УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ НА КЛАСАХ ПЕРІОДИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We establish asymptotically unimprovable interpolation analogs of Lebesgue-type inequalities on the sets $C^{\psi}_{\beta}L_p$ of (ψ,β)-differentiable functions generated by sequences $\psi(k)$ that satisfy the d'Alembert conditions. We find asymptotic equalities for the least upper bounds of approximations by interpolation trigonometric polynomials on the classes $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\le p\le\infty$.

Установлены асимптотически неулучшаемые интерполяционные аналоги неравенств типа Лебега на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций $C^{\psi}_{\beta}L_p$, порождаемых последовательностями $\psi(k)$, удовлетворяющими условиям Даламбера. Найдены асимптотические равенства для точных верхних граней приближений интерполяционными тригонометрическими полиномами на классах $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\le p\le\infty$.

У цій роботі продовжуються дослідження [1–4] по вивченню апроксимаційних властивостей інтерполяційних тригонометричних поліномів Лагранжа на введених О. І. Степанцем [5, 6] класах (ψ,β)-диференційовних функцій $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Через L_p, $1\le p\le\infty$, як прийнято, позначатимемо простори 2π-періодичних сумовних функцій φ зі скінченними нормами $\|\varphi\|_p$, де при $p\in[1,\infty)$

$$\|\varphi\|_p=\|\varphi\|_{L_p}=\left(\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

а при $p=\infty$

$$\|\varphi\|_\infty=\|\varphi\|_M=\operatorname*{ess\,sup}_t|\varphi(t)|,$$

через C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ, в якому норма задається рівністю

$$\|\varphi\|_C=\max_t|\varphi(t)|.$$

Позначимо через $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\subset L_1$, множину неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які при всіх $x\in\mathbb{R}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\Psi_\beta(t)dt,\quad \varphi\in\mathfrak{N},\quad \varphi\perp 1, \tag{1}$$

з фіксованим сумовним ядром $\Psi_\beta(t)$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_\beta(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\qquad \psi(k)>0,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Функцію φ у рівності (1) називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$, з іншого боку, функцію f називають (ψ,β)-інтегралом функції φ і позначають через $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi)$.

В рамках даної роботи будемо вважати, що послідовність $\psi(k)$ коефіцієнтів ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (2) задовольняє умову D_q, $q\in[0,1)$, яка полягає у виконанні рівності

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q. \tag{3}$$

Цей факт будемо записувати так: $\psi \in D_q$. Якщо $\psi \in D_q$, $q \in [0,1)$, то (див., наприклад, [6, с. 139 – 141]) класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ складаються з 2π-періодичних функцій $f(x)$, які допускають регулярне продовження у смугу $|\mathrm{Im} z| \le \ln \dfrac{1}{q}$ комплексної площини.

Важливим прикладом ядер $\Psi_{\beta}(t)$ вигляду (2), коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову (3) при $0 < q < 1$, є відомі ядра Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, породжені ядрами (4), будемо позначати через $C^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$, (ψ,β)-похідні функцій f — через f^{q}_{β}, а (ψ,β)-інтеграли функцій φ — через $\mathcal{J}^{q}_{\beta}\varphi$. У роботі як $\mathfrak{N}$ використовуватимуться, зокрема, множини $U^0_p = \{\varphi \in L_p \colon \|\varphi\|_p \le 1,\ \varphi \perp 1\}$. При цьому для зручності покладемо $C^{\psi}_{\beta}U^0_p = C^{\psi}_{\beta,p}$, $C^{q}_{\beta}U^0_p = C^{q}_{\beta,p}$.

Нехай $f \in C$. Через $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у вузлах $x^{(n-1)}_k = \dfrac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\widetilde{S}_{n-1}(f; x^{(n-1)}_k) = f(x^{(n-1)}_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Простір тригонометричних поліномів t_{n-1}, порядок яких не перевищує $n-1$, позначимо через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Величина

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_p, \quad 1 \le p \le \infty,$$

є найкращим наближенням функції $f \in L_p$ у метриці простору L_p тригонометричними поліномами порядку $n-1$.

У даній роботі для $\psi \in D_q$, $q \in [0,1)$, і довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ і $1 \le p \le \infty$ встановлено асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега для величин

$$\widetilde{\rho}_n(f;x) = f(x) - \widetilde{S}_{n-1}(f;x)$$

при $f \in C^{\psi}_{\beta}L_p$, а також асимптотичні при $n \to \infty$ рівності для величин

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p}; x) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,p}} |\widetilde{\rho}_n(f;x)|.$$

Основними результатами роботи є наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай $\psi \in D_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 \le p \le \infty$. Тоді якщо $f \in C^{\psi}_{\beta}L_p$, то для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$*

$$|\widetilde{\rho}_n(f;x)| \le \psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'} K(p',q) + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}. \tag{5}$$

