f,x) \right\|_{L_2(S^{m-1})}^2 < \infty, \tag{3'}$$

причем если $H_2(x) \in L(S^{m-1})$, *то*

$$\| H_2(x) \|_{L(S^{m-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0) \| Y_k(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $H_2(x) \in L(S^{m-1})$ и положим

$$H_{2,n}(x) = H_{2,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \, | f(x) - S_k(f, x) |^2 .$$

Тогда в силу известной теоремы Б. Леви и равенства Парсеваля [3, с. 19] находим

$$\| H_2(x) \|_{L(S^{m-1})} = \lim_{n \to \infty} \int_{S^{m-1}} H_{2,n}(x) \, dS(x) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \int_{S^{m-1}} | f(x) - S_k(f, x) |^2 \, dS(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \| Y_\nu(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})}. \tag{5}$$

Применяя преобразования Абеля, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \| Y_\nu(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0) \| Y_k(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})} + (\lambda_{n+1} - \lambda_0) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \| Y_\nu(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Из существования конечного предела в (5) следует существование конечного предела в правой части (6), откуда вытекает условие (3) или (3′). Действительно, существование конечного предела в правой части (6) влечет ограниченность обоих слагаемых в правой части (6). Отсюда следует условие (3) или (3′), так как правая часть в (6) равна

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \| Y_k(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})} + \lambda_{n+1} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \| Y_\nu(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})} - \lambda_0 \| f \|^2_{L_2(S^{m-1})}.$$

Поэтому из (6) следует равенство (4).

Обратно, пусть выполнено условие (3). Поскольку последовательность λ_k неотрицательна и не убывает, второе слагаемое в последнем выражении не превышает величину

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_\nu \| Y_\nu(f, x) \|^2_{L_2(S^{m-1})},$$

которая в силу (3) или (3′) стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому правая часть в (6) ограничена. Тогда из равенства (6) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\lambda_k \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \|Y_\nu(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})}$$

и

$$\int_{S^{m-1}} H_{2,n}(x)\,dS(x) = \sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \|Y_\nu(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \|Y_\nu(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} < K, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Отсюда по теореме Б. Леви заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} H_{2,n}(x) = H(x) \in L(S^{m-1}).$$

Теорема доказана.

Пусть

$$\mathrm{E}_n(f)_{L_2(S^{m-1})} = \inf_{T_n} \| f - T_n \|_{L_2(S^{m-1})}$$

— наилучшее приближение функции $f(x) \in L_2(S^{m-1})$ в пространстве $L_2(S^{m-1})$ полиномами степени не выше n:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{a_k} b_j^{(k)} Y_j^{(k)}(x).$$

Справедливо такое утверждение.

Теорема 2. *Соотношение*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} < \infty \tag{7}$$

эквивалентно условию (3) *или* (3′).

Доказательство. Условие (7) запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k \int_{S^{m-1}} |f(x) - S_k(f,x)|^2\, dS(x) < \infty.$$

Отсюда по теореме Б. Леви следует сходимость почти всюду на S^{m-1} ряда (2). А это согласно теореме 1 влечет соотношение (3). Обратно, поскольку

$$E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} = \|f(x) - S_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \|Y_\nu(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})},$$

равенство (6) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0) \| Y_k(f,x) \|^2_{L_2(S^{m-1})} +$$

$$+ (\lambda_{n+1} - \lambda_0) E_n^2(f)_{L_2(S^{m-1})} < K, \quad K \equiv \mathrm{const} > 0 .$$

Отсюда ясно, что соотношение (3) влечет (7).

Пусть теперь

$$H(x) = H(f,x,\Lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k \left| f(x) - S_k(f,x) \right| .$$

Условия включения $H(x) \in L_2(S^{m-1})$ содержатся в следующем утверждении.

Теорема 3. *Пусть для некоторой неубывающей последовательности неотрицательных чисел* $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 0,1,\ldots$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k E_k(f)_{L_2(S^{m-1})} < \infty, \quad f(x) \in L_2(S^{m-1}) . \tag{8}$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k \left| f(x) - S_k(f,x) \right| \tag{9}$$

сходится почти всюду на S^{m-1} *к* $H(x) \in L_2(S^{m-1})$.