При цьому для довільних $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ і $f \in C^{\psi}_{\beta}L_p$ знайдеться функція $F(\cdot) = F(f;n;x;\cdot)$ така, що $E_n(F^{\psi}_{\beta})_{L_p} = E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}$ і при $n \to \infty$ виконується рівність

$$|\widetilde{\rho}_n(F;x)| = \psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q)+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right)E_n(F^{\psi}_{\beta})_{L_p}. \tag{6}$$

У формулах (5) *і* (6) $p' = p/(p-1)$,

$$K(\alpha,q) = \frac{1}{2^{1+1/\alpha}}\left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\right\|_{\alpha}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\psi) = \sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|, \tag{8}$$

$$s(p) = \begin{cases} 1, & p=\infty, \\ 2, & 1\leq p<\infty, \end{cases} \tag{9}$$

а величини $O(1)$ *рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Із теореми 1 випливає, зокрема, що нерівність (5) є асимптотично непокращуваною на всьому просторі $C^{\psi}_{\beta}L_p$ при кожному $x\in\mathbb{R}$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $1\leq p\leq\infty$. Виявляється, що ця нерівність залишається асимптотично точною і на деяких важливих підмножинах з $C^{\psi}_{\beta}L_p$. Зокрема, розглядаючи точні верхні межі в обох частинах нерівності (5) по класах $C^{\psi}_{\beta,p}$, отримуємо нерівність

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x) \leq \psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q)+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right). \tag{10}$$

Наступна теорема показує, що у співвідношенні (10) замість „$\leq$” можна поставити знак „$=$”.

Теорема 2. *Нехай* $\psi\in D_q$, $0<q<1$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $1\leq p\leq\infty$. *Тоді для довільних* $x\in\mathbb{R}$ *при* $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x) = \psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q)+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{11}$$

в якій p', $K(p',q)$, ε_n, $s(p)$ *і* $O(1)$ *мають той же сенс, що і в теоремі* 1.

Зазначимо, що рівність (11) є інтерполяційним аналогом асимптотичної рівності для точної верхньої межі рівномірних наближень функцій f із класу $C^{\psi}_{\beta,p}$ частинними сумами Фур'є $S_{n-1}(f)$ порядку $n-1$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}}\|f-S_{n-1}(f)\|_C,$$

яку було знайдено в [7, с. 1090] і яка має вигляд

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right). \qquad (12)$$

Зіставлення (11) і (12) дозволяє записати співвідношення

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x) = 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \qquad (13)$$

яке справджується при довільних $\psi \in D_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ і $1 \le p \le \infty$. При $p = \infty$ співвідношення (13) встановлено в [1, с. 1692]. Зауважимо також, що формула (11) доповнює результат роботи [8, с. 279, 280], де було знайдено асимптотичні рівності $\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x)$ за умови, що $\psi \in D_0$.

Важливим прикладом ядер $\Psi_\beta(t)$ вигляду (2), коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову $\psi \in D_q$, є полігармонічні ядра Пуассона (див. [9, с. 256, 257])

$$P_{q,\beta}(m,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_m(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad m \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \qquad (14)$$

де

$$\psi_m(k) = q^k\left(1 + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(1-q^2)^j}{j!2^j}\prod_{l=0}^{j-1}(k+2l)\right), \quad q \in (0,1), \qquad (15)$$

та ядра Неймана (див. [6, с. 361])

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \qquad (16)$$

Для величин ε_n вигляду (8), що породжуються послідовностями $\psi(k) = \dfrac{q^k}{k}$ (у випадку ядер $N_{q,\beta}(t)$), елементарно доводиться оцінка

$$\varepsilon_n \le \frac{q}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (17)$$

Що ж стосується величин ε_n, породжених послідовностями $\psi(k) = \psi_m(k)$ ядер $P_{q,\beta}(m,t)$, то при $m = 1$ для них справджується очевидна тотожність

$$\varepsilon_n \equiv 0, \qquad (18)$$

а при $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, як доведено в [10, с. 108] (див. також [11, с. 180]), виконується нерівність

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(m) \le \frac{(2m-3)q}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (19)$$

Із теореми 2 та нерівностей (17) – (19) отримуємо наступні твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай класи $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, породжуються полігармонічними ядрами Пуассона $P_{q,\beta}(m,t)$ вигляду* (14). *Тоді для довільних $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$ і $m = 1$ виконується асимптотична рівність*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|q^n\left(\frac{4}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right), \qquad (20)$$

а при $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ — асимптотична рівність

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|q^n\left(1 + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(1-q^2)^j}{j!2^j}\prod_{l=0}^{j-1}(n+2l)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{4}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q)+O(1)\frac{mq}{n(1-q)^2}\right). \qquad (21)$$

У рівностях (20) *і* (21) $p'=p/(p-1)$, $K(p',q)$ *означено формулою* (7), *а величини* $O(1)$ *рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Наслідок 2. *Нехай класи* $C^{\psi}_{\beta,p}$, $1\le p\le\infty$, *породжуються ядрами Неймана* $N_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (16). *Тоді для довільних* $x\in\mathbb{R}$ *при* $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x)=\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\frac{q^n}{n}\left(\frac{4}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \qquad (22)$$

в якій p', $K(p',q)$ *і* $O(1)$ *мають той же сенс, що і у наслідку* 1.

При $1\le p'<\infty$ залежність величини $K(p',q)$ від параметрів p' і q виражається формулою

$$K(p',q)=\frac{\pi^{1/p'}}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(\frac{p'}{2})_k}{k!}\right)^2q^{2k}\right)^{1/p'}, \qquad (23)$$

де

$$\left(\frac{p'}{2}\right)_k=\frac{p'}{2}\left(\frac{p'}{2}+1\right)\left(\frac{p'}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{p'}{2}+k-1\right).$$

Щоб переконатись у справедливості (23), досить з урахуванням зображення

$$\int_{-\pi}^{\pi}(1-2q\cos x+q^2)^{-p'/2}dx=\int_{-\pi}^{\pi}(1-qe^{ix})^{-p'/2}(1-qe^{-ix})^{-p'/2}dx$$

та відомого розкладу

$$(1-qe^{ix})^{-\frac{p'}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(p'/2)_k}{k!}q^ke^{ikx}, \qquad x\in\mathbb{R}, \quad q\in(0,1), \qquad (24)$$

використати рівність Парсеваля.

Позначивши через $F(a,b;c;z)$ гіпергеометричну функцію Гаусса

$$F(a,b;c;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!},$$

із (23) і (24) одержуємо

$$K(p',q)=\frac{\pi^{1/p'}}{2}F^{1/p'}\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;q^2\right), \qquad 1\le p'<\infty, \quad q\in(0,1). \qquad (25)$$

На підставі (25) асимптотичну рівність (11) при $1\le p'<\infty$ можна записати у вигляді

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x)=\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'}F^{1/p'}\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;q^2\right)+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right). \qquad (26)$$

Зокрема, при $p'=1$

$$K(p',q)=K(1,q)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;q^2\right)=\mathbf{K}(q), \tag{27}$$

де $\mathbf{K}(q)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, а при $p'=2$

$$K(p',q)=K(2,q)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}F^{1/2}(1,1;1;q^2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-q^2}}. \tag{28}$$

Із (26) – (28) маємо

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty};x)=\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{16}{\pi^2}\mathbf{K}(q)+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{29}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,2};x)=\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\sqrt{\pi(1-q^2)}}+O(1)\frac{\varepsilon_n+q/n}{(1-q)^2}\right). \tag{30}$$

Рівність (29) встановлено в роботі [1, с. 1691].

При $p'=\infty$, як випливає з (7),

$$K(p',q)=K(\infty,q)=\frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\right\|_{\infty}=\frac{1}{2(1-q)}. \tag{31}$$

Із (11) і (31) отримуємо асимптотичну формулу

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,1};x)=\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi(1-q)}+O(1)\frac{\varepsilon_n+q/n}{(1-q)^2}\right). \tag{32}$$

Асимптотичні рівності (30) і (32) одержано вперше.

Доповненням теореми 1 при $q=0$ є наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай $\psi\in D_0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le p\le\infty$, $x\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$. Тоді якщо $f\in C^{\psi}_{\beta}C$ або $f\in C^{\psi}_{\beta}L_{\infty}$, то при $n\to\infty$*

$$|\widetilde{\rho}_n(f;x)|\le\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi}\psi(n)+O(1)\left(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)}+\sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\right)\right)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_{\infty}}, \tag{33}$$

якщо ж $f\in C^{\psi}_{\beta}L_p$, $1\le p<\infty$, то при $n\to\infty$

$$|\widetilde{\rho}_n(f;x)|\le\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'}\psi(n)+O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}. \tag{34}$$

При цьому для довільних $f\in C^{\psi}_{\beta}C$ $\left(C^{\psi}_{\beta}L_{\infty}\right)$, $x\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$ знайдеться функція $F(\cdot)=$ $=F(f;n;x;\cdot)\in C^{\psi}_{\beta}C$ така, що $E_n(F^{\psi}_{\beta})_C=E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_{\infty}}$ і при $n\to\infty$ виконується рівність

$$|\widetilde{\rho}_n(F;x)|=\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi}\psi(n)+O(1)\left(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)}+\sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\right)\right)E_n(F^{\psi}_{\beta})_{C}, \tag{35}$$

а для довільних $f\in C^{\psi}_{\beta}L_p$, $1\le p<\infty$, $n\in\mathbb{N}$ і $x\in\mathbb{R}$ знайдеться функція $F(\cdot)=F(f;n;x;\cdot)\in$ $\in C^{\psi}_{\beta}L_p$ така, що $E_n(F^{\psi}_{\beta})_{L_p}=E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}$ і при $n\to\infty$ виконується рівність

$$|\widetilde{\rho}_n(F;x)|=\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'}\psi(n)+O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right)E_n(F^{\psi}_{\beta})_{L_p}. \tag{36}$$