Доказательство. Если, начиная с некоторого номера n_0, $E_n(f)_{L_2(S^{m-1})} = 0$, $n \geq n_0$, то утверждение теоремы 3 очевидно.

Пусть $E_n(f)_{L_2(S^{m-1})} > 0$, $n = 0,1,2\ldots$. Положим $t_0 = 0$, $t_k = \sum_{\nu=0}^{k-1} \dfrac{\Delta\lambda_\nu}{E_\nu(f)_{L_2(S^{m-1})}}$, $k = 1,2,\ldots$.

Тогда условие (8) означает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t_k E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} < \infty ,$$

и в силу теоремы Б. Леви ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t_k \left| f(x) - S_k(f,x) \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_k}{E_k(f)_{L_2(S^{m-1})}} \left| f(x) - S_k(f,x) \right|^2$$

почти всюду на S^{m-1} сходится к некоторой суммируемой на S^{m-1} функции. Применяя неравенство Буняковского, находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k \left| f(x) - S_k(f,x) \right| \le$$

$$\le \left\{ \sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k(f)_{L_2(S^{m-1})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_k}{E_k(f)_{L_2(S^{m-1})}} \left| f(x) - S_k(f,x) \right|^2 \right\}^{1/2}.$$

Отсюда с учетом условия (8) заключаем, что ряд (9) сходится к некоторой функции из $L_2(S^{m-1})$ почти для всех $x \in S^{m-1}$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть ряд* (9) *сходится почти всюду на* S^{m-1} *к некоторой функции* $H(x) \in L_2(S^{m-1})$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2 \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_j^{(k)} \right|^2 < \infty, \tag{10}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2 \left\| Y_k(f,x) \right\|_{L_2(S^{m-1})}^2 < \infty, \tag{10'}$$

причем

$$\| H(x) \|_{L_2(S^{m-1})} \ge \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k - \lambda_0 \right)^2 \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_j^{(k)} \right|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k - \lambda_0 \right)^2 \left\| Y_k(f,x) \right\|_{L_2(S^{m-1})}^2 \right\}^{1/2}. \tag{11}$$

Доказательство. Полагая

$$H_n(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k \left| f(x) - S_k(f,x) \right|,$$

$$\rho_k(f,x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) - S_k(f,x)$$

и применяя преобразования Абеля, имеем

$$H^2(x) \ge H_n^2(x) \ge \left| \sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k \rho_k(f,x) \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_0)(\rho_k(f,x) - \rho_{k+1}(f,x) + (\lambda_{n+1} - \lambda_0)\rho_n(f,x)) \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_0) \sum_{j=1}^{a_k} c_j^{(k)} Y_j^{(k)}(x) + (\lambda_{n+1} - \lambda_0) \rho_n(f, x) \right|^2 .$$

В силу равенства Парсеваля находим

$$\int_{S^{m-1}} H^2(x)\, dS(x) \geq \int_{S^{m-1}} \left| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{j=1}^{a_k} c_j^{(k)} Y_j^{(k)}(x) + (\lambda_{n+1} - \lambda_0) \rho_n(f, x) \right|^2 dS(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0)^2 \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_j^{(k)} \right|^2 + (\lambda_{n+1} - \lambda_0)^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_j^{(k)} \right|^2 \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_0)^2 \sum_{j=1}^{a_k} \left| c_j^{(k)} \right|^2, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом,

$$\| H(x) \|_{L_2(S^{m-1})} \geq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k - \lambda_0 \right)^2 \| Y_k(f, x) \|_{L_2(S^{m-1})}^2 \right\}^{1/2} .$$

Следующее утверждение дает поточечную оценку на сфере классических сильных средних рядов Фурье – Лапласа.