У формулах (34) і (36) $p'=p/(p-1)$, а величини $O(1)$ рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

Нерівності (33), (34) залишаються асимптотично непокращуваними не тільки на всіх просторах $C^\psi_\beta L_\infty$ та $C^\psi_\beta L_p$, $1 \le p < \infty$, при $\psi \in D_0$ і кожному $x \in \mathbb{R}$ та $\beta \in \mathbb{R}$, але й на таких важливих їхніх підмножинах, якими є класи $C^\psi_{\beta,\infty}$ та $C^\psi_{\beta,p}$. Цей факт випливає з наступних міркувань. Розглянемо точні верхні межі в обох частинах нерівності (33) по класу $C^\psi_{\beta,\infty}$ і точні верхні межі в обох частинах нерівності (34) по класах $C^\psi_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$. В результаті одержимо нерівності

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,\infty}; x) \le \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{8}{\pi}\psi(n) + O(1)\left(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)} + \sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\right)\right), \tag{37}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,p}; x) \le \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'}\psi(n) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right), \quad 1 \le p < \infty. \tag{38}$$

Зіставляючи два останні співвідношення з рівностями (15) і (16) роботи [8, с. 279, 280], з яких, зокрема, випливають асимптотичні формули

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,\infty}; x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{8}{\pi}\psi(n) + O(1)\left(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)} + \sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)\right)\right), \tag{39}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^\psi_{\beta,p}; x) = \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'}\psi(n) + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right), \quad 1 \le p < \infty, \tag{40}$$

робимо висновок, що у співвідношеннях (37) і (38) насправді можна поставити знаки рівності.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $\psi \in D_q$, $0 < q < 1$. Тоді згідно з лемою 1 роботи [1, с. 1694] для довільної функції $f \in C^\psi_\beta L_p$, $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце інтегральне зображення

$$\widetilde{\rho}_n(f; x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\gamma_n) + r_n(t)\right)dt, \tag{41}$$

в якому $\delta_n(\tau) = f^\psi_\beta(\tau) - t_{n-1}(\tau)$, $t_{n-1}(\cdot)$ — довільний тригонометричний поліном із множини $\mathcal{T}_{2n-1}$, а $r_n(t)$ і γ_n означені за допомогою рівностей

$$r_n(t) = r_n(\psi;\beta;x;t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty}\psi(\nu)\sin\left(\nu t + \left(k+\frac{1}{2}\right)(2n-1)x + \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{42}$$

$$\gamma_n = \gamma_n(\beta; x) = \frac{(2n-1)x + \pi(\beta-1)}{2}. \tag{43}$$

При цьому, згідно з формулами (20) і (21) роботи [1, с. 1696], для залишкового члена $r_n(t)$ за умови $\psi \in D_q$, $q \in (0,1)$, при достатньо великих n виконується оцінка

$$|r_n(t)| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty}\psi(\nu) \le \frac{\psi(n)(q+\varepsilon_n)^{2n-1}}{(1-q-\varepsilon_{3n-1})(1-(q+\varepsilon_n)^{2n-1})}, \tag{44}$$

в якій $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\psi) = \sup\limits_{k\ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $m \in \mathbb{N}$. Крім того, згідно з лемою 1 роботи [12, с. 379] справджується рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi(\nu)\cos(kt+\gamma_n)=\psi(n)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)+\bar{r}_n(t)\right), \tag{45}$$

де для залишкового члена $\bar{r}_n(t)=\bar{r}_n(\psi,\gamma_n,t)$, починаючи з деякого номера n_0, виконується нерівність

$$|\bar{r}_n(t)|\le\frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)}. \tag{46}$$

Об'єднуючи співвідношення (41), (44) – (46), отримуємо формулу

$$\widetilde{\rho}_n(f;x)=\frac{2}{\pi}\psi(n)\sin\frac{2n-1}{2}x\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{q}{n(1-q)}\right)\right)dt. \tag{47}$$

Беручи в (47) за $t_{n-1}(\cdot)$ поліном $t^*_{n-1}(\cdot)$ найкращого наближення у просторі L_p функції $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$, тобто такий, що

$$\|f^{\psi}_{\beta}-t^*_{n-1}\|_p=E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p},\quad 1\le p\le\infty,$$

і застосовуючи нерівність Гельдера

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h(t)g(t)|dt\le\|h\|_p\|g\|_{p'},\qquad h\in L_p,\quad 1\le p\le\infty,\quad g\in L_{p'},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{48}$$