Теорема 5. *Пусть* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$, $\Lambda = \{ \lambda_k \}$, $k = 0, 1, \ldots$, — *возрастающая последовательность неотрицательных чисел. Если выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k E_k^2 f(x)_{L_2(S^{m-1})} < \infty,$$

то почти всюду на сфере S^{m-1}

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |\rho_k(f, x)| \leq \tilde{H}_2(x) \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Delta\lambda_k} \right\}^{1/2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где

$$\tilde{H}_2(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{H_2(x)} \in L_2(S^{m-1}).$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши – Буняковского, находим

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |\rho_k(f, x)| \leq \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\Delta\lambda_k} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k |\rho_k(f, x)|^2 \right\}^{1/2} =$$

$$\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Delta\lambda_k}H_2(x)\right\}^{1/2} = \sqrt{H_2(x)}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Delta\lambda_k}\right\}^{1/2}, \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

что и требовалось доказать.

***Следствие* 1.** *Если* $f(x)\in L_2(S^{m-1})$ *и для некоторого* α, $0<\alpha\le 1$, *выполняется условие*

$$E_n(f)_{L_2(S^{m-1})} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

то почти всюду на сфере S^{m-1}

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|\rho_k(f,x)| \le \begin{cases}\tilde H_2^{(\alpha)}(x)\dfrac{(\ln n)^{1/2+\varepsilon}}{n^\alpha}, & 0<\alpha<1,\\[2mm] \tilde H_2^{(1)}(x)\dfrac{(\ln n)^{1+\varepsilon}}{n}, & \alpha=1,\end{cases}$$

где

$$\tilde H_2^{(\alpha)}(x) \overset{\text{df}}{=} \left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{2\alpha-1}}{(\ln k)^{1+2\varepsilon}}|\rho_k(f,x)|^2\right\}^{1/2}, \qquad 0<\alpha<1,$$

$$\tilde H_2^{(1)}(x) \overset{\text{df}}{=} \left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{(\ln k)^{1+2\varepsilon}}|\rho_k(f,x)|^2\right\}^{1/2}, \qquad \alpha=1,$$

$$\tilde H_2^{(\alpha)}(x)\in L_2(S^{m-1}), \qquad 0<\alpha\le 1.$$

В самом деле, положим

$$\lambda_k = \sum_{l=2}^{k-1}\frac{l^{2\alpha-1}}{(\ln l)^{1+2\varepsilon}}, \qquad \varepsilon>0, \qquad 0<\alpha\le 1.$$

Тогда

$$\Delta\lambda_k = \frac{k^{2\alpha-1}}{(\ln k)^{1+2\varepsilon}},$$

и если выполнено условие следствия 1, то

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{2\alpha-1}}{(\ln k)^{1+2\varepsilon}}E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} < \infty.$$

В этом случае, согласно теореме 5, будем иметь

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\left|\rho_k(f,x)\right| \le \tilde{H}_2(x)\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln k)^{1+2\varepsilon}}{k^{2\alpha-1}}\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \begin{cases} \tilde{H}_2^{(\alpha)}(x)\dfrac{(\ln n)^{1/2+\varepsilon}}{n^{\alpha}}, & 0<\alpha<1, \\ \tilde{H}_2^{(1)}(x)\dfrac{(\ln n)^{1+\varepsilon}}{n}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$ *и* $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 0,1,2,\ldots,$ — *возрастающая последовательность неотрицательных чисел. Если выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k E_k^2 f(x)_{L_2(S^{m-1})} < \infty, \tag{13}$$

то

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f,x)\right|\right\|_{L_2\left(S^{m-1}\right)} \le \left\{\frac{\|H_2\|_{L(S^{m-1})}}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\Delta\lambda_k}\right\}^{1/2}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Пусть, далее, $\Lambda = \lambda_k^{(n)}$, $k, n = 0,1,2,\ldots,$ $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$, — матрица действительных чисел, элементы которой не убывают по k и подчинены условию Г. А. Фомина [5]:

$$\left(n\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|^2\right)^{1/2} < K, \qquad K \equiv \text{const} > 0. \tag{14}$$

Тогда почти всюду на S^{m-1}

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\left|\rho_k(f,x)\right| \le \left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f,x)\right|^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \frac{K}{n^{1/2}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f,x)\right|^2\right\}^{1/2} \le K_1\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f,x)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть матрица чисел* $\Lambda = \lambda_k^{(n)}$, $k, n = 0,1,\ldots,$ $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$, *такова, что ее элементы не убывают по* k *и удовлетворяют условию* (14). *Тогда для* $f(x) \in L(S^{m-1})$ *почти всюду на* S^{m-1}

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k^{(n)}\left|\rho_k(f,x)\right| \le K_1\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|\rho_k(f,x)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Отсюда получаем такое следствие.