для довільної функції $f\in C^{\psi}_{\beta}L_p$ маємо

$$|\widetilde{\rho}_n(f;x)|\le\frac{2}{\pi}\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(q^{-n}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)\right\|_{p'}+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{q}{n(1-q)}\right)\right)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}. \tag{49}$$

У роботі [7, с. 1087, 1088] (див. також [13, с. 1400, 1401]) доведено, що для довільних $q\in(0,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$ і $1\le\alpha\le\infty$ справедливою є асимптотична при $n\to\infty$ рівність

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\xi)\right\|_{\alpha}=q^n\left(\frac{2}{\pi^{1/\alpha}}\|\cos t\|_{\alpha}K(\alpha,q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(\alpha)}}\right), \tag{50}$$

в якій

$$\sigma(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha=1,\\ 2, & 1<\alpha\le\infty,\end{cases}$$

$K(\alpha,q)$ означена рівністю (7), а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n,α,q і ξ. Використовуючи рівність (50) при $\alpha=p'$ і $\xi=\gamma_n$, із (49) одержуємо оцінку (5).

Доведемо другу частину теореми 1. На підставі інтегрального зображення (41), співвідношень (44) – (46) та ортогональності функції $r_n(t)$ вигляду (42) до будь-якого тригонометричного полінома $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$, для довільної функції f з множини $C^{\psi}_{\beta}L_p$, $\psi\in D_q$ отримуємо рівність

$$\widetilde{\rho}_n(f;x)=\frac{2}{\pi}\psi(n)\sin\frac{2n-1}{2}x\Bigg(q^{-n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t+x)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt+$$

$$+O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{q}{n(1-q)}\right)E_n(f_\beta^\psi)_{L_p}\Bigg). \tag{51}$$

Зауважимо, що для функції

$$g_x(\cdot):=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t+\cdot)\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt,$$

де $\gamma_n=\gamma_n(\beta;x)$ означена формулою (43), при кожному фіксованому $x\in\mathbb{R}$

$$\rho_n(g_x;\cdot)=f(\cdot)-S_{n-1}(g_x;\cdot)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t+\cdot)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt$$

і, зокрема,

$$\rho_n(g_x;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\psi(t+x)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt. \tag{52}$$

У відповідності з теоремою 3 роботи [14, с. 310] при кожному $n\in\mathbb{N}$ для функції $g_x(\cdot)$ знайдеться функція $\bar\varphi(t)=\bar\varphi(n;x;t)$ така, що

$$E_n(\bar\varphi)_{L_p}=E_n(f_\beta^\psi)_{L_p} \tag{53}$$

і для $(q,2\gamma_n/\pi)$-інтеграла цієї функції $\bar\varphi$, який позначимо через G (тобто $G(\cdot)=\mathcal{J}^q_{2\gamma_n/\pi}(\cdot)$), виконується рівність

$$\|\rho_n(G;\cdot)\|_C=q^n\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}}K(p',q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right)E_n(f_\beta^\psi)_{L_p}, \tag{54}$$

де

$$G(\cdot)=\mathcal{J}^q_{2\gamma_n/\pi}\bar\varphi(\cdot)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\bar\varphi(\cdot+t)\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt.$$

Виберемо точку x_0 таким чином, щоб виконувалась рівність

$$|\rho_n(G;x_0)|=\|\rho_n(G;\cdot)\|_C. \tag{55}$$

Розглянемо функцію $F(t):=\mathcal{J}_\beta^\psi\bar\varphi(t-x+x_0)$ і покажемо, що вона буде шуканою. Дійсно, оскільки $F_\beta^\psi(t)=\bar\varphi(t-x+x_0)$, то з урахуванням (53) та інваріантності норми функції в L_p, $1\le p\le\infty$, відносно зсуву аргумента маємо

$$E_n(F_\beta^\psi)_{L_p}=E_n(f_\beta^\psi)_{L_p}.$$

Крім того, на підставі (51), (52), (54) і (55) для довільного заданого $x\in\mathbb{R}$ отримуємо

$$|\widetilde{\rho}_n(F;x)|=\frac{2}{\pi}\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Bigg(q^{-n}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\bar\varphi(t+x_0)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt\right|+$$

$$+O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{q}{n(1-q)}\right)E_n(F^{\psi}_{\beta})_{L_p}\Bigg) =$$

$$= 2\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(q^{-n}\|\rho_n(G;\cdot)\|_C+O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{q}{n(1-q)}\right)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}\right) =$$

$$= \psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}}K(p',q)+O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right)\right)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}.$$

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Будемо відштовхуватись від інтегрального зображення (47), яке має місце для довільної функції f з множини $C^{\psi}_{\beta}L_p$, $1\le p\le\infty$, $\psi\in D_q$, $q\in(0,1)$. Розглянемо точні верхні межі модулів обох частин рівності (47) при $t_{n-1}\equiv 0$ і довільному фіксованому $x\in\mathbb{R}$ по класу $C^{\psi}_{\beta,p}$. З огляду на інваріантність множини U^0_p відносно зсуву аргументу будемо мати