***Следствие* 3.** *Пусть выполнены все условия теоремы* 6. *Тогда для* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_k^{(n)} |\rho_k(f,x)| \right\|_{L_2(S^{m-1})} \leq K \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} \right\}^{1/2}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

3. Приложения в вопросах абсолютной сходимости в $L_2(S^{m-1})$ рядов Фурье – Лапласа.

Теорема 7. *Пусть* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$,

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{k-1} d_l, \quad d_l \geq 0, \quad l = 0,1,\ldots, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{15}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} < \infty. \tag{16}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left\| Y_k(f,x) \right\|_{L_2(S^{m-1})}^2 < \infty. \tag{17}$$

Если

$$t_k = \sum_{l=0}^{k-1} \tilde{d}_k \tag{18}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{d}_k E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} = \infty, \tag{19}$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} t_k \left\| Y_k(f,x) \right\|_{L_2(S^{m-1})}^2 = \infty. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (16). С учетом (15) оно примет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta\lambda_k E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} < \infty. \tag{21}$$

Условие (21), согласно теореме 2, влечет соотношение (17). Если же выполнено условие (19), то с учетом (18) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t_k E_k^2(f)_{L_2(S^{m-1})} = \infty,$$

а это, в свою очередь, согласно теореме 2, равносильно условию (20).

***Следствие* 4.** *Если для некоторого* α, $0 < \alpha \leq 1$, *выполняется условие*

$$E_n(f)_{L_2(S^{m-1})} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \tag{22}$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} \frac{k^{2\alpha}}{(\ln k)^{1+\varepsilon}} < \infty. \tag{23}$$

Если, кроме того,

$$E_n(f)_{L_2(S^{m-1})} \geq \frac{K}{n^\alpha}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

$K \equiv \text{const} > 0$, *то*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} \frac{k^{2\alpha}}{\ln k} = \infty. \tag{25}$$

Доказательство. Положим $d_0 = d_1 = 0$, $d_k = \dfrac{k^{2\alpha-1}}{(\ln k)^{1+\varepsilon}}$, $0 < \alpha \leq 1$, $k = 2, 3, \ldots.$ Тогда из условия (22) следует (16) и в этом случае, в силу теоремы 7, справедливо условие (17). Поскольку

$$\lambda_k = \sum_{l=2}^{k-1} \frac{l^{2\alpha-1}}{(\ln l)^{1+\varepsilon}} > \frac{1}{(\ln l)^{1+\varepsilon}} \sum_{l=2}^{k-1} l^{2\alpha-1} = O\left(\frac{k^{2\alpha}}{(\ln k)^{1+\varepsilon}}\right), \qquad k = 3, 4, \ldots,$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} \geq K \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{2\alpha}}{(\ln k)^{1+\varepsilon}} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

т. е. справедливо соотношение (23).

Положим теперь $\tilde{d}_0 = \tilde{d}_1 = 0$,

$$\tilde{d}_k = \frac{k^{2\alpha-1}}{(\ln k)}, \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

Тогда условие (24) влечет соотношение (19), а это, в свою очередь, влечет равенство (20). Из него же следует условие (25).

Следствие 4 доказано.

***Следствие* 5.** *Если* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$ *и выполнено условие* (22), *то для любого* $\gamma < \alpha$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} k^{2\gamma} < \infty. \tag{26}$$

Действительно, если выполняется условие (22), то получаем сходимость ряда (23). В таком случае для любого $\gamma < \alpha$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} k^{2\gamma} \le K \sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} \frac{k^{2\alpha}}{(\ln k)^{1+\varepsilon}}.$$

Прежде чем перейти к формулировке утверждения, которое вытекает из следствия 5, напомним следующее определение. Пусть E — нормированное пространство и $y_k \in E$, $k = 0$, $1, \ldots$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| y_k \|_E ,$$

а если E — банахово пространство, то любой абсолютно сходящийся в E ряд сходится.

Принимая во внимание, что любая функция $f(x) \in L_2(S^{m-1})$ однозначно представима в виде суммы сходящегося в $L_2(S^{m-1})$ ряда Фурье – Лапласа, приходим к такому утверждению.

***Следствие* 6.** Если $f(x) \in L_2(S^{m-1})$ *и в условии* (22) $\alpha > \dfrac{1}{2}$, *то ряд Фурье – Лапласа* (1) *является абсолютно сходящимся в* $L_2(S^{m-1})$, *т. е.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|_{L_2(S^{m-1})} < \infty .$$

В самом деле, выберем γ так, чтобы $\alpha > \gamma > \dfrac{1}{2}$. Учитывая следствие 5 и применяя неравенство Коши – Буняковского, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|_{L_2(S^{m-1})} \le \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} k^{2\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\gamma}} \right\}^{1/2} < \infty .$$

Следствие 6 является сферическим аналогом результата С. Н. Бернштейна [6] относительно абсолютной сходимости тригонометрических рядов (см. также [7]).

***Следствие* 7.** *Если* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$ *и выполнено условие* (22), *то для любого* β, $\beta > \dfrac{2}{2\alpha+1}$, *справедливо соотношение*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^{\beta}_{L_2(S^{m-1})} < \infty . \tag{27}$$

Доказательство. Если $\beta \ge 2$, то утверждение следует из оценки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^{\beta}_{L_2(S^{m-1})} \le \sum_{k=0}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^{2}_{L_2(S^{m-1})} < \infty .$$

Пусть $\beta < 2$. Согласно следствию 4, для любого $\gamma < 2\alpha$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} k^{\gamma} < \infty .$$

Положим $p = \dfrac{2}{\beta}\ (p > 1)$ и $p' = \dfrac{p}{p-1} = \dfrac{2}{2-\beta}$. Тогда в силу неравенства Гельдера находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^{\beta}_{L_2(S^{m-1})} \le \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} k^{\gamma} \right\}^{\beta/2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma\beta/(\beta-2)} \right\}^{1/p}.$$

Принимая во внимание, что $\beta > \dfrac{2}{\gamma+1} > \dfrac{2}{2\alpha+1}$, приходим к соотношению (27).

***Следствие* 8.** *Если* $f(x) \in L_2(S^{m-1})$ *и выполнено условие* (22), *то для любого* $\beta < \alpha$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|_{L_2(S^{m-1})} k^{\beta-1/2} < \infty.$$

Действительно, если γ — такое число, что $2\beta < \gamma < 2\alpha$, то на основании следствия 5 получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta-1/2} \|Y_k(f,x)\|_{L_2(S^{m-1})} \le \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|Y_k(f,x)\|^2_{L_2(S^{m-1})} k^{\gamma} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2\beta-1}}{k^{\gamma}} \right\}^{1/2} < \infty.$$

Последнее утверждение также является сферическим аналогом соответствующих результатов Г. Харди [8], Вейля [9], Г. А. Фомина [4] относительно тригонометрических рядов и рядов по произвольным полным ортонормированным на отрезке системам функций.

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965.
3. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. – 356 с.
4. *Фомин Г. А.* Некоторые свойства ортогональных разложений в L^2 // Некоторые вопросы математического анализа. – Тула: Тул. гос. пед. ин-т, 1972. – С. 141 – 154.
5. *Фомин Г. А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 1. – С. 144 – 152.
6. *Бернштейн С. Н.* Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов // Собр. сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 1. – С. 217 – 223.
7. *Szasz O.* Über den Konvergenzexponent der Fourierschen Reihen // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. – 1922. – S. 135 – 150.
8. *Hardy G. H.* Weierstrass's nondifferentiable function // Proc. Amer. Math. Soc. – 1916. – **17**. – P. 301 – 325.
9. *Weyl H.* Bemerkungen zum Begriff der Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich. – 1917. – **62**. – S. 296 – 302.

Получено 09.09.11,
после доработки — 03.01.12