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\beta,p};x)=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,p}}|\widetilde{\rho}_n(f;x)| =$$

$$=\frac{2}{\pi}\psi(n)\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Bigg(q^{-n}\sup_{\varphi\in U^0_p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt+$$

$$+O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}+\frac{q}{n(1-q)}\right)\Bigg). \tag{56}$$

Як випливає із співвідношень двоїстості (див., наприклад, [15, с. 27])

$$\sup_{\varphi\in U^0_p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)dt=\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\gamma_n)-\lambda\right\|_{p'}. \tag{57}$$

У роботі [7, с. 1087, 1088] доведено рівномірну відносно всіх розглядуваних параметрів оцінку

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_{p'} =$$

$$= q^n\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1/p'}}\left\|\frac{1}{1-2q\cos t+q^2}\right\|_{p'}+O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right) =$$

$$= q^n\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1/p'}}K(p',q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right), \tag{58}$$

де $q\in(0,1)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $1\le p\le\infty$, $\xi\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, а $K(p',q)$ і $s(p)$ означено формулами (7) і (9) відповідно. Застосовуючи оцінку (58) при $\xi=\gamma_n$ і враховуючи (56) і (57), одержуємо (11).

Теорему доведено.

***Доведення теореми* 3.** Нехай $f \in C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\psi \in D_0$. Згідно з лемою 1 роботи [1, с. 1694] має місце інтегральне зображення (41). З огляду на (42) для залишкового члена $r_n(t)$ у формулі (41) можна записати очевидну оцінку

$$|r_n(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu). \tag{59}$$

Оскільки для довільної $\psi \in D_0$ при досить великих n

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} \psi(\nu) \leq \frac{1}{1-\varepsilon_{3n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \psi((2k+1)n-k), \tag{60}$$

де $\varepsilon_n = \sup\limits_{k \geq n} \left| \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \right|$, то на підставі (41), (59) і (60) маємо

$$\widetilde{\rho}_n(f;x) = \frac{2}{\pi} \sin\frac{2n-1}{2}x \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t+x) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_n) + O(1) \sum_{k=3n-1}^{\infty} \psi(k) \right) dt. \tag{61}$$

Якщо $f \in C^{\psi}_{\beta} L_{\infty}$ $(C^{\psi}_{\beta} C)$, то, взявши в (61) за t_{n-1} поліном t^{*}_{n-1} найкращого наближення у просторі L_{∞} функції f^{ψ}_{β} і застосувавши нерівність (48) при $p = \infty$, одержимо оцінку

$$|\widetilde{\rho}_n(f;x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin\frac{2n-1}{2}x \right| \left(\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_n) \right\|_1 + O(1) \sum_{k=3n-1}^{\infty} \psi(k) \right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_{\infty}}. \tag{62}$$

Як випливає з роботи [16, с. 512, 513],

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_n) \right\|_1 =$$

$$= \|\psi(n)\cos(nt+\gamma_n) + \psi(n+1)\cos((n+1)t+\gamma_n)\|_1 + O(1) \sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k) \leq$$

$$\leq 4\psi(n) + O(1) \left(\frac{\psi^2(n+1)}{\psi(n)} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k) \right). \tag{63}$$

Співвідношення (62) і (63) доводять нерівність (33). Якщо ж $f \in C^{\psi}_{\beta} L_p$, $1 \leq p < \infty$, то, взявши в (61) за t_{n-1} поліном t^{**}_{n-1} найкращого наближення функції f^{ψ}_{β} у метриці простору L_p і застосувавши нерівність (48), одержимо

$$|\widetilde{\rho}_n(f;x)| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin\frac{2n-1}{2}x \right| \left(\psi(n)\|\cos(nt+\gamma_n)\|_{p'} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p} =$$

$$= \left| \sin\frac{2n-1}{2}x \right| \left(\frac{2}{\pi}\psi(n)\|\cos t\|_{p'} + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_p}. \tag{64}$$

Доведемо другу частину теореми 3. Виходячи з інтегрального зображення (61) і враховуючи ортогональність функції $\sum_{k=n+2}^{\infty} \psi(k)\cos(kt+\gamma_n) + r_n(t)$ до будь-якого тригонометричного полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$, для довільної функції f з множини $C^{\psi}_{\beta}L_{\infty}$, $\psi \in D_0$, $\beta \in \mathbb{R}$, отримуємо рівність

$$\widetilde{\rho}_n(f;x) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n-1}{2}x\Bigg(\psi(n)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(t+x)\Bigg(\cos(nt+\gamma_n)+$$

$$+\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\cos\left((n+1)t+\gamma_n\right)\Bigg)dt + O(1)\sum_{k=n+2}^{\infty}\psi(k)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_{\infty}}\Bigg). \tag{65}$$

З огляду на (65) для доведення (35) досить встановити, що для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in L^0_{\infty} = \{\varphi \in L_{\infty} : \varphi \perp 1\}$ існує функція $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi; x; \cdot) \in C$, для якої

$$E_n(\Phi)_C = E_n(\varphi)_{\infty}, \quad n \in \mathbb{N},$$

і, крім того, має місце рівність

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi(t+x)\Bigg(\cos(nt+\gamma_n)+\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\cos\left((n+1)t+\gamma_n\right)\Bigg)dt\right| =$$

$$= \left(4 + O(1)\left(\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\right)^2\right)E_n(\varphi)_{\infty}. \tag{66}$$

Покладемо

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(n;x;\beta;t) = \operatorname{sign}\sin\left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi\beta}{2}\right)E_n(\varphi)_{\infty}$$

і через $\varphi_\delta(t) = \varphi_\delta(n;x;\beta;t)$ позначимо 2π-періодичну функцію, яка збігається з $\varphi_0(t)$ скрізь, за винятком δ-околів $\left(\delta < \dfrac{\pi}{2n}\right)$ точок $t_k = \dfrac{2k\pi + x - \pi\beta}{2n}$, $k \in \mathbb{Z}$, де вона лінійна і її графік сполучає точки $(t_k - \delta, \varphi_0(t_k - \delta))$ і $(t_k + \delta, \varphi_0(t_k + \delta))$. Функція $\varphi_\delta(t)$ неперервна і у точках $\tau_k = \dfrac{(2k-1)\pi + x - \pi\beta}{2n}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, періоду $\left(\dfrac{x - \beta\pi}{2n},\ 2\pi + \dfrac{x - \pi\beta}{2n}\right]$ досягає по модулю максимального значення, яке дорівнює $E_n(\varphi)_{\infty}$, почергово змінюючи знак. Тому її поліном найкращого рівномірного наближення порядку не вищого $n-1$, згідно з критерієм Чебишова, є поліномом, що тотожно дорівнює нулю і, отже,

$$E_n(\varphi_\delta)_C = \|\varphi_\delta\|_C = E_n(\varphi)_{\infty}. \tag{67}$$

На підставі (67) і (48)

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_\delta(t+x)\Bigg(\cos(nt+\gamma_n)+\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\cos\left((n+1)t+\gamma_n\right)\Bigg)dt\right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\cos nt + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\cos\left((n+1)t - \frac{\gamma_n}{n}\right)\right|dt E_n(\varphi)_{\infty}. \tag{68}$$

Із нерівності (19) роботи [16, с. 513] випливає оцінка

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\cos nt + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\cos\left((n+1)t - \frac{\gamma_n}{n}\right)\right|dt \le 4 + O(1)\left(\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}\right)^2. \tag{69}$$

З іншого боку,

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_\delta(t+x)\left(\cos(nt+\gamma_n) + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} \cos\left((n+1)t+\gamma_n\right) \right) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t+x)\left(\cos(nt+\gamma_n) + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} \cos\left((n+1)t+\gamma_n\right) \right) dt \right| + O(1) r_n(\delta), \tag{70}$$

де

$$r_n(\delta) = \left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi_\delta(t+x) - \varphi_0(t+x)\right)\left(\cos(nt+\gamma_n) + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} \cos\left((n+1)t+\gamma_n\right) \right) dt \right\|_C . \tag{71}$$

Оскільки $\psi \in D_0$, то для досить великих номерів n $\dfrac{\psi(n+1)}{\psi(n)} < 1$ і, отже, як неважко підрахувати,

$$r_n(\delta) < 2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi_\delta(t) - \varphi_0(t)| dt \le 8n\delta E_n(\varphi)_\infty. \tag{72}$$

Вибравши δ настільки малим, щоб виконувалась умова

$$0 < \delta < \frac{1}{n} \left(\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} \right)^2, \tag{73}$$

із (72) одержимо оцінку

$$r_n(\delta) = O(1) \left(\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} \right)^2 E_n(\varphi)_\infty. \tag{74}$$

Оскільки $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t+x) \cos((n+1)t+\gamma_n) dt = 0$, то

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t+x)\left(\cos(nt+\gamma_n) + \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} \cos\left((n+1)t+\gamma_n\right) \right) dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t+x) \cos(nt+\gamma_n) dt \right| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos(nt+\gamma_n)| dt E_n(\varphi)_\infty = 4E_n(\varphi)_\infty. \tag{75}$$

Об'єднання формул (68) – (70), (74) і (75) дозволяє стверджувати, що для функції $\Phi(t) = \varphi_\delta(t)$, параметр δ якої задовольняє умову (73), при $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність (66), а отже, і (35).

Для доведення (36) знову скористаємось інтегральним зображенням (61), а також ортогональністю функції $\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt+\gamma_n) + r_n(t)$ до будь-якого тригонометричного полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$. В результаті одержимо, що для довільної функції $f(x)$ з множини $C_\beta^\psi L_p$, $1 \le p < \infty$, $\psi \in D_0$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконується рівність

$$\widetilde{\rho}_n(f;x) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin \frac{2n-1}{2} x \left(\psi(n) \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t+x) \cos(nt+\gamma_n) dt + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) E_n(f_\beta^\psi)_{L_p} \right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{76}$$

З огляду на (76), щоб переконатися в істинності (34), досить показати, що якими б не були функція $\varphi \in L_p,\ 1 \le p < \infty$, і точка $x \in \mathbb{R}$, знайдеться функція $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi; x; \cdot)$, для якої

$$E_n(\Phi)_{L_p} = E_n(\varphi)_{L_p}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{77}$$

і, крім того, має місце рівність

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(t+x) \cos(nt+\gamma_n) dt \right| = \| \cos t \|_{p'} E_n(\varphi)_{L_p}. \tag{78}$$

Покажемо, що шуканою функцією $\Phi(\cdot)$ є функція

$$\Phi(t) =$$

$$= \| \cos t \|_{p'}^{1-p'} E_n(\varphi)_{L_p} \left| \cos \left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi(\beta-1)}{2} \right) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \cos \left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi(\beta-1)}{2} \right). \tag{79}$$

Спочатку переконаємось у справедливості рівності (77). Дійсно, з одного боку,

$$\|\Phi(t)\|_p = \| \cos t \|_{p'}^{1-p'} \left\| \cos \left(nt - \frac{x}{2} + \frac{\pi(\beta-1)}{2} \right) \right\|_{p'}^{p'-1} E_n(\varphi)_{L_p} = E_n(\varphi)_{L_p}. \tag{80}$$

Крім того, оскільки для довільного тригонометричного полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(\tau) |\Phi(\tau)|^{p-1} \operatorname{sign} \Phi(\tau) d\tau =$$

$$= \left(\| \cos t \|_{p'}^{1-p'} E_n(\varphi)_{L_p} \right)^{p-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(\tau) \cos \left(n\tau - \frac{x}{2} + \frac{\pi(\beta-1)}{2} \right) d\tau = 0,$$

то на підставі твердження 1.4.6 роботи [15, с. 28] поліном $t_{n-1}^* \equiv 0$ є поліномом найкращого наближення функції $\Phi(t)$ в метриці простору L_p, $1 \le p < \infty$. Отже, з урахуванням (80)

$$E_n(\Phi)_{L_p} = \|\Phi\|_p = E_n(\varphi)_{L_p}.$$

Рівність (78) випливає з того, що з урахуванням (79) і (43)

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(t+x) \cos(nt+\gamma_n) dt \right| =$$

$$= \| \cos t \|_{p'}^{1-p'} E_n(\varphi)_{L_p} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \left(n(t+x) - \frac{x}{2} + \frac{\pi(\beta-1)}{2} \right) \right|^{p'-1} \times \right.$$

$$\times \operatorname{sign}\cos\left(n(t+x)-\frac{x}{2}+\frac{\pi(\beta-1)}{2}\right)\cos(nt+\gamma_n)dt\Bigg| =$$

$$= \|\cos t\|_{p'}^{1-p'} E_n(\varphi)_{L_p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\cos(nt+\gamma_n)|^{p'} dt = \|\cos t\|_{p'} E_n(\varphi)_{L_p}.$$

Теорему 3 доведено.

1. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение периодических аналитических функций интерполяционными тригонометрическими многочленами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1689 – 1701.
2. *Степанець О. І., Сердюк А. С.* Оцінка залишку наближення інтерполяційними тригонометричними многочленами на класах нескінченно диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2000. – **31**. – С. 446 – 460.
3. *Сердюк А. С.* Про асимптотично точні оцінки похибки наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами функцій високої гладкості // Доп. НАН України. – 1999. – № 8. – С. 29 – 33.
4. *Сердюк А. С.* Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 495 – 505.
5. *Степанец А. И.* Класификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
7. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1079 – 1096.
8. *Сердюк А. С., Войтович В. А.* Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 274 – 297.
9. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 376 с.
10. *Сердюк А. С., Чайченко С. О.* Наближення класів аналітичних функцій лінійним методом спеціального вигляду // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 1. – С. 102 – 109.
11. *Serdyuk A. S., Sokolenko I. V.* Asymptotic behavior of best approximations of classes of periodic analitic functions defined by moduli of continuity // Bulgar.-Turkish-Ukr. Sci. Conf. "Math. Analysis, Different. Equat. and their Appl.", Sunny Beach, Sept. 15 – 20, 2010. – Sofia: Acad. Publ. House "Prof. Marin Drinov", 2011. – P. 173 – 182.
12. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
13. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1395 – 1408.
14. *Сердюк А. С., Мусієнко А. П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена при наближенні інтегралів Пуассона // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 298 – 316.
15. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
16. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510 – 518.

Одержано 04.11.11